

关于M-群的注记

张洁琳¹, 高玉婷¹, 陈晓友^{1*}, 陈科委²

¹河南工业大学数学与统计学院, 河南 郑州

²河南工业大学土木建筑学院, 河南 郑州

收稿日期: 2025年8月18日; 录用日期: 2025年10月29日; 发布日期: 2025年11月21日

摘 要

若有限群 G 的每个不可约(复)特征标均可由子群的线性特征标诱导得到, 则 G 称为M-群。M-群是有限群表示论中重要的研究课题。Huppert证明了, 设 G 有正规可解子群 N 且 G/N 为超可解群, 若 N 的Sylow子群是交换的, 则 G 是M-群。本文通过对确定阶数的群进行讨论, 利用Huppert定理证明了2024阶群与1892阶群均是M-群。

关键词

M-群, 可解群, 超可解, Sylow子群

Notes on M-Groups

Jielin Zhang¹, Yuting Gao¹, Xiaoyou Chen^{1*}, Kewei Chen²

¹School of Mathematics and Statistics, Henan University of Technology, Zhengzhou Henan

²College of Civil Engineering and Architecture, Henan University of Technology, Zhengzhou Henan

Received: August 18, 2025; accepted: October 29, 2025; published: November 21, 2025

Abstract

If every irreducible (complex) character of a finite group G can be induced by a linear character of some subgroup, then G is called an M-group, which is an important topic in representation theory of finite groups. Huppert proved that if G has a normal solvable group N with abelian Sylow subgroups such that G/N is supersolvable, then G is an M-group. Groups of determined order are studied in this paper and it is proved that all groups with order 2024 or order 1892 are M-groups by Huppert's theorem.

*通讯作者。

文章引用: 张洁琳, 高玉婷, 陈晓友, 陈科委. 关于 M-群的注记[J]. 理论数学, 2025, 15(11): 239-243.

DOI: 10.12677/pm.2025.1511285

Keywords

M-Group, Solvable Group, Supersolvability, Sylow Subgroup

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 χ 是有限群 G 的一个特征标, 若存在 H 的线性特征标 λ , 使得 $\chi = \lambda^G$ (即 χ 可从子群的线性特征标诱导得到), 其中 H 为 G 的子群, 则称 χ 是单项特征标, 也称为 M-特征标。若 G 的每个不可约(复)特征标均可由子群的线性特征标诱导得到, 则 G 称为 M-群。M-群是有限群表示论中重要的研究课题。由 Taketa 定理[1], 推论 5.13 可知, M-群均是可解的。

Dornhoff [2]证明了 M-群的每个正规 Hall 子群仍为 M-群, 并提出了两个著名猜想:

- 1) M-群的 Hall 子群仍为 M-群。
- 2) M-群的正规子群仍为 M-群。

2005 年, Fukushima 找到反例否定了猜想 1), 见[3]。关于猜想 2), 1973 年 Dade 在[4]中构造了一个反例, 素数 2 在其中起了关键作用, 这个反例中的 M-群及正规子群均为偶数阶群。Dade 称自己找不到关于奇数阶群的反例。于是猜想 2)中的 M-群被进一步假定为奇数阶, 目前已成为 M-群中的一个重要猜想。在此方向上, Loukaki 在其博士论文[5]中证明了: 若 M-群 G 的阶为 $p^a q^b$, 其中 p, q 为两个奇素数, 则 G 的每个正规子群仍为 M-群。Loukaki 的结果很复杂, 2006 年 Lewis 在[6]中给出了 Loukaki 定理的一个简化证明, 但在结果上只做了一点改进, 由此可见 M-群研究的困难与复杂。国内著名群表示论专家靳平与徐茂智在[7]中构造了一类新的可解群, 使得其中的每个成员均不能同构于 M-群的正规子群。

研究确定阶数的群的结构与性质已成为众多代数研究者关注的重要课题。2019 年, 陈松良、石昌梅等在[8]中证明了 168 阶群共有 57 个互不同构的类型。2021 年, 陈松良、石昌梅等在[9]中又证明了 120 阶群共有 47 个互不同构的类型。2021 年, 李德乐和曹慧芹在[10]中利用 Sylow 定理对 40 阶群和 56 阶群进行了完全分类, 构造了 56 阶群的 13 种同构类型。

因为幂零群是 M-群, 而 M-群是可解的, 因此 M-群介于幂零群与可解群之间。本文考虑确定阶数的群与 M-群之间的关系, 特别地, 证明了 2024 阶群与 1892 阶群均是 M-群。

2. 预备知识

在给出主要结果之前, 本文先列出一些重要结论。

引理 2.1 (Sylow 定理) [11]设 G 是有限群, p 是一个素数, $\text{Syl}_p(G)$ 是 G 的 Sylow p -子群的集合, 则 $n_p(G) = |G : N_G(S)| \equiv 1 \pmod{p}$, 其中 $n_p(G) = |\text{Syl}_p(G)|$ 且 $S \in \text{Syl}_p(G)$ 。若 $S, T \in \text{Syl}_p(G)$, 则存在 $g \in G$, 使得 $T = S^g$ (即 G 的任意两个 Sylow 子群之间是共轭的)。

引理 2.2 [11]设 G 是一个有限群, 那么以下三条是等价的:

- (1) G 是幂零的。
- (2) G 的每个非平凡的同态像都有一个非平凡中心。
- (3) G 作为其上中心列的一员出现。

引理 2.3 [1]设 G 是 M-群, $1 = f_1 < f_2 < \dots < f_k$ 是 G 的不可约特征标不同的次数, 若 $\chi \in \text{Irr}(G)$ 且

$\chi(1)=f_i$, 则 $G^{(i)} \subseteq \ker \chi$, 其中 $G^{(i)}$ 表示 G 的导群链的第 i 项。由此可得, 若 G 是 M-群, 则 G 是可解的。

接下来, 本文介绍 Huppert 定理, 它将在主要结果的证明中起到非常重要的作用。

引理 2.4 (Huppert 定理) [12] 设 G 有正规可解子群 N 且 G/N 为超可解群, 若 N 的 Sylow 子群是交换的, 则 G 是 M-群。

注: N 的可解性不能取消。例如, A_5 的 Sylow 子群均交换, 但 A_5 不是可解的, S_5/A_5 是超可解的, 但 S_5 不是 M-群。

取 $N=1$, 则可得超可解均为 M-群。由引理 2.2 知, 幂零群为超可解群, 从而幂零群均为 M-群。因此, M-群是介于幂零群与可解群之间的一类群。

3. 主要结果

本文首先考虑群 G 的阶有两个素因子的情形。

命题 3.1 若群 G 的阶为 p^2q^a 或 pq^a , 其中 p, q 素数, $a \leq 2$ 是正整数, 则 G 为 M-群。

证明 因为素数幂阶群为幂零群, 所以当素数 p, q 相同时群 G 是 M-群。注意到, 阶为 q^a 的群必交换, 其中正整数 $a \leq 2$ 。因而, 当群 G 的阶为 p^2q^a 或 pq^a 时, G 的 Sylow 子群均交换。由引理 2.4 知, G 是 M-群。证明完成。

在命题 3.1 中, a 换为任意正整数时, 结论未必成立。例如, 阶为 24 的 $SL(2,3)$ 不是 M-群。

接下来考虑群 G 的阶有三个素因子的情形。

命题 3.2 设群 G 的阶为 $p^a q^b r^c$, 其中 p, q, r 素数, a, b, c 是正整数, $c \leq 2$ 。若 p, q 不整除 $kr+1$, p 不整除 $lq+1$, k, l 是任意非负整数, 则 G 是 M-群。

证明 记

$$|\text{Syl}_r(G)| = n_r(G) = n_r,$$

其中 $\text{Syl}_r(G)$ 是群 G 的 Sylow r -子群构成的集合。由引理 2.1 知

$$n_r \equiv 1 \pmod{r} \text{ 且 } n_r \mid |G|$$

因此 n_r 与 r 互素, 并迫使 $n_r \mid p^a q^b$ 。又因 p, q 不整除 $kr+1$, 故 $n_r=1$ 。从而, $|\text{Syl}_r(G)|=1$, 即 G 只有一个 Sylow r -子群, 记为 R 。由引理 2.1 知, 对任意的 $g \in G$

$$R^g = R.$$

因此 $R \triangleleft G$ 。并且注意到, R 为交换群。

接下来, 考虑商群 $H = G/R$, 从而 $|H| = p^a q^b$ 。设 $|\text{Syl}_q(H)| = n_q(H)$, 由引理 2.1 知

$$n_q(H) \equiv 1 \pmod{q} \text{ 且 } n_q(H) \mid p^a.$$

又因 p 不整除 $lq+1$, 故 $n_q(H)=1$ 。因此, H 有唯一的 Sylow q -子群。于是, H 为超可解群。

由引理 2.4 知, G 是 M-群。证明完成。

由因数分解得, $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$ 。注意到, 2024 阶群的 Sylow 23-子群为正规子群。而且, 88 阶群在同构意义下有 12 个, 分别是 $C_{11} \rtimes C_8$, C_{88} , $C_{11} \rtimes Q_8$, $C_{11} \times D_{22}$, D_{88} , $C_2 \times (C_{11} \rtimes C_4)$, $(C_{22} \times C_2) \rtimes C_2$, $C_{44} \times C_2$, $C_{11} \times D_8$, $C_{11} \times Q_8$, $C_2 \times C_2 \times D_{22}$, $C_{22} \times C_2 \times C_2$, 它们均是超可解的。从而 2024 阶群 G 满足命题 3.2 中的条件, 因此可推得如下结论。

推论 3.3 2024 阶群是 M-群。

接下来, 本文讨论不满足命题 3.2 条件的 $1892 = 2^2 \cdot 11 \cdot 43$ 阶群。

推论 3.4 1892 阶群是 M-群。

证明 记

$$|\text{Syl}_{43}(G)| = n_{43},$$

其中 $\text{Syl}_{43}(G)$ 是群 G 的 Sylow 43-子群构成的集合。由引理 2.1 知

$$n_{43} \equiv 1 \pmod{43} \text{ 且 } n_{43} \mid |G|$$

因此 $n_{43} = 1$ 或 44。

若 $n_{43} = 1$ ，则 $|\text{Syl}_{43}(G)| = 1$ ，即 G 只有一个 Sylow 43-子群，记为 R 。考虑商群 $H = G/R$ 。注意到， $|H| = 44$ 。于是， H 为超可解群。由引理 2.4 知， G 是 M-群。

若 $n_{43} = 44$ ，则 G 有 44 个 Sylow 43-子群，且任意两个不同的 Sylow 43-子群的交为 1。因此， G 中除了阶为 43 的元素外还有 $1892 - 44 \cdot 42 = 44$ 个元素，它们恰好组成 G 的一个 44 阶子群 N 。注意到， N 的 Sylow 子群必交换。由引理 2.4 知， G 是 M-群。证明完成。

事实上，所有的 1892 阶群的 Sylow 11-子群均为正规子群，即 1892 阶群只有一个 Sylow 11-子群。从而由上面的证明方法可得出 1892 阶群是 M-群。

本文接下来讨论 $2552 = 2^3 \cdot 11 \cdot 29$ 阶群。

推论 3.4 2552 阶群未必是 M-群。

证明 记

$$|\text{Syl}_{29}(G)| = n_{29}(G) = n_{29},$$

其中 $\text{Syl}_{29}(G)$ 是群 G 的 Sylow 29-子群构成的集合。由引理 2.1 知

$$n_{29} \equiv 1 \pmod{29} \text{ 且 } n_{29} \mid |G|$$

因此 $n_{29} = 1$ 或 88。

若 $n_{29} = 1$ ，则 G 有唯一的 Sylow 29-子群，记为 R 。考虑商群 $H = G/R$ 。注意到， $|H| = 88$ 。于是，由推论 3.3 上面的分析可知， H 为超可解群。由引理 2.4 知， G 是 M-群。

若 $n_{29} = 88$ ，则 G 有 88 个 Sylow 29-子群，且任意两个不同的 Sylow 29-子群的交为 1。因此， G 有唯一的 88 阶子群 N 。因为 N 的 Sylow 2-子群未必交换，所以只能得到 G 为可解群。证明完成。

基金项目

作者感谢河南工业大学项目(lxycxxy202424, 2024PYJH019, JXYJ2025061)，河南省自然科学面上项目(252300421983)，高校大学数学教学研究与发展中心项目(CMC20240610)以及教学创新项目(2023SJGLX173Y)。

参考文献

- [1] Isaacs, I.M. (1976) Character Theory of Finite Groups. Academic Press.
- [2] Dornhoff, L. (1967) M-Groups and 2-Groups. *Mathematische Zeitschrift*, **100**, 226-256.
<https://doi.org/10.1007/BF01109806>
- [3] Fukushima, H. (2005) Hall Subgroups of M-Groups Need Not Be M-Groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **133**, 671-675. <https://doi.org/10.1090/S0002-9939-04-07645-2>
- [4] Dade, E.C. (1973) Normal Subgroups of M-Groups Need Not Be M-Groups. *Mathematische Zeitschrift*, **133**, 313-317.
<https://doi.org/10.1007/BF01177871>
- [5] Loukaki, M. (2001) Normal Subgroups of Odd Order Monomial $p^a q^b$ -Groups. Ph D Dissertation, University of Illinois at Urbana-Champaign.

-
- [6] Lewis, M.L. (2006) M-Groups of Order $p^a q^b$: A Theorem of Loukaki. *Journal of Algebra and Its Applications*, **5**, 465-503. <https://doi.org/10.1142/S0219498806001843>
 - [7] 靳平, 徐茂智. M-群的正规子群[J]. 数学的实践与认识, 2011, 41(10): 244-247.
 - [8] 陈松良, 石昌梅, 等. 168 阶群的完全分类[J]. 贵州师范学院学报, 2019, 35(9): 1-6.
 - [9] 陈松良, 石昌梅, 等. 120 阶群的完全分类[J]. 唐山师范学院学报, 2021, 43(6): 3-6+74.
 - [10] 李德乐, 曹慧芹. 40 阶群和 56 阶群的同构分类[J]. 厦门大学学报(自然科学版), 2021, 60(1): 58-62.
 - [11] Isaacs, I.M. (2003) *Algebra-A Graduate Course*. Mechanical Industry Press.
 - [12] Isaacs, I.M. (2018) *Characters of Solvable Groups*. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/gsm/189>