

基于Hodge星算子与水平 - 垂直分解的向量丛 Thom形式构造

杨 丹

重庆理工大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2025年8月2日; 录用日期: 2025年8月27日; 发布日期: 2025年9月5日

摘 要

本研究基于Hodge星算子构造给出向量丛Thom形式的另一种几何表示。针对经典Berezin积分方法需将曲率嵌入 $\Lambda^2 V$ 的过程, 我们通过保度量联络诱导的典范水平 - 垂直分解, 由曲率张量定义一个在丛空间上的曲率4-形式 R^E 。在此基础上, 引入指数映射与Hodge星算子构造Thom形式

$\alpha_1 = (2\pi)^{-n} \exp(-\|P\|^2/2) \star \exp(R^E)$, 可以证明其与Berezin积分表示一致。相较于传统方法, 该构造通过星算子的几何操作显式关联曲率张量与纤维结构, 增强了Thom类表示的几何直观性。进一步地, 在平坦向量丛情形下, 通过此公式, 可以直接给出欧拉类表达式。

关键词

Hodge星算子, Thom形式, 典范水平 - 垂直分解, Berezin积分, 平坦向量丛

Construction of Thom Forms of Vector Bundle via the Hodge Star Operator and Horizontal-Vertical Decomposition

Dan Yang

School of Mathematical Sciences, Chongqing University of Technology, Chongqing

Received: Aug. 2nd, 2025; accepted: Aug. 27th, 2025; published: Sep. 5th, 2025

Abstract

This study presents an alternative geometric representation of the Thom form for vector bundles

based on the construction of the Hodge star operator. In contrast to the classical Berezin integral method, which requires embedding the curvature into the cohomological framework, we utilize the canonical horizontal-vertical decomposition induced by a metric-preserving connection to define a curvature 4-form on the total bundle space directly from the curvature tensor. By introducing an exponential map and the Hodge star operator, we construct a Thom form TT , and it is demonstrated that this construction coincides with the Berezin integral representation. Compared to traditional approaches, our method explicitly relates the curvature tensor to the fiber structure through geometric operations involving the Hodge star operator, thereby enhancing the geometric clarity of the Thom class representation. Furthermore, in the case of flat vector bundles, this formula directly yields an explicit expression for the Euler class.

Keywords

Hodge Star Operator, Thom Form, Canonical Horizontal-Vertical Decomposition, Berezin Integral, Flat Vector Bundle

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对于一个偶数维闭流形,经典的 Chern-Gauss-Bonnet 定理建立了 Euler-Poincaré 示性数与几何曲率之间的深刻联系:该示性数可表示为欧拉形式在流形上的积分(参见[1])。此处欧拉形式的构造依赖于保度量联络的曲率张量,其本质是通过曲率张量的 Pfaffian 组合实现。值得注意的是, Pfaffian 的良定义性要求曲率矩阵具有反对称性(详见第 2 节),而这正是保度量联络所保证的核心性质。

在 Chern-Weil 理论框架下,由不同保度量联络得到的 Pfaffian 实际上对应同一欧拉类,因此,研究由不同联络引起的超度(transgression)项具有重要的几何意义。Mathai 与 Quillen 在奠基性工作[2]中,在对向量丛 Thom 形式的构造中,通过引入超对称几何与 Berezin 积分的深刻结合,开创性地建立了一种代表 Thom 类的新颖微分形式。其核心思想是将传统的闭形式表示转化为更易于计算的高斯型衰减形式。所谓 Thom 形式,是指满足以下三条件的微分形式:(i) 在向量丛上具有紧支集;(ii) 沿纤维积分等于 1;(iii) 整体闭。通过零截面拉回 Thom 形式即可给出欧拉形式。文献[3]第 1.6 节系统阐述了该构造,其中([3], (1.37))更将 Thom 形式表达为 Berezin 积分形式:

$$U = \varepsilon(N) T \left(e^{-\left(|x|^2/2 + i\nabla x + F\right)} \right)$$

此处 $T: A(V, \Lambda V) \rightarrow A(V)$ 表示 Berezin 积分算子。

值得注意的是,经典 Berezin 积分构造需将保度量联络的曲率解释为 $\Lambda^2 V$ 中的元素。本文则采用差异化处理:通过保度量联络诱导的典型水平-垂直分解,曲率形式可整体提升为全切丛上的 4-形式 R^E 。在此基础上,我们首先构造指数型微分形式 $\exp(R^E)$,继而通过 Hodge 星算子作用并配以指数衰减因子,最终得到新的 Thom 形式构造(定理 4.4)。值得强调的是,此构造与 Berezin 积分方式具有内在一致性,但 Hodge 星算子的引入显著增强了构造的几何透明性。具体而言,我们建立如下核心定理:

定理 1.1 设向量丛的 Thom 形式可表示为

$$\alpha_1 = (2\pi)^{-n} \exp\left(-\frac{\|P\|^2}{2}\right) \star \exp(R^E)$$

则该形式与 Berezin 积分构造([4], 命题 3.4)等价。

特别地, 对于平坦向量丛情形, 固定欧氏度量后存在典范保度量联络。设其联络 1-形式为 θ , 则曲率张量可简明表示为 $-\theta^2$ 。此时全空间曲率 4-形式可表示为:

$$\begin{aligned} R^E &= \frac{1}{4} R_{ijkl} \delta y^i \wedge \delta y^j \wedge dx^k \wedge dx^l \\ &= -\frac{1}{8} g^{pq} \partial_k g_{ip} \partial_l g_{qj} \delta y^i \wedge \delta y^j \wedge dx^k \wedge dx^l. \end{aligned}$$

通过上述指数-Hodge 星算子作用, Thom 形式得以显式表达。结合零截面拉回操作, 欧拉类可简单表示为:

$$\begin{aligned} \text{Pf}\left[\frac{R^E}{2\pi}\right] &= \star \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \frac{(R^E)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n n!} \frac{1}{8^n} (\det g)^{-1/2} \bigwedge_{k=1}^n (dg_{k_s k_k} \wedge dg_{l_k l_k} g^{s_k l_k}) \epsilon_{k_1 l_1 \dots k_n l_n}. \end{aligned}$$

本文的结构如下: 在第二节, 对于一个反对称线性变换, 我们给出其 Pfaffian 的定义; 在第三节, 对于一个保度量联络, 我们可以给出其典范的水平垂直分解; 在第四节中, 对于保度量的曲率张量, 我们定义从空间上的曲率 4-形式, 并通过该形式以及 Hodge 星算子给出 Thom 形式的表达式; 在第五节中, 我们给出在平坦向量丛上的一个应用。

2. 反对称线性变换的 Pfaffian

在这一节中, 对于一个反对称线性变换, 本节将回顾如何为该反对称线性变换定义 Pfaffian (详见文献[5])。

令 V 为一个维数为 $2n$ 的欧几里得向量空间, 具有内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 。令 $A \in \text{End}(V)$ 是一个反对称线性变换, 我们将 A 与二次型 $X, Y \in V \rightarrow \langle X, AY \rangle$ 进行对应。令 $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ 表示 $(V, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ 的一个正交规范基, $\{e^j\}_{j=1}^{2n}$ 表示它的对偶基。假设

$$A = A_j^i e_i \otimes e^j, \quad A_j^i = -A_i^j$$

则 A 可以与

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} A_j^i e^i \wedge e^j \in \wedge^2 V^*$$

对应起来, 其中 $e^i \wedge e^j := e^i \otimes e^j - e^j \otimes e^i$ 。事实上,

$$\mathbf{A}(e_i, e_j) = \frac{1}{2} A_j^i - \frac{1}{2} A_i^j = A_j^i = \langle e_i, A(e_j) \rangle$$

注记 2.1 如果 $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ 不是正交规范基, 度量可以表示为 $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$, 其中 $g_{ij} = g_{ji}$, 则有

$$A_i^k g_{kj} = -g_{ik} A_j^k. \text{ 因此, } \mathbf{A} = \frac{1}{2} g_{ik} A_j^k e^i \wedge e^j.$$

记 $\mathbf{A}^i$ 为 $\mathbf{A}$ 的外积幂, 即 $\mathbf{A} \wedge \dots \wedge \mathbf{A}$ 。令 $dx = \sqrt{|\det(g_{ij})|} e^1 \wedge \dots \wedge e^{2n}$ 表示 V 上的定向体积形式。则 A 的

Pfaffian 定义为:

$$\frac{\mathbf{A}^n}{n!} = \text{Pf}(A) dx \quad (2.1)$$

例 2.2 当 $n=1$ 且 $A = ae_1 \otimes e^2 - ae_2 \otimes e^1$ 时,

$$A(e_1, e_2) = (e_1, e_2) \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$$

在这种情况下, $\mathbf{A} = ae^1 \wedge e^2$ 且 $dx = e^1 \wedge e^2$, 因此 $\text{Pf}(A) = a$ 。

如果 A 可逆, 则

$$\langle A^{-1}X, Y \rangle = \langle A^{-1}X, AA^{-1}Y \rangle = -\langle AA^{-1}X, A^{-1}Y \rangle = -\langle X, A^{-1}Y \rangle$$

所以 $A^{-1} \in \text{End}(V)$ 也是反对称的。我们记 $\mathbf{A}^{-1}$ 为与 A^{-1} 对应的二次型, 且 $\mathbf{A}^{-i} := \mathbf{A}^{-1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{A}^{-1}$ 。

命题 2.3 如果 A 可逆, 则 $\text{Pf}(A)e^{-\mathbf{A}^{-1}} = *e^{\mathbf{A}}$ 。

证明: 通过选择正交规范基 $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$, 我们假设

$$A = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & a_n \\ -a_n & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

且

$$-A^{-1} = \text{diag} \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_1} \\ -\frac{1}{a_1} & 0 \end{pmatrix}, \cdots, \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{a_n} \\ -\frac{1}{a_n} & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

然后

$$\mathbf{A} = a_1 e^1 \wedge e^2 + \cdots + a_n e^{2n-1} \wedge e^{2n}$$

以及

$$-\mathbf{A}^{-1} = a_1^{-1} e^1 \wedge e^2 + \cdots + a_n^{-1} e^{2n-1} \wedge e^{2n}$$

并且 $\text{Pf}(A) = a_1 \cdots a_n$ 。于是

$$\begin{aligned} \text{Pf}(A) \frac{(-\mathbf{A}^{-1})^k}{k!} &= \frac{a_1 \cdots a_n}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k} a_{i_1}^{-1} \cdots a_{i_k}^{-1} e^{2i_1-1} \wedge e^{2i_1} \wedge \cdots \wedge e^{2i_k-1} \wedge e^{2i_k} n \\ &= \sum_{i_1 < \dots < i_k} \frac{a_1 \cdots a_n}{a_{i_1} \cdots a_{i_k}} e^{2i_1-1} \wedge e^{2i_1} \wedge \cdots \wedge e^{2i_k-1} \wedge e^{2i_k} n \\ &= * \left(\sum_{j_1 < \dots < j_k} a_{j_1} \cdots a_{j_{n-k}} e^{2j_1-1} \wedge e^{2j_1} \wedge \cdots \wedge e^{2j_{n-k}-1} \wedge e^{2j_{n-k}} \right) \\ &= * \frac{\mathbf{A}^{n-k}}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

因此, $\text{Pf}(A)e^{-\mathbf{A}^{-1}} = *e^{\mathbf{A}}$ 。

注记 2.4 从上述命题可以看出, $\text{Pf}(A)(\mathbf{A}^{-1})^k = (-1)^k \frac{k!}{(n-k)!} * \mathbf{A}^{n-k}$, 因此 A 可以通过连续性扩展到任

意的 A 。

对于任意的 $Y \in V$, 向量 $A^{-1}Y \in V$ 可以与一阶型对应:

$$Z \in V \rightarrow (-i_Y \mathbf{A}^{-1})(Z) = \langle A^{-1}Y, Z \rangle$$

实际上, 我们有

$$(-i_Y \mathbf{A}^{-1})(Z) = -\mathbf{A}^{-1}(Y, Z) = -\langle Y, A^{-1}Z \rangle = \langle A^{-1}Y, Z \rangle$$

然后, 形式

$$\text{Pf} \left[\frac{A}{2\pi} \right] i_Y \mathbf{A}^{-1} f(\mathbf{A}^{-1})$$

对于任意反对称的 $A \in \text{End}(V)$ 都是良好定义的, 其中 $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 是一个形式幂级数。

3. 水平垂直分解

在这一节中, 对于一个保度量联络, 我们可以定义一个典则的水平垂直分解。

设 M 为一个 $2n$ -维闭流形, $\pi: E \rightarrow M$ 为一个秩为 $2n$ 的向量丛。设 g 为 E 上的平滑度量, ∇^E 为 E 上的欧几里德联络。令 $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$, 其中 $g_{ij} = g_{ji}$, 且 $\nabla^E e_i = \theta_i^j e_j$ 。该联络 ∇^E 保持度量 g , 则有:

$$dg_{ij} = d\langle e_i, e_j \rangle = \langle \nabla^E e_i, e_j \rangle + \langle e_i, \nabla^E e_j \rangle = \theta_i^k g_{kj} + g_{ik} \theta_j^k$$

对于任意联络 ∇ 在 E 上, 其联络系数为 $\nabla e_i = \theta_i^j e_j$ 。由于 $\{e_i\}$ 为纤维的局部标架, 对应的纤维坐标我们记为 $\{y^i\}$, 基底流形 M 的局部坐标记为 $\{x^i\}$ 。定义 TE 的一个典范子丛 $\mathcal{V}$, 它同构于 $\pi^* E$, 并且由以下张成:

$$\mathcal{V} = \text{Span} \left\{ \frac{\partial}{\partial y^i}, 1 \leq i \leq 2n \right\} \cong \pi^* E$$

有一个 tautological 截面 $P = y^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ 是 $\mathcal{V}$ 中的一个截面。 TE 的水平子丛 $\mathcal{H}$ 由 $\nabla^{\mathcal{V}} P = 0$ 的核空间所定义,

其中 $\nabla^{\mathcal{V}}$ 是由 ∇^E 自然诱导的联络。于是有:

$$\mathcal{H} = \text{Span} \left\{ \frac{\delta}{\delta x^i} := \frac{\partial}{\partial x^i} - y^k \theta_k^j \left(\frac{\partial}{\partial x^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^j}, 1 \leq i \leq 2n \right\}$$

实际上, 通过直接检验, 有:

$$\nabla_{\frac{\delta}{\delta x^i}}^{\mathcal{V}} P = \left(dy^j + y^k \theta_k^j \right) \left(\frac{\delta}{\delta x^i} \right) \frac{\partial}{\partial y^j} = 0$$

因此,

$$TE = \mathcal{H} \oplus \mathcal{V}$$

对偶丛 T^*E 也有分解 $T^*E = \mathcal{H}^* \oplus \mathcal{V}^*$, 其中

$$\mathcal{H}^* = \text{Span} \{ dx^i, 1 \leq i \leq 2n \}, \quad \mathcal{V}^* = \text{Span} \{ \delta y^i = dy^i + y^k \theta_k^i, 1 \leq i \leq 2n \}$$

此外, 对于任意 $U_A \cap U_B \neq \emptyset$, 有:

$$\frac{\delta}{\delta x_A^i} = \frac{\partial x_B^j}{\partial x_A^i} \frac{\delta}{\delta x_B^j}, \quad \delta y_A^i = G_j^i \delta y_B^j$$

其中 (G_j^i) 表示相对于基 $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$ 的转移函数。更进一步，当作用于函数 $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ 时，得：

$$df = \frac{\delta f}{\delta x^k} dx^k + \frac{\partial f}{\partial y^i} \delta y^i$$

命题 3.1 如果 ∇ 是度量联络，则有：

$$\frac{\delta |P|^2}{\delta x^k} = 0$$

证明： 由于 $\nabla^\vee$ 是度量联络，因此：

$$\frac{\delta |P|^2}{\delta x^k} = \frac{\delta}{\delta x^k} \langle P, P \rangle = \left\langle \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}}^\vee P, P \right\rangle + \left\langle P, \nabla_{\frac{\delta}{\delta x^k}}^\vee P \right\rangle = 0$$

4. Thom 形式

在这一节中，我们将使用 $*$ 算子来表示 Thom 形式。

对于任意反对称的 $A \in \text{End}(E)$ ，它可以与总空间 E 上的一个 2-形式进行标识：

$$Y, Z \in TE \rightarrow \langle Y^\vee, AZ^\vee \rangle$$

在局部坐标下， $A = A_j^i e_i \otimes e^j$ ，则该 2-形式 $\mathbf{A}$ 给出为

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} g_{ik} A_j^k \delta y^i \wedge \delta y^j \in \wedge^2 \mathcal{V}^* \subset \wedge^2 T^*E$$

曲率 $R^E = (\nabla^E)^2 \in A^2(M, \text{End}(E))$ 给出为

$$R^E(e_i) = \nabla^E(\theta_i^k e_k) = (d\theta_i^j - \theta_i^k \wedge \theta_k^j) e_j = (d\theta_i^j + \theta_k^j \wedge \theta_i^k) e_j$$

由于 ∇^E 保持度量 g ，所以

$$\langle R^E(e_i), e_j \rangle = -\langle e_i, R^E(e_j) \rangle$$

即 R^E 是一个 2-形式，并且取值于 $\text{End}(E)$ 中的反对称元素。假设

$$R^E = \frac{1}{2} R_{jkl}^i dx^k \wedge dx^l \otimes e_i \otimes e^j$$

它可以与下面的一个 4-形式相联系

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^E &= \frac{1}{4} R_{jkl}^i g_{is} dx^k \wedge dx^l \wedge \delta y^s \wedge \delta y^j \\ &= \frac{1}{4} R_{ijkl} \delta y^i \wedge \delta y^j \wedge dx^k \wedge dx^l \in \wedge^2 \mathcal{V}^* \wedge \wedge^2 \mathcal{H}^* \subset \wedge^4 T^*E \end{aligned}$$

其中 $R_{ijkl} = g_{is} R_{jkl}^s = \left\langle R^E \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) e_j, e_i \right\rangle$ 和 $R_{jkl}^i e_i = R^E \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) e_j$ 。

然后

$$\begin{aligned} & \text{Pf} \left[\frac{R^E}{2\pi} \right] \exp \left\{ -t \left(\frac{|P|^2}{2} + (\mathbf{R}^E)^{-1} \right) \right\} \\ &= \exp \left(-t \frac{|P|^2}{2} \right) t^n (2\pi)^{-n} \text{Pf} [t^{-1} R^E] \exp \left\{ -t (\mathbf{R}^E)^{-1} \right\} \\ &= \exp \left(-\frac{t|P|^2}{2} \right) t^n (2\pi)^{-n} * \exp(t^{-1} \mathbf{R}^E) \end{aligned}$$

其中 $(\mathbf{R}^E)^{-1}$ 在形式上是 E 上一个度数为 -2 的形式，取值于 E 上的 2 -形式，最后的等式由以下引理得出。
设定

$$\alpha_t = \text{Pf} \left[\frac{R^E}{2\pi} \right] \exp \left\{ -t \left(\frac{|P|^2}{2} + (\mathbf{R}^E)^{-1} \right) \right\}$$

它是 E 上一个度数为 $2n$ 的形式。连接 ∇^E 引入了对 $\wedge^* T^* E$ 的连接，我们仍然记作 ∇^E ，然后

引理 4.1 我们有

$$d = \nabla^E + i_{R^E(P)}$$

证明：我们只需要检查 δy^j 。然后

$$d(\delta y^j) = d(dy^j + y^k \theta_k^j) = dy^k \wedge \theta_k^j + y^k d\theta_k^j$$

另一方面，我们有

$$\begin{aligned} (\nabla^E + i_{R^E(P)}) \delta y^j &= -\theta_k^j \delta y^k + y^i R_i^j \\ &= -\theta_k^j \wedge (dy^k + y^l \theta_l^k) + y^i (d\theta_i^j + \theta_k^j \wedge \theta_i^k) \\ &= dy^k \wedge \theta_k^j + y^k d\theta_k^j \\ &= d(\delta y^j) \end{aligned}$$

引理 4.2 它成立

$$d(i_P(\mathbf{R}^E)^{-1}) = 2(\mathbf{R}^E)^{-1} + |P|^2$$

证明：对于任意点 $p \in E$ ，我们假设 $g_{ij}(p) = \delta_{ij}$ ，然后

$$\begin{aligned} d(i_P(\mathbf{R}^E)^{-1}) &= (\nabla^E + i_{R^E(P)})(i_P(\mathbf{R}^E)^{-1}) \\ &= \delta y^i \otimes i_{\frac{\partial}{\partial y^j}}(\mathbf{R}^E)^{-1} + i_P \nabla^E(\mathbf{R}^E)^{-1} + i_{R^E(P)} i_P(\mathbf{R}^E)^{-1} \\ &= 2(\mathbf{R}^E)^{-1} + 0 + y^i R_i^j i_{\frac{\partial}{\partial y^j}} i_P \frac{1}{2} (R^{-1})^k_l \delta y^k \wedge \delta y^l \\ &= 2(\mathbf{R}^E)^{-1} + \frac{1}{2} y^i R_i^j (R^{-1})^k_j y^k - \frac{1}{2} y^i R_i^j (R^{-1})^j_l y^l \\ &= 2(\mathbf{R}^E)^{-1} + |P|^2 \end{aligned}$$

其中最后的等式是因为 $(R^{-1})^j_l = -(R^{-1})^l_j$ 且 $|P|^2 = \sum_i (y^i)^2$ 。

因此 $d\alpha_t = 0$ 并且

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \alpha_t &= \frac{\partial}{\partial t} \text{Pf} \left[\frac{R^E}{2\pi} \right] \exp \left\{ -\frac{td(i_P(\mathbf{R}^E)^{-1})}{2} \right\} \\ &= d \left(-\frac{1}{2} \text{Pf} \left[\frac{R^E}{2\pi} \right] i_P(\mathbf{R}^E)^{-1} \exp \left\{ -t((\mathbf{R}^E)^{-1}) \right\} \right) \end{aligned}$$

注记 4.3 若 $R^E = 0$ ，即度量联络 ∇^E 是平坦的，则

$$\alpha_t = \exp\left(-\frac{t|P|^2}{2}\right) t^n (2\pi)^{-n} \sqrt{\det(g_{ij})} \delta y^1 \wedge \cdots \wedge \delta y^{2n}$$

且沿零截面消失，故欧拉形式为零。

注意到 α_t 由下式给出：

$$\alpha_t = * \left(\left(\frac{t}{2\pi} \right)^n \exp\left(-\frac{t|P|^2}{2}\right) \exp(t^{-1} R^E) \right)$$

其中 Hodge 星算子 $*$ 定义为

$$*(\delta y^{i_1} \wedge \cdots \wedge \delta y^{i_k}) = \frac{\sqrt{\det(g_{ij})}}{(2n-k)!} g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \epsilon_{j_1 \cdots j_{2n}} \delta y^{j_{k+1}} \wedge \cdots \wedge \delta y^{j_{2n}}$$

且 $\epsilon_{j_1 \cdots j_{2n}}$ 为 Levi-Civita 符号。作用于 k -形式上时， $** = (-1)^{k(2n-k)}$ 。

定理 4.4 Thom 形式

$$\alpha_1 = (2\pi)^{-n} \exp\left(-\frac{|P|^2}{2}\right) * \exp(R^E)$$

等价于用 Berezin 积分给出的定义，见([4]，命题 3.4)。

证明：回顾 Thom 形式可通过 Berezin 积分表示为

$$U = (-1)^{2n(2n+1)/2} \int^B e^{-\frac{|P|^2}{2} - \nabla P + p^* R^E}$$

其中 $\int^B$ 表示 Berezin 积分，且 $p^* R^E$ 通过下式与 $\Omega^2(M, \Lambda^2(p^* E))$ 等同：

$$A \in \mathfrak{so}(E) \mapsto \sum_{i < j} \langle A e_i, e_j \rangle e_i \wedge e_j = - \sum_{i < j} \langle e_i, A e_j \rangle e_i \wedge e_j$$

此对应与我们的符号约定差一负号。因此

$$U = (-1)^n \int^B e^{-\frac{|P|^2}{2} - \nabla P - R^E}$$

由于 $\nabla P = \delta y^i \wedge e_i$ ，故

$$\begin{aligned} & (-1)^n \int^B \exp(-\nabla P) \wedge (e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n} (-1)^k) \\ &= (-1)^n \int^B \prod_{i=1}^{2n} (1 - \delta y^i \wedge e_i) \wedge (e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2n} (-1)^k) \\ &= (-1)^{n+k} (-1)^{2n-2k} (-1)^{(2n-2k-1)(2n-2k)/2} \delta y^{2k+1} \wedge \cdots \wedge \delta y^{2n} \cdot \int^B e_{2k+1} \wedge \cdots \wedge e_{2n} \wedge e_1 \wedge \cdots \wedge e_{2k} \\ &= (-1)^{n+k} (-1)^{2n-2k} (-1)^{(2n-2k-1)(2n-2k)/2} (-1)^{(2n-2k)2k} \delta y^{2k+1} \wedge \cdots \wedge \delta y^{2n} \\ &= \delta y^{k+1} \wedge \cdots \wedge \delta y^{2n} = *(\delta y^1 \wedge \cdots \wedge \delta y^{2n}) \end{aligned}$$

5. 平坦向量丛上的欧拉类

在这一节中，对于平坦向量丛，我们定义一个典范的保度量联络，以及使用 $*$ 算子给出欧拉形式的表达式。

我们假设 E 是一个秩为 $2n$ 的平坦向量丛, 即存在局部平展标架 $\{e_i\}_{i=1}^{2n}$, 使得在 $U_A \cap U_B (\neq \emptyset)$ 上有 $(e_i)_A = G_i^j (e_j)_B$, 其中 (G_i^j) 是局部常值矩阵。对于任意度量 $g = g_{ij} e^i \otimes e^j$, 存在自然的度量联络

$$\nabla^E = d + \theta, \quad \theta_i^j = \frac{1}{2} g^{kj} (dg_{ik})$$

其曲率为

$$R^E(e_i) = R_i^j e_j = (d\theta_i^j + \theta_k^j \wedge \theta_i^k) e_j = \left(\frac{1}{4} dg^{jk} \wedge dg_{ki} \right) e_j$$

因此

$$R_{ijkl} = g_{is} R_j^s \left(\frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l} \right) = -\frac{1}{4} g^{pq} \partial_k g_{ip} \partial_l g_{qj} + \frac{1}{4} g^{pq} \partial_l g_{ip} \partial_k g_{qj}$$

实际上,

$$R^E = d\theta + \theta \wedge \theta = -\theta \wedge \theta = -\theta^2$$

其中 $(\theta^2)_i^j = \theta_k^j \wedge \theta_i^k$ 。于是与之相关的 4-形式为

$$\begin{aligned} R^E &= \frac{1}{4} R_{ijkl} \delta y^i \wedge \delta y^j \wedge dx^k \wedge dx^l \\ &= -\frac{1}{8} g^{pq} \partial_k g_{ip} \partial_l g_{qj} \delta y^i \wedge \delta y^j \wedge dx^k \wedge dx^l \end{aligned}$$

欧拉类可表示为

$$\begin{aligned} \text{Pf} \left[\frac{R^E}{2\pi} \right] &= * \left(\frac{1}{(2\pi)^n} \frac{(R^E)^n}{n!} \right) \\ &= \frac{(-1)^n}{(2\pi)^n} \frac{1}{n!} (\det g)^{-1/2} (dg_{k_1 s_1} \wedge dg_{l_1 t_1} g^{s_1 t_1}) \wedge \cdots \wedge (dg_{k_n s_n} \wedge dg_{l_n t_n} g^{s_n t_n}) \epsilon_{k_1 l_1 \cdots k_n t_n} \end{aligned}$$

注记 5.1 考虑 $n=1$ 的情形, 此时

$$\begin{aligned} \text{Pf} \left[\frac{R^E}{2\pi} \right] &= * \left(\frac{R^E}{2\pi} \right) \\ &= * \left(\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{4} R_{ijkl} \delta y^i \wedge \delta y^j \wedge dx^k \wedge dx^l \right) \\ &= \frac{1}{8\pi} (\det g)^{-1/2} R_{ijkl} \epsilon_{ij} dx^k \wedge dx^l \end{aligned}$$

此时 Thom 形式为

$$\alpha_t = \frac{1}{2\pi} \exp \left(-\frac{t \|P\|^2}{2} \right) \left(t \sqrt{\det g} \delta y^1 \wedge \delta y^2 + \frac{1}{4} (\det g)^{-1/2} R_{ijkl} \epsilon_{ij} dx^k \wedge dx^l \right)$$

综上所述, 本文利用 Hodge 星算子提供了 Thom 形式的另一种几何构造方法, 与传统的 Berezin 积分方法等价但更直观, 并在平坦丛情形下直接导出欧拉类公式。

参考文献

- [1] Chern, S. (1944) A Simple Intrinsic Proof of the Gauss-Bonnet Formula for Closed Riemannian Manifolds. *The Annals of Mathematics*, **45**, 747-752. <https://doi.org/10.2307/1969302>
- [2] Mathai, V. and Quillen, D. (1986) Superconnections, Thom Classes, and Equivariant Differential Forms. *Topology*, **25**, 85-110. [https://doi.org/10.1016/0040-9383\(86\)90007-8](https://doi.org/10.1016/0040-9383(86)90007-8)
- [3] Berline, N., Getzler, E. and Vergne, M. (2004) Introduction. In: *Heat Kernels and Dirac Operators*, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, 1-12. https://doi.org/10.1007/978-3-642-58088-8_1
- [4] Zhang, W. (2001). Lectures on Chern-Weil Theory and Witten Deformations. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., River Edge, 132. <https://doi.org/10.1142/9789812386588>
- [5] Bismut, J. and Cheeger, J. (1992) Transgressed Euler Classes of $SL(2n, \mathbb{Z})$ Vector Bundles, Adiabatic Limits of Eta Invariants and Special Values of L-Functions *Annales scientifiques de l'École normale supérieure*, **25**, 335-391. <https://doi.org/10.24033/asens.1653>