

具有不连续激活函数和时滞的分数阶Hopfield神经网络

王 卓

武汉东湖学院基础课部, 湖北 武汉

收稿日期: 2025年8月5日; 录用日期: 2025年9月1日; 发布日期: 2025年9月10日

摘 要

近年来, 神经网络广泛运用于图像处理、模式识别、诊断故障、以及通信保密等各个复杂领域。神经网络系统的运用主要依赖其稳定性。在实际应用中, 时滞现象经常发生, 若能够充分利用时滞现象, 对于提高系统的稳定性是很有帮助的。由于分数阶神经网络有着更好的记忆特性与遗传特性, 因此, 本文注重对分数阶时滞神经网络的稳定性进行研究。对具有不连续激活函数的Caputo分数阶时滞神经网络模型进行了研究。不同于其他文章, 本文研究的激活函数是不连续的, 更加贴合实际情况。在Filippov意义下, 提出了能够保证系统解存在的条件, 同时对平衡点的渐近稳定性做了探讨。此外还提出来了一个钉扎同步控制策略, 与其他的同步条件不同, 在一个很小的范围内, 保证在合适的条件下, 主从系统实现准同步。最后, 通过数值例子以及仿真模拟说明所得结果的有效性。

关键词

分数阶, 神经网络稳定性, 不连续

Fractional-Order Hopfield Neural Networks with Discontinuous Activation Functions and Time Delays

Zhuo Wang

Department of Basic Courses, Wuhan Donghu College, Wuhan Hubei

Received: Aug. 5th, 2025; accepted: Sep. 1st, 2025; published: Sep. 10th, 2025

Abstract

In recent years, neural networks have been widely used in various complex fields such as image

processing, pattern recognition, fault diagnosis, and communication security. The application of neural network systems mainly relies on their stability. In practical applications, time delay phenomena often occur. If time delay phenomena can be fully utilized, it is very helpful to improve the stability of the system. Due to the better memory and genetic characteristics of fractional order neural networks, this article focuses on exploring the stability of fractional order delay neural networks. Caputo fractional delayed neural network model with discontinuous activation function is studied. Different from other articles, the activation function studied in this paper is discontinuous and more practical. In the sense of Filippov, conditions were proposed to ensure the existence of system solutions, and the asymptotic stability of equilibrium points was explored. In addition, a pinning synchronization control strategy has been proposed, which is different from other synchronization conditions and ensures that the master slave system achieves quasi synchronization under suitable conditions within a very small range. Finally, numerical examples and simulation simulations are used to demonstrate the effectiveness of the obtained results.

Keywords

Fractional Order, Neural Network Stability, Discontinuous

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对于一类具有不连续激活函数的 Hopfield 神经网络, 研究人员通常会对其解进行研究, 探究其解存在性的增长条件。再对其稳定性条件进行分析, 得到保证解稳定的充分条件[1]。文献[2]对一类具有间断激活和时滞的分数阶神经网络的全局 Mittag-Leffler 同步问题和有限时间内同步问题进行了研究。通过设计一种新的包含时滞和不连续激活函数的反馈控制器, 得到了保证分数阶系统 Mittag-Leffler 收敛和有限时间收敛的条件。还明确求出了有限时间内全局同步设置时间的上界。文献[3]通过引入复值 Filippov 微分包含理论, 利用 Leray-Schauder 替代定理, 构建了一类具有不连续二元激活函数的复值神经网络动力学行为的研究框架。为了证明具有间断激活函数的时滞复值神经网络的全局指数稳定性, 反复探讨如何选择一个合适的 Lyapunov 函数。研究者提出了具有间断激活的线性增长分数阶神经网络的全局 Mittag-Leffler 同步问题, 给出了实现同步目标的充分条件。文献[4]研究了基于分数阶忆阻器的 Hopfield 神经网络在参数扰动下的鲁棒稳定性。基于分数阶 Lyapunov 直接法, 建立了鲁棒稳定性的一些充分条件。对于这种右端不连续的神经网络系统, 与传统的解的意义不同, 都是在 Filippov 意义上分析了其平衡点的存在性和唯一性, 并获得了鲁棒稳定性的结果。

Zhang 等人[5]对 G-布朗运动驱动的随机 Hopfield 神经网络的指数稳定性和准指数稳定性做了分析, 考虑了随机 Hopfield 神经网络理论模型的 Knightian 不确定性。对于 Hopfield 神经网络系统, 除了研究指数稳定和渐近稳定性外, 对于全局鲁棒指数稳定性问题也有研究。Yu 等人[6]对一类具有范数有界参数不确定性和逆 Hölder 神经元激活函数的全局鲁棒指数稳定性问题做了研究。通过利用 Brouwer 度概念和一些分析技巧, 对平衡点的存在唯一性做出了判断, 还给出了全局鲁棒指数稳定性判据。而 Nie 等人[7]对具有高斯激活函数和多时滞的分数阶 Hopfield 神经网络的多稳态问题进行研究, 改进和扩展了经典整数阶神经网络和分数阶神经网络的无时滞多稳态工作[8]。

对于具有不连续激活函数的分数阶 Hopfield 神经网络模型, 它的研究模型还比较少, 且很少有人关

注具有不连续激活函数和时滞的分数神经网络在有限时间段内的钉扎的同步问题, 所以本文将考虑一类含有时滞和不连续激活函数的 Caputo 分数阶 Hopfield 神经网络(CFHNN)稳定性分析。利用一个新的 Gronwall 不等式对稳定性做出了分析, Gronwall 不等式又称 Gronwall-Bellman 不等式, 在微分方程和积分方程解的性质分析中起着重要的作用, 被用来模拟解决工程和应用科学问题。

基于钉扎控制, 文章对具有不连续激活函数和时滞的分数神经网络在有界的误差内实现准同步问题分析, 研究分数阶动力系统的这种准同步状态行为对于解决许多实际问题很重要, 但很少有文章对本文所描述的准同步做研究。因此, 本文对含有不连续激活函数的 Hopfield 神经网络的这种准同步做分析, 为研究神经网络同步性问题提供了新的视角。

本文结构组织如下, 在第二部分中, 介绍了一些本文必备的定义和引理, 还给出了模型描述。第三部分给出了解的存在性以及平衡点的稳定性的证明。第四部分给出了基于钉扎控制的误差同步的定义, 以及相关的证明。最后基于所提出的定理, 给出数值例子及仿真模拟验证了所得结果。

2. 预备知识

在本节中, 考虑如下的 Caputo 分数阶时滞 Hopfield 神经网络模型。

$$\begin{cases} {}_0 D_t^\alpha x(t) = -a_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^n c_{ij} f_j(x_j(t-\tau)) + w_i, \\ x_i(\kappa) = \varrho_i(\kappa), \kappa \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (1)$$

等价于下列向量形式:

$$\begin{cases} {}_0 D_t^\alpha x(t) = -A(x(t)) + Bf(x(t)) + Cf(x(t-\tau)) + W, \\ x(\kappa) = \varrho(\kappa), \kappa \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (2)$$

其中 $0 < \alpha < 1$; $x(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$ 是状态向量; $A = \text{diag}\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$, $a_i > 0, i = 1, 2, \dots, n$; 表示 $n \times n$ 对角矩阵。 $B = (b_{ij})_{n \times n}, C = (c_{ij})_{n \times n}$ 表示连接权重矩阵; $W = [w_1, w_2, \dots, w_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 表示外部输入, τ 表示时滞。

$f(x(t)) = (f_1(x_1), f_2(x_2), \dots, f_n(x_n))^T \in \mathbb{R}^n$, $f_i(x_i): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, i = 1, \dots, n$ 表示第 i 个神经元的激活函数。 $\varrho(\kappa) = (\varrho_1(\kappa), \varrho_2(\kappa), \dots, \varrho_n(\kappa))$ 是初始条件, 且有 $\|\varrho\| = \sup_{t \in [-\lambda, 0]} \|\varrho(\kappa)\|$ 。除了在可数的孤立点集合 $\{t_{ik}\}$ 上,

$f_i(x_i)$ 是连续可微的, 其中左极限 $f_i(t_{ik}^-)$ 和右极限 $f_i(t_{ik}^+)$ 都存在。并有下列假设成立:

假设 1 对于每个 $j = 1, 2, \dots, n$, $f_j(\cdot)$ 是有界的, 且

$$|f_j(\cdot)| \leq \zeta_j. \quad (3)$$

假设 2 对于每个 $j = 1, 2, \dots, n$, 假设 $\mathcal{F}$ 满足一个增长条件, 且 $\exists \tilde{k}_j > 0, \tilde{h}_j$, 使得

$$\left| \mathcal{F}[f_j(x_j(t))] \right| = \sup_{g \in \mathcal{F}[f_j(x_j(t))]} |g| \leq \tilde{k}_j |p_j(t)| + \tilde{h}_j. \quad (4)$$

假设 3 对于每个 $j = 1, 2, \dots, n$ 存在非负常数 k_j, h_j , 使得

$$|\theta_j(t) - \delta_j(t)| \leq k_j |q_j(t) - x_j(t)| + h_j, \forall x_j, q_j \in \mathbb{R}. \quad (5)$$

其中 $\delta_j(t) \in \mathcal{F}[f_j(x_j(t))]$, $\theta_j(t) \in \mathcal{F}[f_j(q_j(t))]$.

假设 4 对于每个 $i = 1, 2, \dots, n$, 存在一个非负常数 z_i , 放大函数 $a_i(\cdot)$ 是连续函数, 且满足下列关系

$$\underline{a}_i \leq a_i(x_i) \leq \bar{a}_i,$$

$$\frac{a_i(q_i) - a_i(x_i)}{q_i - x_i} \geq z_i, \quad \forall q_i, x_i \in \mathbb{R}, x_i \neq q_i.$$

定义 1 Caputo 分数阶导数[1]

$${}_0^C D_t^\alpha x(t) = \int_0^t \frac{(t-v)^{-\alpha}}{\Gamma(m-\alpha)} x^{(m)}(v) dv, \quad m-1 < \alpha < m \in \mathbb{Z}^+.$$

基于整数阶微分方程的 Filippov 解, 引入了分数阶微分方程 Filippov 解法的概念。考虑以下 n 维分数阶微分系统:

$${}_0 D_t^\alpha x(t) = f(t, x). \quad (6)$$

其中, $f(t, x)$ 在 x 上不连续。

定义 2 集值映射 $\mathcal{F}: R \times R^n \rightarrow R^n$ 定义为[1]

$$\mathcal{F}(t, x) = \bigcap_{\delta > 0, \mu(N)=0} \overline{co} [f(t, B(x, \delta)/N)]. \quad (7)$$

其中, $B(x, \delta) = \{y: \|y - x\| \leq \delta\}$, 且 $\mu(N)$ 是集合 N 的 Lebesgue 测度, 定义在非退化区间 $I \subset R$ 上的向量函数 $x(t)$, 称为系统(1)的 Filippov 解, 如果它在任何 I 的子区间 $[t_1, t_2]$ 上是绝对连续的, 对几乎处处(a.e.) $t \in I$, $x(t)$ 满足微分包含

$${}_0 D_t^\alpha x(t) \in \mathcal{F}(t, x).$$

现在考虑系统(1), 并将集值映射表示为

$$F(x) \triangleq \overline{co} [f(x)] = (\overline{co} [f_1(x_1)], \dots, \overline{co} [f_n(x_n)]).$$

由 $f_i(\cdot)$, 可得

$$\overline{co} [f_i(x_i)] = [\min \{f_i(x_i^-), f_i(x_i^+)\}, \max \{f_i(x_i^-), f_i(x_i^+)\}], i = 1, 2, \dots, n.$$

并定义系统(1)的 Filippov 解如下。

定义 3 [9] 对任意的连续函数 $\varrho_j: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ 和可测量选择 $\varpi_j: [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$, 使得 $\varpi_j(\kappa) \in \mathcal{F}[f_j(\varrho_j(\kappa))]$, 对 $\kappa \in [-\lambda, 0]$ 与相应的系统(1)初始函数为 (e_j, ϖ_j) 。假设有一个函数 $[x_j(t), \delta_j(t)]: [-\tau, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, 使得 x 是系统(1)在 $[-\tau, T]$ 上的一个解, 对 $T > 0$, 且

$$\begin{cases} {}_0 D_t^\alpha x_i(t) = -a_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \delta_j(t) + \sum_{j=1}^n d_{ij} \delta_j(t - \tau) + w_i, \\ \delta_j(t) \in \mathcal{F}[f_j(x_j(t))], t \in [0, T], \\ x_i(\kappa) = \varrho_i(\kappa), \forall \kappa \in [-\tau, 0], \\ \delta_i(\kappa) = \varpi_i(\kappa), \kappa \in [-\tau, 0]. \end{cases}$$

定义 4 双参数 Mittag - Leffler 函数定义为[1]

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}. \quad (8)$$

其中, $\alpha > 0, \beta > 0$, $z \in C$ 。当 $\beta = 1$ 时, 可记做如下形式

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)} = E_{\alpha, 1}(z). \quad (9)$$

定义 5 [9] 常向量 $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*)^T$ 是系统(1)在 Filippov 意义上的解,

$$0 \in -a_i(x_i^*) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \mathcal{F}[f_j(x_j^*)] + \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathcal{F}[f_j(x_j^*)] + w_i.$$

等价于存在 $\delta_i^* \in \mathcal{F}[f_j(x_j^*)]$ 使得

$$0 = -a_i(x_i^*) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \delta_i^* + \sum_{j=1}^n c_{ij} \delta_i^* + w_i.$$

引理 1 [9] 如果 $0 < \alpha < 1$, 所有特征值 $\tau^* s$ 的 $S = -\beta + \gamma$ 满足 $\arg(\tau^*) > \frac{\pi}{2}$, 且对于任意的 $\tau > 0$, 特征方程 $\det(\Delta(t)) = s^\alpha + \beta - \gamma e^{-s\tau} = 0$ 没有纯虚根, 则系统的平衡点

$${}_0 D_t^\alpha x(t) = -\beta x(t) + \gamma p(t - \tau).$$

是 Lyapunov 全局渐近稳定的。

引理 2 [9] 若 $x(t) \in \mathbb{R}^n$ 是一个连续可微函数, 则下列不等式成立

$${}_0 D_t^\alpha x^2(t) \leq 2x(t) {}_0 D_t^\alpha x(t), \forall 0 < \alpha < 1, t \geq 0.$$

当 $x(t) \in \mathbb{R}^n$,

$${}_0 D_t^\alpha x^T(t) x(t) \leq 2x^T(t) {}_0 D_t^\alpha x(t), \forall 0 < \alpha < 1, t \geq 0.$$

成立。即, 等价于

$${}_0 D_t^\alpha \sum_{i=1}^n x_i^2(t) \leq 2 \sum_{i=1}^n |x_i(t)| {}_0 D_t^\alpha |x_i(t)|.$$

成立, 对所有的 $0 < \alpha < 1, t \geq 0$ 。

引理 3 [9] 对任意向量 $p, q \in \mathbb{R}^n$ 以及一个正定矩阵 $L \in \mathbb{R}^{n \times n}$, 则有

$$2p^T q \leq p^T L p + q^T L^{-1} q. \quad (10)$$

引理 4 [9] $q_1 > 0, q_2 > 0, q_3 > 1, q_4 > 1$, $q_3^{-1} + q_4^{-1} = 1$, 下列等式成立

$$q_1 q_2 \leq \frac{(\varepsilon q_1)^{q_3}}{q_3} + \frac{(\varepsilon^{-1} q_2)^{q_4}}{q_4}.$$

引理 5 [1] 对任意的常数 $\alpha > 0$, 假设在 $[0, T], T \leq +\infty$ 上, 有局部可积非负函数 $a(t)$, 定义在 $[0, T], T \leq +\infty$ 上的非负、非递减连续函数 $b(t) \leq M$, M 是一个常数, 如果 $u(t)$ 是非负的并且在 $[0, T]$ 上局部可积, 且满足

$$u(t) \leq a(t) + b(t) \int_0^t (t-s)^{\alpha-1} u(s) ds.$$

则有

$$u(t) \leq a(t) E_\alpha(b(t) \Gamma(\alpha) t^\alpha).$$

引理 6 [1] 设 $x(t) \in C^1([0, +\infty), \mathbb{R})$ 是连续可微函数, 下列不等式几乎处处成立。

$${}_0 D_t^\alpha |x(t)| \leq \operatorname{sgn}(x(t)) {}_0 D_t^\alpha x(t), 0 < \alpha < 1. \quad (11)$$

引理 7 [9] 引入以下分数阶时滞微分不等式

$$\begin{cases} {}_0 D_t^\alpha x(t) \leq -\beta x(t) + \gamma x(t - \tau), t > 0, 0 < \alpha \leq 1, \\ x(\kappa) = \varrho(\kappa), \kappa \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

和分数阶时滞线性系统

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha \rho(t) = -\beta \rho(t) + \gamma \rho(t-\tau), t > 0, 0 < \alpha \leq 1, \\ \rho(\kappa) = \varrho(\kappa), \kappa \in [-\tau, 0], \end{cases}$$

其中, $x(t), \rho(t)$ 在 $[0, +\infty]$ 是非负连续的, $\varrho(\kappa) > 0, t \in [-\tau, 0]$ 。如果 $\beta > 0, \gamma > 0$, 对于所有的 $t \in [0, +\infty]$, 有 $x(t) \leq \rho(t)$ 。

引理 8 [1] (Halanay 不等式) 对于连续函数 $x(t), t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha x(t) \leq \delta_0 + \delta_3 x(t) + \delta_4 \sup_{t-\tau(t) \leq \kappa \leq t} v(\kappa), t \geq 0, \\ x(t) = |\varrho(t)|, t \leq 0, 0 < \alpha < 1, \end{cases} \quad (12)$$

其中 $\varrho(t)$ 是有界连续函数, 系数 $\delta_0, \delta_3, \delta_4$ 满足 $\delta_0, \delta_4 \geq 0, \delta_3 < 0, -\tau \leq t - \tau(t) \leq t$ 。令 $E_0 = \sup_{-\tau \leq \kappa \leq 0} \{|\varrho(\kappa)|\}$, $v_0 = |\varrho(0)|$ 。如果 $\delta_3 + \delta_4 < 0$, 则有

$$v(t) \leq E_0 + \frac{\delta_3}{\delta_3 + \delta_4} v_0 - \frac{\delta_0}{\delta_3 + \delta_4},$$

除此之外, $\lim_{t \rightarrow +\infty} (t - \tau(t)) = +\infty$, 对任意的 $\theta > 0$, 存在 $t^* = t^*(E_0, \theta) > 0$

$$v(t) \leq -\frac{\delta_0}{\delta_3 + \delta_4} + \theta, t \geq t^*.$$

3. 主要内容

3.1. 解的存在性

定理 1 在 Filippov 意义下, 若假设 1, 3, 4 成立, 系统(1)至少存在一个解 $x(t)$ 。

证明: 由于集值映射 $x(t) \rightarrow -Ax(t) + BF(x(t)) + CF(x(t-\tau)) + w$ 是具有上半连续的非空紧凸集合, 所以可以保证系统(1)的解的局部存在性。基于分数阶系统的表达式可以得到如下的不等式:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\leq \|x(0)\| + \left\| \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [-Ax(\tau) + BF(x(\tau)) + CF(x(t-\tau)) + w] d\tau \right\| \\ &\leq \|x(0)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [\|A\| \|x(t)\| + \|B\| (K \|x(t)\| + H) + \|C\| (K \|x(t)\| + \|x(0)\| + H) + \|w\|] d\tau \\ &\leq \|x(0)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|A\| \|x(t)\| d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|A\| \|x(t)\| d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|B\| (K \|x(t)\| + H) d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|C\| (K \|x(t)\| + \|x(0)\| + H) d\tau + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|w\| d\tau \\ &\leq \left(1 + \frac{\|C\| H}{\Gamma(\alpha+1)} t^\alpha \right) \|x(0)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [\|A\| + \|B\| K + \|C\| K] \|x(t)\| d\tau \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [(\|B\| + \|C\|) H + \|w\|] d\tau \\ &\leq H(t) + \frac{M(t)}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} \|x(\tau)\| d\tau. \end{aligned}$$

其中, $K = \max\{k_1, k_2, \dots, k_n\}$, $H = \max\{h_1, h_2, \dots, h_n\}$

$$H(t) = \left(1 + \frac{\|C\|H}{\Gamma(\alpha+1)}t^\alpha\right) \|x(0)\| + \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{\alpha-1} [\|B\| + \|C\|] H + \|w\| d\tau,$$

$$M(t) = \|A\| + \|B\|K + \|C\|K.$$

$H(t)$ 是非减函数, 由引理 5 可得,

$$\|x(t)\|_p \leq H(t) E_\alpha M(t) \Gamma(\alpha) t^\alpha. \quad (13)$$

所以 $x(t)$ 在 $[0, T)$ 上是有界的, 这保证了在 Filippov 意义上的全局解的存在性, 并且它定义在 $[0, +\infty)$ 。因此, 也证明了系统(1)解的存在性。

3.2. 平衡点的渐近稳定性

定理 2 在假设 2~3 和 4 下, 如果满足以下代数不等式:

$$\beta = \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{i=1}^n 2\bar{a}_i - \varepsilon_3 - \sum_{j=1}^n [\varepsilon_1 |b_{ij}| + \varepsilon_2 |c_{ij}|] k_j - \sum_{j=1}^n |b_{ij}| \frac{1}{\varepsilon_1} k_j \right\}$$

$$> \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon_2} |c_{ij}| k_j \right\} = \gamma > 0, \quad (14)$$

则系统(1)的平衡点是全局渐近稳定的。其中

$$\hat{\pi} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\varepsilon_3} R_i^2 > 0, \quad \mu = -\beta \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \gamma < 0, \quad R_i = \sum_{j=1}^n [|b_{ij}| + |c_{ij}|] h_j.$$

证明: 令 $v_i(t) = v_i(t) - x_i^*$, 根据定义 4.5 和系统(4-1), 有

$$\begin{cases} {}_0 D_t^\alpha v_i(t) = -a_i(v_i(t)) + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_{ij} \tilde{\delta}_j(t) - \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{\delta}_j(t-\tau), \\ v_i(\kappa) = \varrho_i(\kappa) - x_i^* = \iota_i(\kappa), \kappa \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (15)$$

其中

$$\tilde{a}_i(v_i(t)) = a_i(v_i(t) + p_i^*), \quad \tilde{b}_i(v_i(t)) = b_i(v_i(t) + p_i^*) - b_i(p_i^*), \quad \tilde{\delta}_j(t) = \delta_j(t) - \delta_j^*.$$

构造如下的 Lyapunov 函数:

$$G(t) = \frac{1}{2} v^T(t) v(t) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n v_i^2(t). \quad (16)$$

从引理 2, 假设 1, 3 以及 4, 可得

$$\begin{aligned} D^\alpha G(t) &\leq \sum_{i=1}^n v_i(t) D^\alpha v_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n (v_i(t)) \left[-\tilde{a}_i(v_i(t)) + \sum_{j=1}^n \tilde{b}_{ij} \tilde{\delta}_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \tilde{\delta}_j(t-\tau) \right] \\ &\leq -\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i v_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| |v_i(t)| [k_j |v_j(t)| + h_j] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}| |v_i(t)| [k_j |v_j(t-\tau)| + h_j] \\ &\leq -\sum_{i=1}^n \tilde{a}_i v_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| k_j |v_i(t)| |v_j(t)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}| k_j |v_i(t)| |v_j(t-\tau)| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [|b_{ij}| + |c_{ij}|] h_j |v_i(t)|. \end{aligned} \quad (17)$$

通过使用引理 4

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| k_j |v_i(t)| |v_j(t)| &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| k_j \left[\frac{\varepsilon_1}{2} v_i^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon_1} v_j^2(t) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[|b_{ij}| k_j \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} |b_{ji}| k_i \right] \frac{v_i^2(t)}{2}. \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}| k_j |v_i(t)| |v_j(t-\tau)| &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}| k_j \left[\frac{\varepsilon_2}{2} v_i^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon_2} v_j^2(t-\tau) \right] \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}| \varepsilon_2 k_j \frac{v_i^2(t)}{2} + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}| \frac{1}{\varepsilon_2} k_i \frac{v_i^2(t-\tau)}{2}. \end{aligned} \quad (19)$$

$$\sum_{i=1}^n |v_i(t)| R_i \leq \sum_{i=1}^n \left[\frac{\varepsilon_3}{2} v_i^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon_3} R_i^2 \right]. \quad (20)$$

将(18)~(20)代入(17), 即:

$$\begin{aligned} {}_0 D_t^\alpha G(t) &\leq -\sum_{i=1}^n a_i v_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left[|b_{ij}| k_j \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} |b_{ji}| k_i \right] \frac{v_i^2(t)}{2} + \sum_{j=1}^n \varepsilon_2 |c_{ij}| k_j \frac{v_i^2(t)}{2} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon_2} |c_{ij}| k_i \frac{v_i^2(t-\tau)}{2} + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\varepsilon_3}{2} v_i^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon_3} R_i^2 \right] \\ &\leq \left\{ \sum_{i=1}^n 2\bar{a}_i - \varepsilon_3 - \sum_{j=1}^n [\varepsilon_1 |b_{ij}| + \varepsilon_2 |c_{ij}|] k_j - \sum_{j=1}^n |b_{ji}| \frac{1}{\varepsilon_1} k_i \right\} \\ &\leq -\beta G(t) + \gamma G(t-\tau) + \hat{\pi}. \end{aligned}$$

考虑以下线性系统

$${}_0 D_t^\alpha H(t) = -\beta H(t) + \gamma H(t-\lambda) + \hat{\pi}. \quad (21)$$

其中 $H(t) \geq 0, (H(t) \in \mathbb{R})$, 与 $G(t)$ 具有相似的初始值, 上式通过拉普拉斯变换, 得到

$$\begin{aligned} s^\alpha H(s) - s^{\alpha-1} H(0) &= -\beta H(s) + \gamma \int_0^{+\infty} \exp\{-st\} H(t-\tau) dt + \hat{\pi} \int_0^{+\infty} \exp\{-st\} dt \\ &= -\beta H(s) + \gamma \int_{-\tau}^{+\infty} \exp\{-s(\psi+\tau)\} H(\psi) d\psi + \frac{\hat{\pi}}{s} \\ &= -\beta H(s) + \gamma \exp\{-s\tau\} \int_{-\tau}^{+\infty} \exp\{-s\psi\} H(\psi) d\psi + \frac{\hat{\pi}}{s} \\ &= -\beta H(s) + \gamma \exp\{-s\tau\} \left[\int_{-\tau}^0 + \int_0^{+\infty} \right] \exp\{-s\psi\} H(\psi) d\psi + \frac{\hat{\pi}}{s} \\ &= -\beta H(s) + \gamma \exp\{-s\lambda\} \int_{-\tau}^0 \exp\{-s\psi\} H(\psi) d\psi + \gamma \exp\{-s\tau\} H(s) + \frac{\hat{\pi}}{s}. \end{aligned}$$

$$\left[s^\alpha + \beta - \gamma \exp\{-s\tau\} \right] H(s) = s^{\alpha-1} H(0) + \gamma \exp\{-s\tau\} \int_{-\tau}^0 \exp\{-s\psi\} H(\psi) d\psi + \frac{\hat{\pi}}{s}. \quad (22)$$

根据引理 1 和等式(22), 有

$$\Delta(s) = s^\alpha + \beta - \gamma \exp\{-s\tau\}, \quad \Delta(s) = \det(\Delta(s)) = 0.$$

下面来证明对于任意的 $\tau > 0$, $\det(\Delta(s))$ 有纯虚根。

对于任意的 $\tau > 0$, 假设 $\Delta(s) = s^\alpha + \beta - \gamma \exp\{-s\tau\}$ 有纯虚根, 如果

$$\sigma < 0, s = \sigma i = |\sigma| \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right],$$

σ 是一个实常数, 且 $\sigma < 0$, $s = \sigma i = |\sigma| \left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]$ 转化为如下的特征方程

$$s^\alpha + \beta - \gamma \exp\{-s\tau\} = 0,$$

则有

$$|\sigma|^\alpha \left[\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pm\alpha\pi}{2}\right) \right] + \beta - \gamma [\cos(\sigma\tau) - i \sin(\sigma\tau)] = 0,$$

也就意味着

$$|\sigma|^\alpha \left[\cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\pm\alpha\pi}{2}\right) \right] + \beta = \gamma [\cos(\sigma\tau) - i \sin(\sigma\tau)].$$

分离上式的实部和虚部, 可以得到

$$|\sigma|^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \beta = \gamma \cos(\sigma\tau). \quad (23)$$

$$|\sigma|^\alpha \sin\left(\frac{\pm\alpha\pi}{2}\right) = -\gamma \sin(\sigma\tau). \quad (24)$$

由(23)和(24)两式可得

$$\left[|\sigma|^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + \beta \right]^2 + \left[|\sigma|^\alpha \sin\left(\frac{\pm\alpha\pi}{2}\right) \right]^2 - \gamma^2 = 0. \quad (25)$$

$$|\sigma|^{2\alpha} + \beta^2 + 2\beta |\sigma|^\alpha \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) - \gamma^2 = 0. \quad (26)$$

现在, 估计上式的判别式, 有

$$\begin{aligned} \Delta &= \left[2\beta \cos\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) \right]^2 - 4(1)(\beta^2 - \gamma^2) \\ &= \left[\gamma^2 - \beta^2 \sin^2\left(\frac{\pm\alpha\pi}{2}\right) \right]. \end{aligned} \quad (27)$$

根据上述定理的假设, 有 $\gamma < \beta \sin\left(\frac{\pm\alpha\pi}{2}\right)$, 使得 $\Delta < 0$, 也就是对任意的 $\tau > 0$, $\det(\Delta(s))$ 没有纯虚根。现在需要证明矩阵 $J = \gamma - \beta$ 的特征值满足如下的不等式。

$$|\arg \tau^*(J)| > \frac{\pi}{2}.$$

由于 $\gamma < \beta \sin\left(\frac{\pm\alpha\pi}{2}\right) < \beta$, $0 < \alpha < 1$ 。所以有 $\tau^*(J)$ 是非负的, 也就意味着 $|\arg \tau^*(J)| > \frac{\pi}{2}$ 。再次使用引理 1, 系统(1)的平衡点是全局渐近稳定的。因此, 当 $t \rightarrow +\infty$, 有 $H(t) \rightarrow 0$ 。

基于引理 7, 有 $0 \leq G(t) \leq H(t) \rightarrow 0$ 当 $t \rightarrow +\infty$, 系统(1)的平衡点是全局渐近稳定的。至此, 证明已结束。

与其他文章所述的 CFHNN 的全局渐近稳定性不同, 本章通过线性分数阶时滞系统的比较定理给出

了具有间断神经元激活的 CFHNN 的全局渐近稳定性的充分条件。此外, 根据代数不等式, 所获得的稳定性准则在实践中很容易验证。

3.3. 固定同步结果

在这一部分, 设计了一类新的钉扎控制器, 来确保 CFHNN 的全局渐近同步准则。

模型(1)被认为是主系统, 相应的从系统可表示为

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha q_i(t) = -a_i q_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(q_j(t)) + \sum_{j=1}^n c_{ij} f_j(q_j(t-\tau)) + w_i + E_i(t), \\ q_i(\kappa) = \bar{q}_i(\kappa), \kappa \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (28)$$

其中, $E_i(t)$ 是固定控制输入, $x_i(t)$ 为状态变量, 其他参数与主系统(1)中的参数相似。初始值 $x_i(\kappa) \in C([- \tau, 0], \mathbb{R}^n)$ 与从系统(28)相关联, 并且范数定义如下

$$\|\bar{q}\| = \sup_{t \in [-\tau, 0]} \|\bar{q}\|.$$

基于微分包含分析和(28), 可得

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha q_i(t) \in -a_i q_i(t) + \sum_{j=1}^n \mathcal{F}[f_j(q_j(t))] + \sum_{j=1}^n c_{ij} \mathcal{F}[f_j(q_j(t-\tau))] + w_i + E_i(t), \\ q_i(\kappa) = \bar{q}_i(\kappa), \kappa \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (29)$$

对 $t \geq 0$, 等价于存在 $\theta(t) \in \mathcal{F}[f_j(x_j(t))]$, 从系统的初值问题如下:

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha q_i(t) = -a_i q_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \theta_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \theta_j(t-\tau) + w_i + E_i(t), \\ q_i(\kappa) = \bar{q}_i(\kappa), \kappa \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (30)$$

定义同步误差 $v_i(t) = q_i(t) - x_i(t)$, 由主系统(1)和从系统(28), 可以将误差系统表示为下面的表达式:

$$\begin{cases} {}_0D_t^\alpha v_i(t) = -a_i q_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \theta_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \theta_j(t-\tau) + E_i(t) \\ \quad + a_i x_i(t) - \sum_{j=1}^n b_{ij} \delta_j(t) - \sum_{j=1}^n c_{ij} \delta_j(t-\tau), \\ v_i(\kappa) = \bar{q}_i(\kappa) - q_i(\kappa) = \varpi_i(\kappa), \kappa \in [-\tau, 0], \end{cases} \quad (31)$$

对 $i=1, 2, \dots, n$, $t \geq 0$, $v_i(\kappa) = \bar{q}_i(\kappa) - q_i(\kappa) = \varpi_i(\kappa)$ 是与误差系统(31)相关联的初始值。

新型钉扎控制是一种只需要通过一小部分具有小钉扎控制强度的神经元来实现整个系统的渐近同步的策略。在不失一般性的情况下, 从所有神经元中选择 ζ 个神经元, 并将钉扎控制器 $E_i(t)$ 的模型设计如下:

$$E_i(t) = \begin{cases} \bar{E}_i(t) = -\eta \operatorname{sgn}\{v_i(t)\} \times \left[\frac{\sum_{i=1}^{\zeta} |v_i(t)|}{\sum_{i=1}^{\zeta} |v_i(t)|} \right] \left(\sum_{j=1}^n |v_j(t)| \right), & i=1, 2, \dots, \zeta. \\ 0, & i=\zeta+1, \zeta+2, \dots, m. \end{cases} \quad (32)$$

其中 $\eta > 0$ 是可调节常数, $\bar{E}_i(t)$ 表示可应用于每个节点的通用控制输入, $E_i(t)$ 是相应的钉扎控制策略来

实现同步。也就是说, 有 $m-\zeta$ 个神经元被间接钉扎控制。

在某些情况下, 使用设计的钉扎控制律(32), 主系统(1)不能完全同步到从系统(28)。为解决这类情况, 给出如下准同步的概念:

定义 6 主从系统(1)和(28)被称为实现具有误差界 $\theta > 0$ 的准同步, 如果存在紧集 M , 对于任意初始条件 $\omega(\kappa) \in C([\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, 误差 $v(t) = q(t) - p(t)$, 收敛到

$$Y = \{\|v(t)\| \leq \theta\}, t \rightarrow +\infty.$$

其中 $v(t) = [v_1(t), \dots, v_n(t)]^T$, $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]^T$, $p(t) = [p_1(t), \dots, p_n(t)]^T$, $\varpi(\kappa) = [\varpi_1(\kappa), \dots, \varpi_n(\kappa)]^T$ 。

定理 3 若假设 1-3 和 4 成立, 且满足以下代数不等式:

$$\begin{aligned} \xi &= \min_{1 \leq i \leq n} \left\{ 2z_i + 2\eta_i - \varepsilon_3 - \sum_{j=1}^n \left[|b_{ij}| k_j \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} |b_{ij}| k_j \right] - \sum_{j=1}^n \varepsilon_2 |c_{ij}| k_j \right\} \\ &> \max_{1 \leq i \leq n} \left\{ \sum_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon_2} |c_{ij}| k_j \right\} = \gamma > 0. \\ \hat{\pi} &= \sum_{i=1}^n \frac{1}{2\varepsilon_3} R_i^2 > 0, R_i = \sum_{j=1}^n [|b_{ij}| + |c_{ij}|] h_j. \end{aligned}$$

则具有设计钉扎控制律(32)的主系统(1)和从系统(28)可以实现与误差界 $\sqrt{\frac{2\hat{\pi}}{\xi-\gamma}}$ 的准同步。

证明过程如下:

$$\begin{aligned} {}_0D_t^\alpha G(t) &= \sum_{i=1}^n v_i(t) {}_0D_t^\alpha v_i(t) \leq \sum_{i=1}^n v_i(t) \operatorname{sgn}(v_i(t)) {}_0D_t^\alpha v_i(t) \\ &= \sum_{i=1}^n |v_i(t)| \operatorname{sgn}(v_i(t)) \left[-a_i(q_i(t)) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \theta_j(t) + \sum_{j=1}^n c_{ij} \theta_j(t-\tau) - E_i(t) \right. \\ &\quad \left. + a_i(x_i(t)) - \sum_{j=1}^n b_{ij} \delta_j(t) - \sum_{j=1}^n c_{ij} \delta_j(t-\tau) \right] \\ &\leq -\sum_{i=1}^n z_i v_i^2(t) + \sum_{i=1}^n |v_i(t)| \left\{ \sum_{j=1}^n |b_{ij}(t)| [|k_j| |v_j(t) - p_j(t)| + h_j] \right\} \\ &\quad + \sum_{i=1}^n |v_i(t)| \left\{ \sum_{j=1}^n |c_{ij}(t)| [|k_j| |x_j(t-\tau) - p_j(t-\tau)| + h_j] \right\} \\ &\quad - \sum_{i=1}^n |v_i(t)| \operatorname{sgn}(v_i(t)) \times \left[\frac{\sum_{i=1}^n |v_i(t)|}{\sum_{i=1}^n |v_i(t)|} \left(\sum_{j=1}^n |v_j(t)| \right) \right] \\ &\leq -\sum_{i=1}^n [z_i + \eta] v_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n [|b_{ij}| + |c_{ij}|] h_j |v_i(t)| \\ &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}(t)| k_j |v_i(t)| |v_j(t)| + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}(t)| k_j |v_i(t)| |v_j(t-\tau)|. \end{aligned}$$

将(18)~(20)三个式子代入得,

$$\begin{aligned}
 {}_0D_t^\alpha G(t) &\leq -\sum_{i=1}^n [z_i + \eta] v_i^2(t) + \sum_{i=1}^n \left[\frac{\varepsilon_3}{2} v_i^2(t) + \frac{R_i^2}{2\varepsilon_3} \right] + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |b_{ij}| k_j \left[\frac{\varepsilon_1}{2} v_i^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon_1} v_j^2(t) \right] \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n |c_{ij}| k_j \left[\frac{\varepsilon_2}{2} v_i^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon_2} v_j^2(t-\tau) \right] \\
 &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \left[2z_i + 2\eta_i - \varepsilon_3 - \sum_{j=1}^n \left[|b_{ij}| k_j \varepsilon_1 + \frac{1}{\varepsilon_1} |b_{ij}| k_j \right] - \sum_{j=1}^n \varepsilon_2 |c_{ij}| k_j \right] v_i^2(t) \\
 &\quad + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\varepsilon_2} |c_{ij}| k_j v_j^2(t-\tau) + \sum_{i=1}^n \frac{R_i^2}{2\varepsilon_3} \\
 &\leq -\xi G(t) + \gamma G(t-\tau) + \hat{\pi}.
 \end{aligned}$$

根据定理 3 的条件, 得到 $\xi - \gamma > 0$ 。基于 Halanay 不等式及引理 8, 有

$$\|v(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{2\hat{\pi}}{\xi - \gamma}}, t \rightarrow +\infty$$

因此, 可以得出结论, 误差系统(21)收敛于包含原点的区域 Υ , 其中

$$\Upsilon = \left\{ v(t) : \|v(t)\|_2 \leq \sqrt{\frac{2\hat{\pi}}{\xi - \gamma}} \right\}, t \rightarrow +\infty.$$

这表明具有钉扎控制(32)的主系统(1)和从系统(28)实现了具有误差界 $\sqrt{\frac{2\hat{\pi}}{\xi - \gamma}}$ 的准同步。

4. 数值例子

本节提供了两个示例, 来说明在前几节中获得的稳定性和同步结果。

例 3 考虑如下的二维分数阶系统:

$${}_0D_t^{0.292} x(t) = -a_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^2 b_{ij} f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^2 c_{ij} f_j(x_j(t-\tau)) + w_i. \quad (33)$$

令 $i=1, 2$; $\tau=0.5$; $w_1=w_2=0.5$; $h_1=h_2=0.5$; $k_1=k_2=0.5$,

$$B = (b_{ij})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 0.3 & -1 \\ -0.7 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad C = (c_{ij})_{2 \times 2} = \begin{bmatrix} 1.5 & -0.8 \\ 0.6 & 1.2 \end{bmatrix},$$

$a_1(x) = a_2(x) = 8 + \tan f(x)$, $f_j(x) = 0.005 * \sin(x) + 0.09 * \operatorname{sgn}(x)$, 代入计算可得,

$$R_1 = \sum_{j=1}^n [|b_{ij}| + |c_{ij}|] h_j = 1.8,$$

$$R_2 = \sum_{j=1}^n [|b_{ij}| + |c_{ij}|] h_j = 1.5,$$

$$\hat{\pi} = \frac{1}{2\varepsilon_3} R_1^2 + \frac{1}{2\varepsilon_3} R_2^2 = 0.915.$$

$\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$, $\varepsilon_3 = 3$, $\gamma = \max \gamma_1 = \gamma_2 = 0.75$, $\beta = \beta_2 = 1.7$, $\beta > \gamma$ 成立, $\mu = -1.77 \sin\left(\frac{\alpha\pi}{2}\right) + 0.75 < 0$ 。因

此, CFHNN(4-33)的平衡点是全局渐近稳定的。并得到了如下图 1 的状态轨迹图。

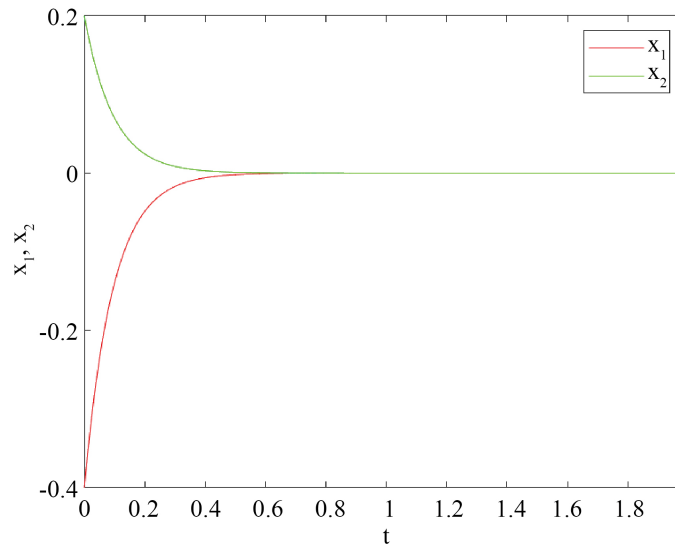


Figure 1. State trajectory diagram of system (4-33)

图 1. 系统(4-33)的状态轨迹图

例 4 考虑如下的三维分数阶系统:

$${}_0D_t^{0.998}x(t) = -a_i(x_i(t)) + \sum_{j=1}^3 b_{ij}f_j(x_j(t)) + \sum_{j=1}^3 c_{ij}f_j(x_j(t-\tau)) + w_i. \quad (34)$$

令 $i=1,2,3$; $\tau=0.5$; $w_1=w_2=w_3=0.02$; $h_1=h_2=h_3=0.2$; $k_1=k_2=k_3=0.5$,

$$B = (b_{ij})_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0.5 \\ 1 & 3.5 & 2 \\ -1.5 & -2 & 2.1 \end{bmatrix}, \quad C = (c_{ij})_{3 \times 3} = \begin{bmatrix} 1.5 & 1 & -1.35 \\ -2 & 0.5 & 2.25 \\ 2.5 & -4 & -0.5 \end{bmatrix},$$

$$x(\kappa) = (x_1(\kappa), x_2(\kappa), x_3(\kappa))^T = (-2, 3, 5)^T, \quad z_1 = z_2 = z_3 = 0.5, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 1, \quad \eta = 13, \quad \kappa \in [-2, 0),$$

相应的从系统为

$${}_0D_t^\alpha q_i(t) = -a_i q_i(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} f_j(q_j(t)) + \sum_{j=1}^n c_{ij} f_j(q_j(t-\tau)) + w_i + E_i(t)$$

与例 3 共享主系统的参数, $E_i(t)$ 是钉扎控制输入, 在两个神经元的控制下满足定理 3 的条件, 从系统初始函数为

$$q(\kappa) = (q_1(\kappa), q_2(\kappa), q_3(\kappa))^T = (-3.5, 4.5, 2)^T.$$

计算可得 $\xi = \min\{\xi_1, \xi_2, \xi_3\} = 17.028$, $\gamma = \gamma_3 = 3.5$, $\hat{\pi} = 7.101$, 所以 $\xi - \gamma > 0$ 成立, 因此, 主系统和从系统之间的同步在 $n=3$ 时, 在估计误差为 $\sqrt{\frac{2\hat{\pi}}{\xi - \gamma}} = 1.018$ 实现准同步。并得到了如图 2~4 的同步状态轨迹。

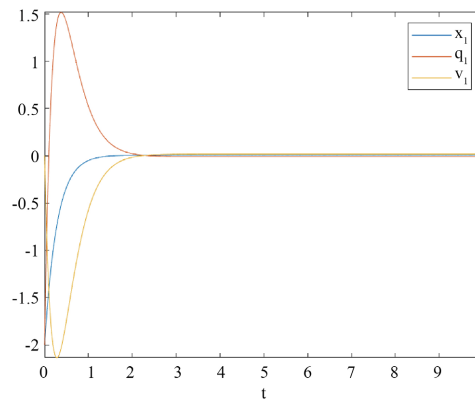


Figure 2. Under the pinning control error $v_1(t)$, the states of the synchronization trajectory are $x_1(t)$, $q_1(t)$

图 2. 在钉扎控制误差 $v_1(t)$ 下，同步轨迹的状态为 $x_1(t)$ ， $q_1(t)$

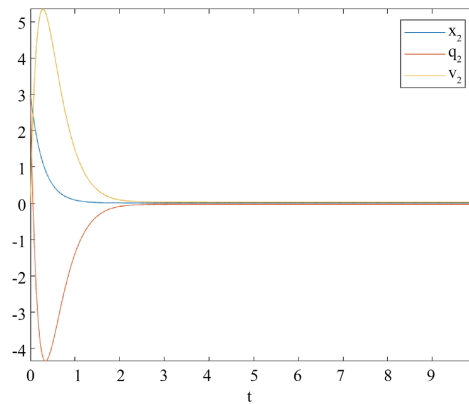


Figure 3. Under the pinning control error $v_2(t)$, the states of the synchronization trajectory are $x_2(t)$, $q_2(t)$

图 3. 在钉扎控制误差 $v_2(t)$ 下，同步轨迹的状态为 $x_2(t)$ ， $q_2(t)$

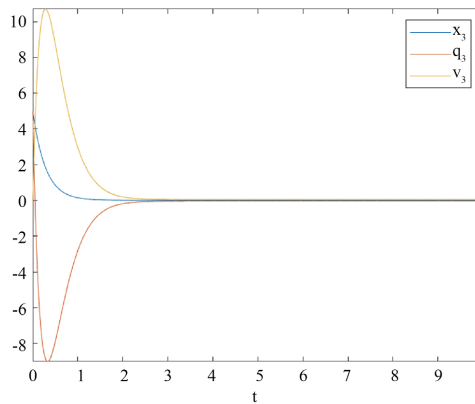


Figure 4. Under the pinning control error $v_3(t)$, the states of the synchronization trajectory are $x_3(t)$, $q_3(t)$

图 4. 在钉扎控制误差 $v_3(t)$ 下，同步轨迹的状态为 $x_3(t)$ ， $q_3(t)$

5. 小结

带有不连续激活函数的分数阶时滞 Hopfield 神经网络是一种特殊的反馈神经网络。它可以从输入信号中学习和记忆模式，并且可以从输入信号中恢复出学习的模式。它的激活函数是不连续的，这意味着可以更好地处理非线性问题。优点是可以处理复杂的非线性问题，缺点是计算量大，容易受到噪声的影响。随着计算机技术的发展，带有不连续激活函数的分数阶时滞 Hopfield 神经网络将会发挥更大的作用。它可以用来解决更复杂的问题，提高系统的性能。还可以用来提高系统的可靠性和稳定性，从而更好地满足用户的需求。

参考文献

- [1] Zhang, S., Yu, Y. and Geng, L. (2016) Stability Analysis of Fractional-Order Hopfield Neural Networks with Time-Varying External Inputs. *Neural Processing Letters*, **45**, 223-241. <https://doi.org/10.1007/s11063-016-9522-1>
- [2] Peng, X., Wu, H., Song, K. and Shi, J. (2017) Global Synchronization in Finite Time for Fractional-Order Neural Networks with Discontinuous Activations and Time Delays. *Neural Networks*, **94**, 46-54. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2017.06.011>
- [3] Hu, D., He, X. and Ju, X. (2022) A Modified Projection Neural Network with Fixed-Time Convergence. *Neurocomputing*, **489**, 90-97. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.03.023>
- [4] Ding, Z. and Shen, Y. (2016) Projective Synchronization of Nonidentical Fractional-Order Neural Networks Based on Sliding Mode Controller. *Neural Networks*, **76**, 97-105. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2016.01.006>
- [5] Zhang, F., Fei, C. and Fei, W. (2023) Stability of Stochastic Hopfield Neural Networks Driven by g-Brownian Motion with Time-Varying and Distributed Delays. *Neurocomputing*, **520**, 320-330. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2022.10.065>
- [6] Yu, H. and Wu, H. (2012) Global Robust Exponential Stability for Hopfield Neural Networks with Non-Lipschitz Activation Functions. *Journal of Mathematical Sciences*, **187**, 511-523. <https://doi.org/10.1007/s10958-012-1079-6>
- [7] Nie, X., Liu, P., Liang, J. and Cao, J. (2021) Exact Coexistence and Locally Asymptotic Stability of Multiple Equilibria for Fractional-Order Delayed Hopfield Neural Networks with Gaussian Activation Function. *Neural Networks*, **142**, 690-700. <https://doi.org/10.1016/j.neunet.2021.07.029>
- [8] Zhang, S., Yu, Y. and Wang, Q. (2016) Stability Analysis of Fractional-Order Hopfield Neural Networks with Discontinuous Activation Functions. *Neurocomputing*, **171**, 1075-1084. <https://doi.org/10.1016/j.neucom.2015.07.077>
- [9] Pratap, A., Raja, R., Cao, J., Lim, C.P. and Bagdasar, O. (2019) Stability and Pinning Synchronization Analysis of Fractional Order Delayed Cohen-Grossberg Neural Networks with Discontinuous Activations. *Applied Mathematics and Computation*, **359**, 241-260. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2019.04.062>