Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(9), 107-114
Published Online September 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.159238

随机幂级数在收敛区间端点处的行为研究

古瑜婷，杨书宸，于伯阳，吴 勇，周礼佳，谭啸峰

中国矿业大学(北京)理学院，北京

收稿日期：2025年8月9日；录用日期：2025年9月8日；发布日期：2025年9月16日

摘 要

本文主要研究实数域中如下形式的随机幂级数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$，其中系数 a_n 相互独立且仅在有限集 $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$ 中取值。设 a_n 取 d_i 的概率为 $P_i(i=1,2,\cdots,k)$ 且满足 $\sum_{i=1}^{k}P_i=1$ 及 $P_1\le P_2$。我们证明当系数 a_n 的期望非零时，幂级数随着 $x\to1^-$ 时几乎必然趋向 $+\infty$ 或 $-\infty$。

关键词

随机幂级数，非均匀分布，收敛区间端点，极限行为

Limit Behavior at Convergence Endpoints for Random Power Series

Yuting Gu, Shuchen Yang, Boyang Yu, Yong Wu, Lijia Zhou, Xiaofeng Tan

School of Science, China University of Mining and Technology (Beijing), Beijing

Received: Aug. 9th, 2025; accepted: Sep. 8th, 2025; published: Sep. 16th, 2025

Abstract

This paper primarily studies random power series of the following form in the real number field $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$, where the coefficients a_n are mutually independent and take values only in a finite set $D=\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$. Suppose the probability that a_n takes the value d_i is $P_i(i=1,2,\cdots,k)$ satisfying $\sum_{i=1}^{k}P_i=1$ and $P_1\le P_2$. It is proved that when the expectation of the coefficients a_n is non-zero, the power series almost surely tends to $+\infty$ or $-\infty$ as $x\to1^-$, deterministically depending

文章引用：古瑜婷，杨书宸，于伯阳，吴勇，周礼佳，谭啸峰．随机幂级数在收敛区间端点处的行为研究[J]．理论数学，2025, 15(9): 107-114. DOI: 10.12677/pm.2025.159238

on the sign of the expectation.

Keywords

Random Power Series, Non-Identical Distributions, Convergence Interval Endpoint, Limit Behavior

1. 引言

随机幂级数的边界行为研究源于复分析中的经典问题。考虑复数域$\mathbb{C}$上的幂级数

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n z^n,$$

其中系数ξ_n为相互独立的复随机变量，$z\in\mathbb{C}$。当ξ_n是单位圆上均匀分布的独立随机变量时，Steinhaus [1]证明了单位圆周$|z|=1$几乎必然是该级数的自然边界，即$f(z)$无法解析延拓至单位圆外。当ξ_n是Rademacher 随机变量时，即ξ_n取值±1 的概率均为 1/2，Paley 与 Zygmund [2]证明了上述结论同样成立。2011 年，Breuer 与 Simon [3]将上述结论推广至更一般的随机系数模型，奠定了复随机级数边界理论的基础。

本文主要关注实数域$\mathbb{R}$上的随机幂级数在收敛区间端点处的极限行为。对每个$n\in\mathbb{N}$，定义概率空间$(D,\mathcal{A}_n,P_n)$，其中D是一个给定的集合，$\mathcal{A}_n$是D上的离散拓扑，P_n是$(D,\mathcal{A}_n)$上的概率测度。对每个$D'\subseteq D$，有

$$P_n(D')=\#D'/\#D=\#D'/k,$$

其中#表示集合的基。更多概率论知识可参考文献[4]。

设$(\Omega,\mathcal{A},P)$是一个乘积概率空间，其中$\Omega=\prod_{n\in\mathbb{N}}D$，$\mathcal{A}$是$\Omega$上的 Borel 集，$P=\prod_{n\in\mathbb{N}}P_n$。若事件$A$发生的概率$P(A)=1$，则称事件$A$几乎必然发生(*a.s.*)。任取$\Omega$中的元素$(a_n)$，记$a_n$为其第$n$个坐标。令$D=\{d_1,d_2,\cdots,d_k\}$是由实数构成的一个有限集合，这里$k\ge 2$。考虑如下幂级数

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n \tag{1}$$

其中系数a_n相互独立，$a_n\in D$且a_n取d_i的概率为$P_i\ (i=1,2,\cdots,k)$，$\sum_{i=1}^{k}P_i=1$，$x\in\mathbb{R}$。

显然，对几乎所有的系数a_n，函数$f(x)$的收敛半径都是 1。本文主要讨论当$x\to1^-$时，幂级数的性质。特别地，当系数以均匀分布方式从集合D中取值时，Maga 等人证明了下面结果。

定理 A [5] 设$f(x)$的定义如(1)式，并且系数a_n取$d_i\ (i=1,2,\cdots,k)$的概率均为$1/k$。若$\sum_{d\in D}d>0$，则

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=\infty\quad a.s.;$$

若$\sum_{d\in D}d<0$，则

$$\lim_{x\to1^-}f(x)=-\infty\quad a.s.;$$

若 $\sum_{d\in D} d = 0$，则

$$\liminf_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \text{ 且 } \limsup_{x\to 1^-} f(x) = \infty \quad a.s..$$

对于系数服从非均匀分布的情况，Maga 等人在其研究中指出：当系数满足一定条件时，定理 A 中的部分结果也是成立的。本文基于这一问题，对 Maga 等人的证明方法进行创新性改进，最终得到如下结果：

定理 1 设 $f(x)$ 的定义如(1)式，并且系数 a_n 取 $d_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 的概率 P_i 满足 $P_1 \le P_2$。则必有以下之一成立：

(i) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty \quad a.s.$

(ii) $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad a.s.$

(iii) $\liminf_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ 且 $\limsup_{x\to 1^-} f(x) = \infty \quad a.s.$

定理 2 设 $f(x)$ 的定义如(1)式，并且系数 a_n 取 $d_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 的概率 P_i 满足 $P_1 \le P_2$。若 $\sum_{d\in D} d > 0$，则

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = \infty \quad a.s.;$$

若 $\sum_{d\in D} d < 0$，则

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty \quad a.s..$$

值得注意的是，如果将定理 1 和定理 2 中的条件“$P_1 \le P_2$”去掉，则结论不成立，因为定理的证明需要用到引理 3，而引理 3 仅在“$P_1 \le P_2$”这一条件下成立。

2. 主要引理

为证明主要结论，本节引入若干关键引理。

引理 1 [6] 在实轴 $\mathbb{R}$ 上，任何关于非平凡平移不变的有限 Borel 测度必是平凡测度(即恒为零)。

下述引理均在系数服从非均匀分布(即 $P(a_n = d_i) = P_i \quad (i=1,2,\cdots,k)$ 且 $P_1 \le P_2$)的框架下讨论。对任意的 $N\in\mathbb{N}$，定义在 D^N 上两个子集之间的映射 g_N^* 满足下列条件：

(1) g_N^* 是其定义域到值域间的双射；

(2) 若 $g_N^*(a_1,\cdots,a_N) = (b_1,\cdots,b_N)$，则

$$\sum_{n=1}^{N} b_n = (d_2 - d_1) + \sum_{n=1}^{N} a_n,$$

其中 $a_n \in D$ 且 a_n 取 $d_i\ (i=1,2,\cdots,k)$ 的概率 P_i 满足 $P_1 \le P_2$。

一般情况下，g_N^* 不能定义在整个 D^N 上，下述引理表明 g_N^* 可以定义在一个相当大的子集上。

引理 2 g_N^* 可定义在一个定义域大小为

$$\# dom\, g_N^* = k^N (1 - o(1))$$

的集合上，当 $N\to\infty$ 时。其中 $dom\, g_N^*$ 表示 g_N^* 的定义域且 $k = \# D$。

证明：任取整数 l 满足 $0 \le l \le N$，及整数 $c_1, c_2, \cdots, c_l$ 满足 $1 \le c_1 < \cdots < c_l \le N$。令

$$C = \{c_1, c_2, \cdots, c_l\}，\quad C' = \{1,2,\cdots,N\} \setminus \{c_1, c_2, \cdots, c_l\}$$

以及映射

$$s:C'\to D\setminus\{d_1,d_2\}.$$

令

$$D_{l,C,s}^N=\left\{(a_1,\cdots,a_N)\in D^N:\forall c_j\in C\text{ 有 }a_{c_j}\in\{d_1,d_2\}\text{ 且 }\forall c'\in C'\text{ 有 }a_{c'}=s(c')\right\}.$$

由于 $D_{l,C,s}^N$ 在 l 个位置上有两种选择(d_1 或 d_2)，其他位置固定，所以 $D_{l,C,s}^N$ 的大小为 $\#D_{l,C,s}^N=2^l$ 。显然有

$$D^N=\bigcup_l D_{l,C,s}^N.$$

进一步，对每个 l ，将 $D_{l,C,s}^N$ 按 d_1 的数量作如下分解：

$$D_{l,C,s}^N=\bigcup_{l_1=0}^{l}D_{l,l_1,C,s}^N,$$

其中 $D_{l,l_1,C,s}^N$ 是 $D_{l,C,s}^N$ 的子集，它包含恰好有 l_1 个 d_1 (从而有 $l-l_1$ 个 d_2)的序列，其大小为 $\#D_{l,l_1,C,s}^N=\binom{l}{l_1}$。

对每个固定的 l,C,s ，映射 g_N^* 可以定义在 $D_{l,C,s}^N$ 的一个子集上，并将含有 l_1 个 d_1 的序列映射为含有 l_1-1 个 d_1 (即减少一个 d_1 ，增加一个 d_2)的序列。为保证 g_N^* 是良好定义的，定义域的大小为

$$\#D_{l,C,s}^N-\sum_{l_1=0}^{l}\max\left\{0,\#D_{l,l_1,C,s}^N-\#D_{l,l_1-1,C,s}^N\right\}.$$

我们断言：当 $l\to\infty$ 时，

$$\sum_{l_1=0}^{l}\max\left\{0,\#D_{l,l_1,C,s}^N-\#D_{l,l_1-1,C,s}^N\right\}=o\left(2^l\right).$$

这是因为

$$\sum_{l_1=0}^{l}\max\left\{0,\#D_{l,l_1,C,s}^N-\#D_{l,l_1-1,C,s}^N\right\}=\sum_{l_1=0}^{l}\max\left\{0,\binom{l}{l_1}-\binom{l}{l_1-1}\right\}.$$

由于当 $l_1<\frac{l+1}{2}$ 时，

$$\binom{l}{l_1}-\binom{l}{l_1-1}>0.$$

当 $l_1>\frac{l+1}{2}$ 时，

$$\binom{l}{l_1}-\binom{l}{l_1-1}<0.$$

当 $l_1=\frac{l+1}{2}$ 且 l 为奇数时，

$$\binom{l}{l_1}-\binom{l}{l_1-1}=0.$$

因此，仅当 $l_1\le\left[\frac{l}{2}\right]$ 时， $\max\left\{0,\binom{l}{l_1}-\binom{l}{l_1-1}\right\}$ 非零且等于 $\binom{l}{l_1}-\binom{l}{l_1-1}$ ，这里 $\left[\frac{l}{2}\right]$ 表示不超过 $\frac{l}{2}$ 的最大整数。所以

$$\sum_{l_1=0}^{l}\max\left\{0,\#D_{l,l_1,C,s}^N-\#D_{l,(l_1-1),C,s}^N\right\}=\sum_{l_1=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}\left\{\binom{l}{l_1}-\binom{l}{l_1-1}\right\}=\binom{l}{\left[\frac{l}{2}\right]}.$$

下面根据 l 的奇偶性分情况计算 $\binom{l}{\left[\frac{l}{2}\right]}$。

情形 1. l 为偶数，不妨设 $l=2n$。此时 $\left[\frac{l}{2}\right]=n$，所以

$$\binom{l}{\left[\frac{l}{2}\right]}=\binom{2n}{n}=\frac{(2n)!}{n^2}.$$

由 stirling 公式可知，当 $n\to\infty$ 时，

$$(2n)!\sim\sqrt{4\pi n}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}=\sqrt{4\pi n}\cdot 2^{2n}\cdot n^{2n}\mathrm{e}^{-2n},$$

$$(n!)^2\sim\left(\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\right)^2=2\pi n\cdot n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}.$$

所以

$$\binom{l}{\left[\frac{l}{2}\right]}\sim\frac{\sqrt{4\pi n}\cdot 2^{2n}\cdot n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}{2\pi n\cdot n^{2n}\mathrm{e}^{-2n}}=\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}=2^l\sqrt{\frac{2}{\pi n}}\quad(l\to\infty).$$

情形 2. l 为奇数，不妨设 $l=2n+1$。此时 $\left[\frac{l}{2}\right]=n$，所以

$$\binom{l}{\left[\frac{l}{2}\right]}=\binom{2n+1}{n}=\frac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}=\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

由情形 1 可知

$$\binom{2n}{n}\sim\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\quad(n\to\infty).$$

所以

$$\binom{l}{\left[\frac{l}{2}\right]}\sim 2\cdot\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}\sim 2^l\sqrt{\frac{2}{\pi l}}\quad(l\to\infty).$$

综上，

$$\frac{\binom{l}{\left[\frac{l}{2}\right]}}{2^l}\sim\sqrt{\frac{2}{\pi l}}\quad(l\to\infty).$$

由于

$$\lim_{l\to\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi l}}=0,$$

所以

$$\sum_{l_1=0}^{l}\max\left\{0,\#D_{l,l_1,C,s}^{N}-\#D_{l,(l_1-1),C,s}^{N}\right\}=o\left(2^{l}\right)\quad\left(l\to\infty\right).$$

因此对每个 $D_{l,l_1,C,s}^{N}$，当 $l\to\infty$ 时，g_N^* 的定义域大小为

$$\#D_{l,C,s}^{N}-\sum_{l_1=0}^{l}\max\left\{0,\#D_{l,l_1,C,s}^{N}-\#D_{l,(l_1-1),C,s}^{N}\right\}=\left(1-o\left(1\right)\right)2^{l}.\tag{2}$$

对于任意固定的 L，当 $N\to\infty$ 时，有

$$\sum_{l\le L,C,s}\#D_{l,C,s}^{N}=\sum_{l=0}^{L}\sum_{C,s}\#D_{l,C,s}^{N}=\sum_{l=0}^{L}\binom{N}{l}2^{l}\left(k-2\right)^{N-l}=o\left(N^{L}\left(k-2\right)^{N}\right)=o\left(k^{N}\right),$$

$$\sum_{l\le L,C,s}\#D_{l,C,s}^{N}=k^{N}-o\left(k^{N}\right).$$

选取 L 使得对任意满足 $N\ge l>L$ 的 l，(2)式成立。对这个 L，当 N 充分大，则在 D^N 中至少存在 $\left(1-o\left(1\right)\right)k^{N}$ 个序列满足 $l>L$。因此，在整个 D^N 上，g_N^* 的定义域大小至少为 $\left(1-o\left(1\right)\right)k^{N}\cdot\left(1-o\left(1\right)\right)$。

所以引理 2 得证。

对于任意的 Borel 集 $B\subseteq\mathbb{R}$，定义如下 Borel 测度

$$\mu_{+}\left(B\right)=P\left(\limsup_{x\to1^{-}}f\left(x\right)\in B\right),\ \mu_{-}\left(B\right)=P\left(\limsup_{x\to1^{-}}f\left(x\right)\in B\right).$$

显然，$\mu_{+}\left(B\right)$ 与 $\mu_{-}\left(B\right)$ 分别表示随机变量 $\limsup\limits_{x\to1^{-}}f\left(x\right)$ 和 $\limsup\limits_{x\to1^{-}}f\left(x\right)$ 的概率分布函数。

引理 3 对于任意 Borel 集 $B\subseteq\mathbb{R}$，有

$$\mu_{+}\left(B+d_2-d_1\right)\ge\mu_{+}\left(B\right),\ \mu_{-}\left(B+d_2-d_1\right)\ge\mu_{-}\left(B\right).$$

证明： 对 $S\subseteq\mathbb{R}$，定义函数 $\mathcal{L}$ 如下

$$\mathcal{L}\left(S\right)=\left\{\left(a_n\right)\in\Omega:\limsup_{x\to1^{-}}\sum\nolimits_{n=1}^{\infty}a_nx^n\in S\right\}.$$

对序列 $\left(a_n\right)\in\Omega$ 采取如下操作：若 $\left(a_1,\cdots,a_N\right)\in dom\,g_N^*$，则令

$$G_N^*\left(\left(a_n\right)\right)=\left(b_n\right),$$

其中 $g_N^*\left(\left(a_1,\cdots,a_N\right)\right)=\left(b_1,\cdots,b_N\right)$，且当 $n>N$ 时，令 $b_n=a_n$。

因为

$$\begin{aligned}\limsup_{x\to1^{-}}\sum_{n=1}^{\infty}b_nx^n&=\limsup_{x\to1^{-}}\left(\sum_{n=1}^{N}b_nx^n+\sum_{n=N+1}^{\infty}b_nx^n\right)\\&=\sum_{n=1}^{N}b_n+\limsup_{x\to1^{-}}\sum_{n=N+1}^{\infty}b_nx^n\\&=\left(d_2-d_1\right)+\sum_{n=1}^{N}a_n+\limsup_{x\to1^{-}}\sum_{n=N+1}^{\infty}b_nx^n\\&=d_2-d_1+\sum_{n=1}^{N}a_n+\limsup_{x\to1^{-}}\sum_{n=N+1}^{\infty}a_nx^n\\&=d_2-d_1+\limsup_{x\to1^{-}}\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n.\end{aligned}$$

所以对任意 Borel 集 $B\subseteq\mathbb{R}$，若 $(a_n)\in dom\,G_N^*\cap\mathcal{L}(B)$，则

$$G_N^*((a_n))\in\mathcal{L}(B+d_2-d_1).$$

因此

$$G_N^*\left(dom\,G_N^*\cap\mathcal{L}(B)\right)\subseteq\mathcal{L}(B+d_2-d_1).$$

由引理 2，对任意的 $\varepsilon>0$，当 N 充分大时，有

$$P\left(dom\,G_N^*\right)\geq 1-\varepsilon\,.$$

所以

$$P\left(dom\,G_N^*\cap\mathcal{L}(B)\right)\geq\mu(B)-\varepsilon.$$

另一方面，根据 G_N^* 的定义且 a_n 取 d_1 的概率 P_1 小于取 d_2 的概率 P_2，可得

$$P\left(G_N^*\left(dom\,G_N^*\cap\mathcal{L}(B)\right)\right)\geq P\left(dom\,G_N^*\cap\mathcal{L}(B)\right).$$

所以

$$\begin{aligned}\mu_+(B+d_2-d_1)&=P\left(\mathcal{L}(B+d_2-d_1)\right)\\&\geq P\left(G_N^*\left(dom\,G_N^*\cap\mathcal{L}(B)\right)\right)\\&\geq P\left(dom\,G_N^*\cap\mathcal{L}(B)\right)\\&\geq\mu_+(B)-\varepsilon.\end{aligned}$$

由 ε 的任意性，可知

$$\mu_+(B+d_2-d_1)\geq\mu_+(B).$$

同理可得 μ_- 的情况。因此，引理 3 得证。

3. 主要结果的证明

3.1. 定理 1 的证明

由引理 3，对任意 Borel 集 $B\subseteq\mathbb{R}$，有

$$\mu_+(B+d_2-d_1)\geq\mu_+(B),$$

$$\mu_-(B+d_2-d_1)\geq\mu_-(B).$$

然而，在 $\mathbb{R}$ 上不存在非平凡的有限 Borel 测度满足上述性质。所以

$$\mu_+(\mathbb{R})=\mu_-(\mathbb{R})=0.$$

由于定理 1 等价于上式，所以定理 1 得证。

3.2. 定理 2 的证明

由于定理 2 的两个结论是对称的，下面只证 $\sum_{j=1}^{k}d_j>0$ 的情况。为了叙述定理的证明过程，还需要介绍下面两个引理。

引理 4 [5] 设 $f(x)$ 的定义如(1)式，则存在 $K\in\mathbb{R}$，使得事件

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n>K$$

对任意 $0<x<1$ 都成立的概率为正。

引理 5 [5] 设 $f(x)$ 的定义如(1)式，则

$$P\left(\lim_{x\to 1^-} f(x)=\infty\right), P\left(\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty\right)\in\{0,1\}.$$

下面开始定理 2 的证明。

证明： 由引理 4 可知，事件 $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ 发生或者事件 $\liminf\limits_{x\to 1^-} f(x)=-\infty$ 且 $\limsup\limits_{x\to 1^-} f(x)=\infty$ 发生的概率小于 1。再由定理 1，可知

$$P\left(\lim_{x\to 1^-} f(x)=\infty\right)>0.$$

由此并结合引理 5，可得

$$P\left(\lim_{x\to 1^-} f(x)=\infty\right)=1,$$

即若 $\sum_{d\in D} d>0$，则

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\infty \quad a.s..$$

类似可证若 $\sum_{d\in D} d<0$，则有

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=-\infty \quad a.s..$$

因此，定理 2 得证。

4. 结论与讨论

本文研究了系数取有限值且相互独立的随机幂级数在实数域中的行为。我们证明，当系数的数学期望不为零时，级数在自变量趋近于收敛半径边界时，几乎必然发散到正无穷或负无穷。这一结论揭示了随机幂级数在边界点处的确定性行为，并为进一步探讨均值为零情形下的边界性质奠定了基础。

基金项目

本文由“中国矿业大学(北京)大学生创新训练项目资助(No. 202507015)”和“中央高校基本科研业务费资助”。

参考文献

[1] Steinhaus H. (1930) Über die Wahrscheinlichkeit dafür, daß der Konvergenzkreis einer Potenzreihe ihre natürliche Grenze ist. *Mathematische Zeitschrift*, **31**, 408-416. https://doi.org/10.1007/BF01246422

[2] Paley R.E.A.C. and Zygmund A. (1932) A Note on Analytic Functions in the Unit Circle. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, **28**, 266-272. https://doi.org/10.1017/S0305004100010112

[3] Breuer J. and Simon B. (2011) Natural Boundaries and Spectral Theory. *Advances in Mathematics*, **226**, 4902-4920. https://doi.org/10.1016/j.aim.2010.12.019

[4] Loève, M. (1977) Probability Theory I. 4th Edition. Springer, New York. https://doi.org/10.1007/978-1-4757-6288-4

[5] Maga B. and Maga P. (2018) Random Power Series near the Endpoint of the Convergence Interval. *Publicationes Mathematicae*, **93**, 413-424. https://doi.org/10.5486/PMD.2018.8130

[6] Halmos P.R. (1974) Measure Theory. In: Hersh, P., Vakil, R. and Wunsch, J., Eds., *Graduate Texts in Mathematics*, Springer, 1-304.