

高等代数可视化模型构建与应用

郭淑妹, 刘楠, 张莹

信息工程大学基础部, 河南 郑州

收稿日期: 2025年8月4日; 录用日期: 2025年9月2日; 发布日期: 2025年9月10日

摘要

高等代数课程由于其理论性强和抽象的特点, 在教与学方面都有较大难度, 为了淡化高等代数教学中的抽象性, 本文从概念、理论和应用的角度出发, 分析可视化策略在高等代数教学中的作用, 通过抽象概念形象化、计算过程动态化、专业案例可视化和前沿应用可视化四个方面, 分析如何有效提高学生的学习兴趣以及培养学生的代数思维和创新思维, 并通过可视化策略的实施, 进一步提升教师的教学能力。

关键词

抽象, 可视化, 动态, Python应用

Construction and Application of Visualization Models for Advanced Algebra

Shumei Guo, Nan Liu, Ying Zhang

Department of Basic Sciences, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: Aug. 4th, 2025; accepted: Sep. 2nd, 2025; published: Sep. 10th, 2025

Abstract

Due to its strong theoretical and abstract characteristics, higher algebra courses are difficult to teach and learn. In order to dilute the abstractness of higher algebra teaching, this paper analyzes the role of visual strategies in higher algebra teaching from the perspectives of concept, theory and application. Through the four aspects of abstract concept dynamic, calculation process visualization, professional case visualization and frontier application visualization, this paper analyzes how to effectively improve students' learning interest and cultivate students' algebraic thinking and innovative thinking, and further improve teachers' teaching ability through the implementation of visualization strategies.

Keywords

Abstraction, Visualization, Dynamics, Python Applications

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

大数据时代, 信息技术飞速发展并广泛应用于各行各业, 代数知识在数据分析和处理过程中的重要性日益凸显。高等代数是代数学分支最基础的一门课程, 其思想和方法与其他分支相结合, 在多个学科和实际应用中都发挥着重要作用。

为了适应新时代本科人才需要具备的代数知识结构和数学应用能力, 注重代数知识在专业中的应用, 突出代数的实用性和易用性, 着重培养学生利用高等代数知识解决专业问题的能力, 在教学中, 我们除了采用经典的教学方法和手段, 更注重破旧立新, 采用新颖的技术为教学注入活水, 带来新的活力。

以往的高等代数的课堂中, 无论是教师还是学生, 都过于关注计算能力的培养, 对于知识本质的理解和知识框架的搭建方面, 由于高等代数内容抽象、不易直观展示等特点, 往往不尽如人意。化解抽象性的一个方法是给学生直观的感受, 从视觉上淡化抽象性。基于软件的代数课程可视化已经引起了一些学者的注意[1]-[6], 文献[1]利用 Maple 软件演示计算过程, 文献[2]基于 python 设计三个典型知识点的应用案例, 文献[3]设计高等代数的工程应用实验。文献[4]针对教学内容进行了交互实验设计, 文献[5]对重要概念和定理进行可视化, 文献[6]对代数的基本概念进行几何表示。纵观文献可以发现, 学者们对于抽象概念的产生过程和前沿应用没有进行可视化设计。高等代数的一个学习难点就是概念的抽象, 怎样破解概念的抽象性一直是高等代数教课老师思索的问题。

双重编码理论(Dual Coding Theory)是认知心理学中的一个重要理论, 它认为人类通过两种不同的编码系统来处理信息: 一种是语言编码(语言符号系统), 另一种是视觉或图像编码(视觉或图像系统)。该理论强调语言和图像在信息处理中的互补作用, 认为学习和记忆过程涉及这两种编码系统的相互作用[7]。在教育和教学设计中, 双重编码理论被广泛应用于多媒体学习和教学设计中[8]。

然而, 目前关于高等代数的研究较少提及双重编码理论的应用。结合教学实践, 笔者尝试在教学中利用图形、视频、python 游戏、MATLAB 实验, 将抽象概念、定理和结论、应用等可视化。在可视化的过程中, 注重学生代数思维的形成, 使学生了解知识的本质和结构的搭建; 通过代数知识动态形象化, 减弱其抽象性; 更新应用案例使其与前沿结合, 突出代数的实用性; 布置探究性题目, 淡化繁琐的计算, 突出软件的应用。

2. 抽象概念可视化

在高等代数的教学中, 教学程序一般是对问题的研究先给出概念, 然后从概念出发, 通过严谨的逻辑推理, 依次得出概念有关的性质、定理、推论等, 形成问题的完整理论。高等代数课程中的概念特点体现了数学的严谨性、系统性和抽象性, 对于培养学生的逻辑推理能力、抽象思维能力和复杂计算能力具有重要意义。所以, 学生对于概念的理解很重要, 概念没有理解对后面的学习很不利。而学生为了应付考试, 注重计算, 忽略知识背后的内在逻辑和应用方法, 使得“空有屠龙宝刀, 没有屠龙之技”。我们采用动态化的形式表示抽象的概念, 使学生在直观的情景下对较难的概念有初步的了解, 为后学的

扩展做很好的铺垫。

2.1. 概念具象可视化

课程中，一些重要概念学生第一次接触，条件也比较复杂，学生理解起来比较困难，但是如果把概念进行分解，使其具象化，学生就会更易理解和接受。

比如相似矩阵是一种重要的数学概念，在工程领域中有着广泛的应用。在线性空间里面相似矩阵的意义是：同一线性变换在不同基下矩阵之间的关系，从公式推导可以直接得到两个矩阵之间是一个相似关系，但是学生理解含义具有一定的困难。首先，在二维线性空间中指定标准正交基，旋转矩阵在标准基下的矩阵可以确定出来，旋转变换在基： $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的矩阵怎样求：首先把基 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 变换到标准基，然后在标准基下进行旋转，最后再把标准基变换到基 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ，这样就完成了基 $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ 下的旋转变换，除了第二步的旋转变换，第一步和第三步是基来回之间的变换，通过乘以过渡矩阵的逆和乘以过渡矩阵来实现[5]。通过 python 进行画图，从图 1 演示的过程，学生能够清楚相似变换表示怎样的一种关系，并且可以由第二和第四个图可以看出图像面积相同，说明两个矩阵的行列式相同。

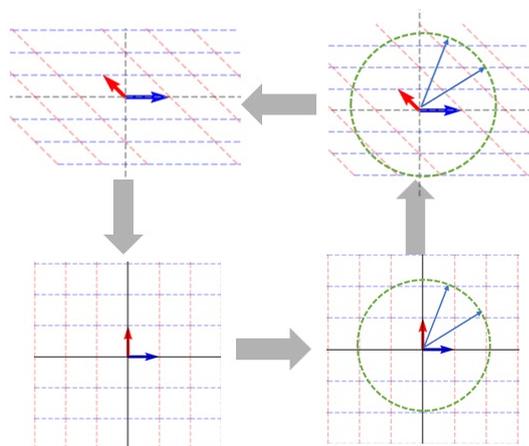


Figure 1. The relationship of similarity matrices
图 1. 相似矩阵的关系

2.2. 概念理解可视化

概念动态化是通过图形把过程呈现出来，将抽象概念的产生转化为具体的动态过程，使学生能够更深入地理解概念的本质。比如利用计算机图形技术，可以模拟向量在空间中的运动和变换，以及矩阵对向量的作用过程。学生可以通过观察这些动态过程，更直观地理解高等代数的运算规则和性质。此外，还可以利用动画和交互功能来展示线性方程组的求解过程[4]。通过动态地展示方程组的系数矩阵和增广矩阵的变化，以及消元、置换等运算过程，学生可以更清晰地看到线性方程组求解的每一步，从而加深对线性方程组求解方法的理解。利用 AI 生成 Python 小游戏，学生可以通过游戏体会初等变换的过程，实现教学抽象概念具象化到知识可玩化再到学练一体化的认知跃迁。

3. 计算过程可视化

高等代数的计算贯穿课程始终，其中，矩阵的计算占据着重要的地位，通过矩阵的运算可以求解线

性方程组，化二次型为标准形等。在计算机视觉应用中，要对照片进行数字化处理，一般通过矩阵表示照片，对于图像相关的操作，如旋转、放大、缩小等，可以利用矩阵的乘法表示。矩阵运算中，矩阵的乘法最为重要，应用也最多，掌握矩阵的乘法不能只是单纯掌握了矩阵乘法的运算，还要理解矩阵乘法所代表的线性变换，通过对矩阵乘法的演示，就可以很好理解线性变换。利用 python，首先对一幅学生感兴趣的图像，如图 2，进行旋转如图 3，然后，矩阵的乘法就可以表示为图形的剪切、旋转、平移变换问题；最后，通过探究性题目：怎样表示三维图形的变换？怎样表示复合变换？你能发掘新型变换吗？能否利用图像的伸缩、旋转、剪切创作一幅图画等进行更深层次的引导。



Figure 2. Original image
图 2. 原图



Figure 3. Enlargement of graphics
图 3. 图形的放大

4. 专业案例可视化

高等代数的应用案例很多，比如线性规划、减肥食谱、人口迁移、希尔密码等，但是这些案例有些过于陈旧，信息化时代，有非常多的渠道接触新知识和新的信息，学生对高等代数的前沿应用往往更感兴趣。因此，课程中使用的应用案例亟待更新和丰富，尤其是专业和前沿方面。这些案例在信息手段的支撑下，很多都可以采用可视化呈现。

在矩阵的学习中，可以知道利用矩阵可以表示图像，那么图像的处理就可以通过矩阵的运算来完成。图像有黑白图像和彩色图像之分，由于图像中各点的颜色及亮度不同，黑白图像中各点呈现不同程度的灰色，就把白色与黑色之间按对数关系分成若干等级，称为“灰度等级”，等级用从 0 到 255 的数字表示，黑色最小，白色最大，所以黑白图像也称为灰度图像，这种表示图像的方法在医疗、图像识别等领域有很广泛的用途。红(R)、绿(G)、蓝(B)是彩色图像的三原色，RGB 是对不同的灰度等级进行描述，构成的图像的像素。矩阵中每个元素代表了一个像素点的 RGB 颜色值，对每个像素点进行操作，就是通过

对矩阵进行运算而完成的，我们很习惯对矩阵行和列进行各种变换，所以对一幅图像的加密方式就有很多。比如随机地扰乱图像的行或者列，打乱一次就是乘以一个初等矩阵，打乱很多次就会把图形打乱，利用 MATLAB 就把图像进行了加密如图 4，对于其原理来说就是乘以了很多初等矩阵，这些初等矩阵的乘积就是加密矩阵，是一个可逆的矩阵。还可以随机地扰乱图像的 RGB 值进行缩放如图 5，解密的过程通过加密矩阵的逆矩阵就可以完成如图 6。再设置探究性问题，引导学生通过矩阵的运算思考出更多的加密方法，通过这些应用案例也使学生看到初等矩阵、初等变换及矩阵可逆的关系。

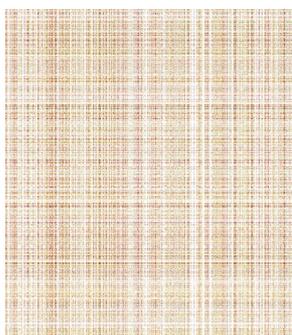


Figure 4. Disrupt the rows and columns of the image

图 4. 扰乱图像行列



Figure 5. Disrupt the RGB of the image

图 5. 扰乱图像 RGB



Figure 6. Decrypt the image

图 6. 解密图像

5. 前沿应用可视化

随着数据爆炸式的增长, 数据科学作为一个多领域交叉学科顺势而生, 它利用科学的方法、数据处理、算法和系统从结构化和非结构化各种形式的数据中提取知识和观点。在数据分析领域, 机器学习通过复杂算法和模型已知数据进行分析, 找到数据之间的内在联系, 从而完成对未知数据的预测。在机器学习中, 矩阵表示各种数据, 并且通过矩阵的运算实现对数据的处理和分析, 从而挖掘数据的主要特征和信息。主成分分析方法可以用来解决图像的压缩与识别, 但是要求相关系数矩阵是方阵, 而对于一般矩阵, 可以使用奇异值分解进行降维处理, 它是主成分分析的一种。又被广泛用于特征提取以及了解特征或属性之间的关系对于结果的重要性上。矩阵的奇异值分解(Singular Value Decomposition, SVD)主要是将一个矩阵分解成三个特殊矩阵的乘积, 通过奇异值分解, 我们可以将矩阵 A 转化为一组旋转和平移的叠加, 从而更容易地理解其内在的结构和特性。奇异值分解在统计学、信号处理等领域有着广泛的应用。例如, 在推荐系统中, 可以利用奇异值分解对用户和物品进行降维处理, 从而提高推荐系统的准确性和效率。利用奇异值分解对图像进行压缩[9], 通过图片可以看出, 奇异值对于图片的重要性, 同时也说明矩阵的特征值和其对应的特征向量的重要应用。图片在计算机中是以矩阵形式保存的, 比如有矩阵 $A_{m \times n}$ 的秩为 r , 奇异值分解为 $A = U \Sigma V^T$ 其中奇异值为 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_r > 0$, 取前 k ($k=1, 2, \dots, r-1$) 个奇异值对应的数据, 使得 $A_{m \times n} \approx U_{m \times k} \Lambda_{k \times k} V_{k \times n}^T$, 当 $k < \frac{mn}{m+n+1}$ 时, 就可以实现对图像的压缩。如图 7 所示, $m = 262$, $n = 282$, 当 $A_{m \times n} \approx U_{m \times k} \Lambda_{k \times k} V_{k \times n}^T$ 中的 k 取不同值时, 得到不同效果的压缩图像, 但是存储空间大大降低, 当 $k = 50$ 时, 图像效果和原图接近, 但是存储空间从 $266 \times 282 = 75012$ 到 $(1 + 266 + 282) \times 50 = 27450$, 约为原来的 37%。

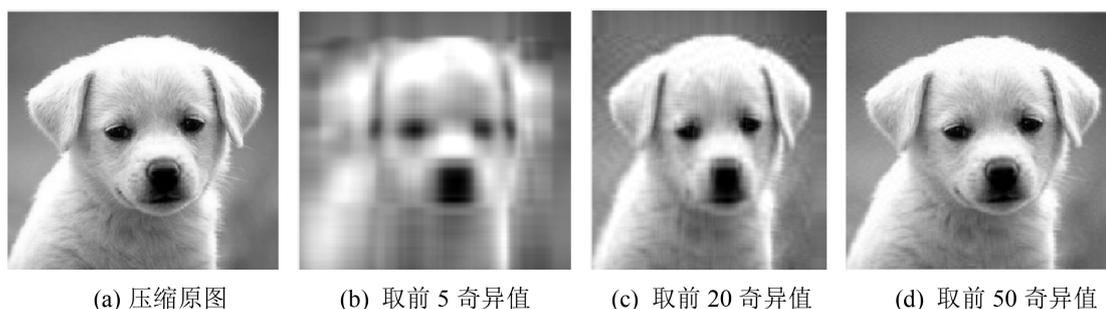


Figure 7. Compressed images with different effects of the original image

图 7. 原图不同效果的压缩图像

高等代数中的许多定义、性质、定理和推论, 都因为其抽象性的特点, 变得不易学习和掌握, 为了从根源上解决问题, 在以后的教学中, 课程组尝试: 首先根据时代特点对高等代数知识的呈现形式进行更新和加工, 挖掘学生学习过程中的兴奋点; 其次, 充分利用各种资源和数学软件对核心概念和重要定理进行可视化开发, 以直观战胜抽象; 最后, 通过建立可视教学资料库, 丰富教学资源。

通过可视化, 学生可以更好地掌握知识点的思想内涵, 也可以促进其思维能力和创新能力的发展; 同时, 可视化手段可以将知识点和思想内涵以图像、视频等形式存储在大脑中, 可以促进其对知识的理解和记忆; 另外, 可视化手段也是数字化教学方式的一种体现, 对于点燃学生的学习兴趣, 提高高等代数的课堂教学质量都起到非常重要的辅助和支撑作用。“学然后知不足, 教然后知困。知不足, 然后能自反也; 知困, 然后能自强也。故曰: 教学相长也”。可视化的开发和在教学实践上的应用, 需要投入非常大的精力, 对提高教师的各方面能力也有一定的促进作用。

基金项目

校教学研究项目 JXYJ2025C008。

参考文献

- [1] 李庆春, 杨雯雯, 桑海风. 基于 Maple 软件的高等代数可视化教学案例研究[J]. 白城师范学院学报, 2018, 32(6): 23-26.
- [2] 李清华, 王宝娟. 高等代数知识点的可视化教学设计探索与实践[J]. 大学数学, 2022, 38(2): 112-119.
- [3] 张颖, 张会生. 高等代数可视化教学的若干实践[J]. 电脑知识与技术, 2023, 19(18): 106-109.
- [4] 张杰, 杨刚, 吴惠彬. 高等代数[M]. 第 2 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.
- [5] 马同学. 马同学图解高等代数[M]. 北京: 电子工业出版社, 2022.
- [6] 刘与嘉, 周小辉. 高等代数教学中若干“可视化”教学案例[J]. 高等数学研究, 2024, 27(1): 85-90.
- [7] 李梦玲. 基于双重编码理论的课堂教学设计[D]: [硕士学位论文]. 武汉: 华中师范大学, 2016.
- [8] 王珏. 新领域, 新方向: “知识可视化”的解析与应用——基于脑科学的视角[J]. 广西职业技术学院学报, 2021, 14(1): 49-56.
- [9] 吴俊政. 一种基于奇异值分解的图像压缩方法[J]. 计算机与数字工程, 2009, 37(5): 136-138.