

若干哈林图的Balaban指标

周丽娟, 因草吉

青海师范大学数学与统计学院, 青海 西宁

收稿日期: 2025年8月22日; 录用日期: 2025年9月27日; 发布日期: 2025年10月15日

摘要

在树的Balaban指标的研究基础上, 本文通过列举4阶到10阶内满足条件的若干哈林图, 由其特殊性质入手, 给出一种新的哈林图的表达方式, 探索哈林图类的Balaban指标的变化规律, 总结归纳出哈林图类中不同结构下的最大 $J(G)$ 指标和其最大 J 指标下的 $SJ(G)$ 指标的一般公式, 并给出若干哈林图Balaban指标的上界。

关键词

Balaban指标, 无向图, 哈林图, 星图

The Balaban Index of Several Halin Graphs

Lijuan Zhou, Caoji Yin

College of Mathematics and Statistics, Qinghai Normal University, Xining Qinghai

Received: August 22, 2025; accepted: September 27, 2025; published: October 15, 2025

Abstract

Based on the research on the Balaban index of trees, this paper first enumerates several Halin graphs that meet the specified criteria and have orders ranging from 4 to 10. Starting from their special properties, a new expression method for Halin graphs is proposed. Then, the variation law of the Balaban index for the class of Halin graphs is explored. Finally, the general formulas for the maximum $J(G)$ index under different structures within the Halin graph class and the $SJ(G)$ index corresponding to this maximum $J(G)$ index are summarized and concluded, and the upper bounds of the Balaban index for several Halin graphs are provided.

Keywords

Balaban Index, Undirected Graph, Halin Graph, Star Graph

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

定义 1 本文中所涉及的图都是连通的 n 阶简单图 G , 顶点数为 $V(G) = n$, 边数为 $|E(G)| = m$. 在图 G 中, 将 $d_G(u, v)$ 记为顶点 u 和 v 的距离. 其中, 任一顶点 u 到其他各顶点的距离之和记为 $D_G(u)$, 即

$$D_G(u) = \sum_{v \in V(G)} d_G(u, v).$$

20 世纪 80 年代 Balaban 提出了一类关于连通图的基于距离的拓扑指标, 称为 Balaban 指标(或简称为 J 指标) [1] [2], 即

$$J(G) = \frac{m}{m-n+2} \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{D_G(u)D_G(v)}}.$$

Balaban 指标的研究意义在于其作为分子拓扑学核心工具, 能够精准量化分子结构的分支程度与复杂性, 为跨学科研究提供关键支撑. 此外, Balaban 指标与机器学习的深度融合如图神经网络, 以及多指标协同优化如结合 Wiener 指数, 进一步拓展了其在复杂分子体系预测与智能决策中的应用潜力.

为进一步研究图结构的不同性质, 2010 年 Deng 等人在文献[2]中提出了图的 Sum-Balaban 指标, 也称 SJ 指标, 定义为

$$SJ(G) = \frac{m}{m-n+2} \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{D_G(u) + D_G(v)}}.$$

树图作为图论中基础图类之一, 常被学者用以研究 Balaban 指标的问题, 在文献[3]中, 提出了所有树中 Sum-Balaban 指数最大的树 n 顶点和直径 d , 还提供了一个新的结果证明, 即在阶数为 n 的简单图中, 星图 S_n 是所有树中具有最大 Sum-Balaban 指数的图. 文献[4]中也提到具有 n 个顶点和最大度 Δ 或给定度序列或 k 个下垂顶点的树中具有最大 Balaban 指标的树. 此外, 还确定了具有最小 Balaban 指数和 n 个顶点以及最大度 Δ 的树, 以及具有最大 Balaban 指标和 n 个顶点以及最大度 Δ 和 k 个下垂顶点的树, 在后续的研究中, 可以发现哈林图的 Balaban 指标与它的最大度及最大度的个数有关, 最大度越多说明图中的路多, 各点之间的联系更紧密, Balaban 指标值也随之改变.

BALABAN A. T.介绍了一种关于连通图的新的拓扑指标, 称为 Balaban 指标. 进一步地, 在 2010 年, BALABAN A. T.等人首次研究了 Sum-Balaban 指标. 在化学应用中, 这两种指标都具有良好的描述分子性质的作用, 因此被广泛应用于定量结构-活性相关(QSAR)和定量结构-性质相关(QSPR)的各方面研究, 如文献[5]. 通过对图形的化学结构的思考, 人们还提出了计算这两类指标的方法. 主要的研究内容集中在研究计算图的(Sum)-Balaban 指标的上、下界, 其中已有不少的简单连通图被研究证明, 包括树图、单圈图、双圈图、链图等等, 并且部分学者研究确定指标的上下界时还对具有极值指标的极图进行了刻画. 文献[2]给出了 Balaban 指数的若干基本性质, 并分别确定了在顶点数固定的树图中, 和 Balaban 指数取得最小值与最大值的树图结构. 文献[6]则是(QSAR)和(QSPR)的研究应用. 文献[7]对特征树为双星的哈

林图的反魔幻性进行研究, 依据图的结构把哈林图分成 3 部分, 按照顶点标号和单调递增的顺序依次对每部分的边给出标号, 证明了特征树为双星的哈林图是反魔幻图。文献[8]中 Knor 等人给出了关于 n 个顶点的 r -正则图的 Balaban 指数的上界, 并为富勒烯图提供了更好的上界, 他们还建议探索其他拓扑指数的类似界限。文献[9]解决了 3 正则图 L_n 的 Balaban 指数计算问题, 采用了分类讨论的方法, 给出了 L_n 的 Balaban 指数计算公式, 并利用该公式, 分别得到了该类正则图 Balaban 指数的易于计算的上、下界。文献[10]给出哈林图是一个平面图 $G = T \cup C$, 其中 T 是嵌入到平面内的不含 2 度点且至少有一个顶点度大于等于 3 的树, C 是按顺时针顺序依次连接 T 中的叶形成的圈。文献[11]给出了有 t 片树叶的树图对应的哈林图中具有最大和最小零阶广义 Randic 指标的图类。

定义 2 设 T 是平面内顶点度至少为 3 或只有叶子点的树(无圈的连通图), 即 T 中没有度为 2 的顶点, C 是连接 T 中所有叶子点的圈, 称 $G = T \cup C$ 为哈林图 G , T 为 G 的特征数, C 为 G 的连接圈, 圈上的点称为外点。其中, $|N| = |T - C|$ 是树中不在圈上的点的个数, 这些点被称为内点或中心点。本文主要研究内点所构成的图是一条路的情况。

轮图 $W_n = K_{1,n} \cup C_n$ 是特征树为 $K_{1,n}$, 连接圈为 C_n 的特殊哈林图。

定义 3 双星图 $S(m, n)$ 是指连接星图 $S_{1,m}$ 的中心和星图 $S_{1,n}$ 的中心, 且具有 $m+n+2$ 个顶点的图。

多星图 $S(a, b, c, \dots, n)$ 指连接 $S_{1,a}, S_{1,b}, S_{1,c}, \dots, S_{1,n}$ 等 s 个星图的中心, 且具有 $a+b+c+\dots+n+s$ 个顶点的图。

推论 1 n 阶哈林图 G 是由树 T 与圈 C 构成, 设圈上有 k 个点, 则 $|V(C)| = |E(C)| = k$, 且由内点个数等于图 G 的顶点个数减去圈上的点数 k 得 $|T - C| = |N| = n - k$, 进一步得到圈上的顶点数就等于图 G 的顶点数减去内点数 $k = n - |T - C|$, 故在树 T 中 $|V(T)| = n - k$, $|E(T)| = n - 1$ 。综上, 哈林图 G 中的边数 $|E(G)| = m = |E(T)| + |E(C)| = n - 1 + k = 2n - 1 - |T - c|$ 。

2. 主要结果

在分析哈林图类的 Balaban 指标时, 先确定不同阶数的满足条件的哈林图的结构, 再计算它们的指标, 根据哈林图的特殊结构性质, 研究图中结构的变化如何影响 Balaban 指标的数值, 由改变圈的大小、树的分支结构、最大度等变量, 得出一系列对指标的影响规律。如下所示, 本文新定义了一种哈林图的结构表达式, 为方便哈林图类的进一步研究。

引理 1 由定义 2 和 3, 哈林图 G 可看作是树 T 与圈 C 构成, 树 T 上的点是内点与外点构成, 且本文规定内点所组成的图均为链图, 故可将树 T 中各个内点设为星图的中心点, $DS(S_\ell^1, C_\ell)$ 定义为中心点 V_1 上悬挂了 ℓ 条边, 边上的点均为叶子点, 与圈 C_ℓ 构成了哈林图 G 。

以图 G_1 为例, 其哈林图 G 可看作一个内点为 V_1 的单星图 S_3^1 与圈 C_3 构成, 它的结构可以表达为 $DS(S_3^1, C_3)$ (在单星图中有 3 条悬挂边, 故有三个叶子点, 则圈上点数为 3);

以图 G_3 为例, 其哈林图 G 可看作两个内点为 V_1 和 V_2 的双星图 S_2^1 和 S_2^2 与圈 C_4 构成, 它的结构可以表达为 $DS(S_2^1, S_2^2, C_4)$ (在双星图中有 4 条悬挂边, 故有四个叶子点, 则圈上点数为 4);

以图 G_7 为例, 其哈林图 G 可看作三个内点为 V_1, V_2, V_3 的三星图 S_2^1, S_1^2, S_2^3 与圈 C_5 构成, 它的结构可以表达为 $DS(S_2^1, S_1^2, S_2^3, C_5)$ (在三星图中有 5 条悬挂边, 故有五个叶子点, 则圈上点数为 5);

以此类推, 内点有 s 个时, 其哈林图 G 可看作 s 个内点为 $V_1, V_2, V_3, \dots, V_m, V_n$ 的多星图 $S_a^1, S_b^2, S_c^3, \dots, S_n^s$ 与圈 $C_{a+b+c+\dots+n}$ 构成, 此时, 它的结构可以表达为 $DS(S_a^1, S_b^2, S_c^3, \dots, S_n^s, C_{a+b+c+\dots+n})$ (在多星图中有 $a+b+c+\dots+n$ 条悬挂边, 故有 $a+b+c+\dots+n$ 个叶子点, 则圈上点数为 $a+b+c+\dots+n$)。

由哈林图的特殊性质可知其没有度为 2 的顶点, 且阶数大于等于 4, 故从第 4 阶开始分析, 满足定

义的哈林图的结构如下, 通过计算得出 $J(G)$ (本文结果均保留小数点后四位):

(1) 4 阶哈林图的结构只有一种, 如图 1, 是特殊的 3-正则图:

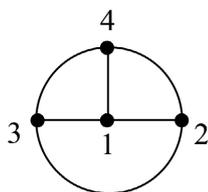


Figure 1. $DS(S_3^1, C_3)$, $J(G_1) = 3$

图 1. $DS(S_3^1, C_3)$, $J(G_1) = 3$

(2) 5 阶哈林图的结构只有一种, 如图 2, 所示:

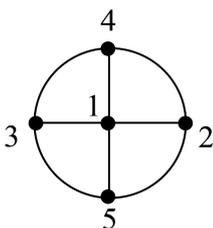


Figure 2. $DS(S_4^1, C_4)$, $J(G_2) = 2.7111$

图 2. $DS(S_4^1, C_4)$, $J(G_2) = 2.7111$

(3) 6 阶哈林图的结构有两种, 如图 3 和图 4, 则:

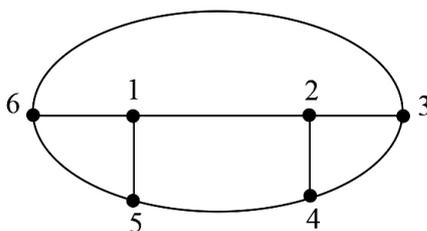


Figure 3. $DS(S_2^1, S_2^2, C_4)$, $J(G_3) = 2.3143$

图 3. $DS(S_2^1, S_2^2, C_4)$, $J(G_3) = 2.3143$

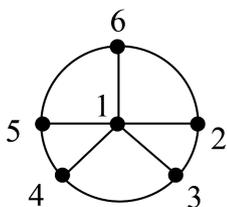


Figure 4. $DS(S_5^1, C_5)$, $J(G_4) = 2.5991$

图 4. $DS(S_5^1, C_5)$, $J(G_4) = 2.5991$

(4) 7 阶哈林图的结构有两种, 如图 5 和图 6, 则:

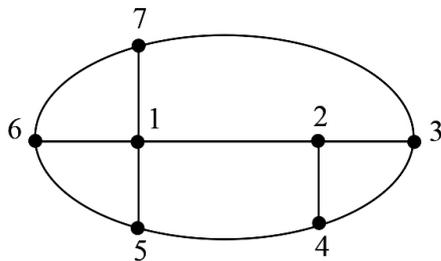


Figure 5. $DS(S_3^1, S_2^2, C_5)$, $J(G_5) = 2.2902$

图 5. $DS(S_3^1, S_2^2, C_5)$, $J(G_5) = 2.2902$

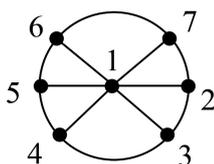


Figure 6. $DS(S_6^1, C_6)$, $J(G_6) = 2.5426$

图 6. $DS(S_6^1, C_6)$, $J(G_6) = 2.5426$

(5) 8 阶哈林图的结构有四种, 如图 7~10, 则:

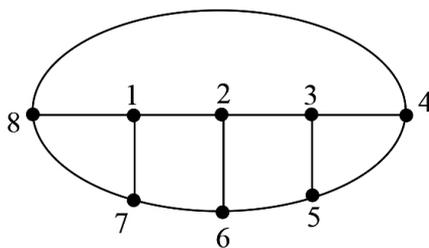


Figure 7. $DS(S_2^1, S_1^2, S_2^3, C_5)$, $J(G_7) = 2.0896$

图 7. $DS(S_2^1, S_1^2, S_2^3, C_5)$, $J(G_7) = 2.0896$

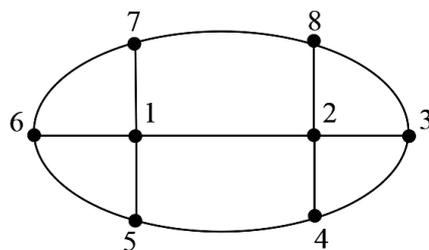


Figure 8. $DS(S_3^1, S_3^2, C_6)$, $J(G_8) = 2.1315$

图 8. $DS(S_3^1, S_3^2, C_6)$, $J(G_8) = 2.1315$

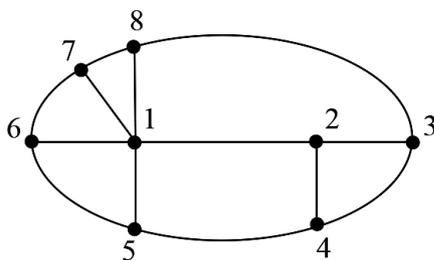


Figure 9. $DS(S_4^1, S_2^2, C_6)$, $J(G_9) = 2.1967$

图 9. $DS(S_4^1, S_2^2, C_6)$, $J(G_9) = 2.1967$

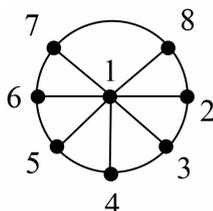


Figure 10. $DS(S_7^1, C_7)$, $J(G_{10}) = 2.5097$

图 10. $DS(S_7^1, C_7)$, $J(G_{10}) = 2.5097$

(6) 9 阶哈林图的结构有五种, 如图 11~15, 则:

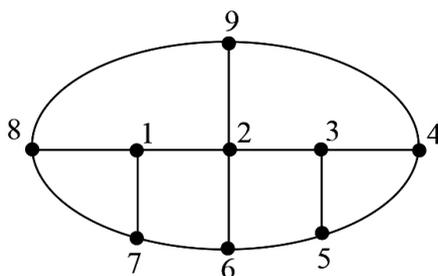


Figure 11. $DS(S_2^1, S_2^2, S_2^3, C_6)$, $J(G_{11}) = 1.9913$

图 11. $DS(S_2^1, S_2^2, S_2^3, C_6)$, $J(G_{11}) = 1.9913$

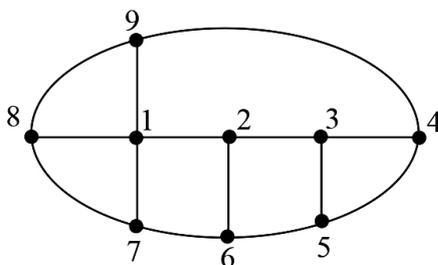


Figure 12. $DS(S_3^1, S_1^2, S_2^3, C_6)$, $J(G_{12}) = 1.9440$

图 12. $DS(S_3^1, S_1^2, S_2^3, C_6)$, $J(G_{12}) = 1.9440$

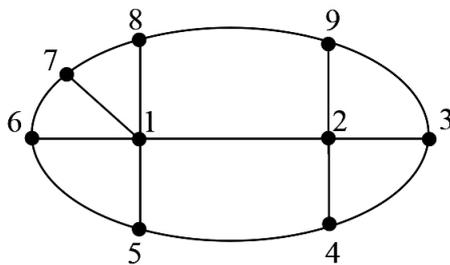


Figure 13. $DS(S_4^1, S_3^2, C_7)$, $J(G_{13}) = 2.0691$

图 13. $DS(S_4^1, S_3^2, C_7)$, $J(G_{13}) = 2.0691$

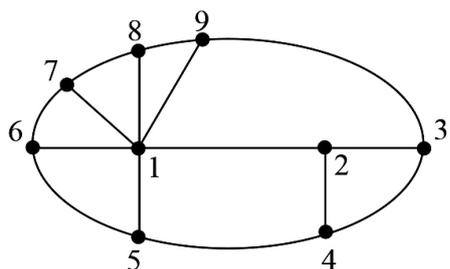


Figure 14. $DS(S_5^1, S_2^2, C_7)$, $J(G_{14}) = 2.1622$

图 14. $DS(S_5^1, S_2^2, C_7)$, $J(G_{14}) = 2.1622$

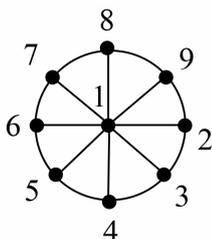


Figure 15. $DS(S_8^1, C_8)$, $J(G_{15}) = 2.4886$

图 15. $DS(S_8^1, C_8)$, $J(G_{15}) = 2.4886$

(7) 10 阶哈林图的结构有九种, 如图 16~24, 则:

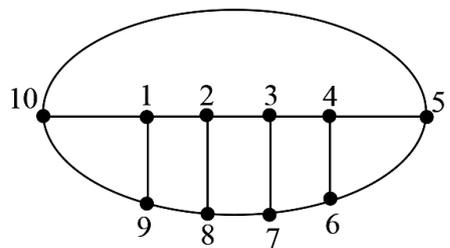


Figure 16. $DS(S_2^1, S_1^2, S_1^3, S_2^4, C_6)$, $J(G_{16}) = 1.8483$

图 16. $DS(S_2^1, S_1^2, S_1^3, S_2^4, C_6)$, $J(G_{16}) = 1.8483$

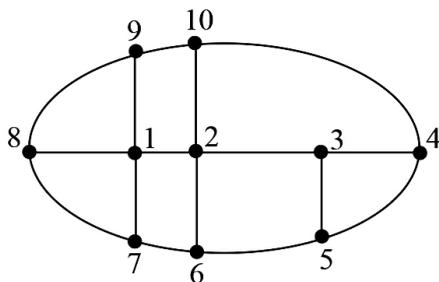


Figure 17. $DS(S_3^1, S_2^2, S_2^3, C_7)$, $J(G_{17})=1.9074$

图 17. $DS(S_3^1, S_2^2, S_2^3, C_7)$, $J(G_{17})=1.9074$

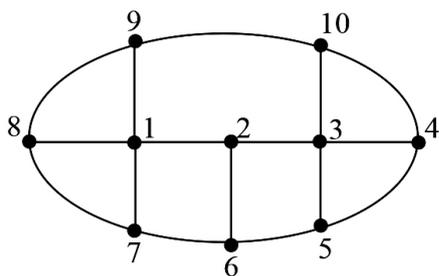


Figure 18. $DS(S_3^1, S_1^2, S_3^3, C_7)$, $J(G_{18})=1.8946$

图 18. $DS(S_3^1, S_1^2, S_3^3, C_7)$, $J(G_{18})=1.8946$

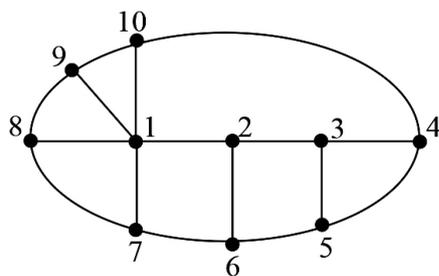


Figure 19. $DS(S_4^1, S_1^2, S_2^3, C_7)$, $J(G_{19})=1.9365$

图 19. $DS(S_4^1, S_1^2, S_2^3, C_7)$, $J(G_{19})=1.9365$

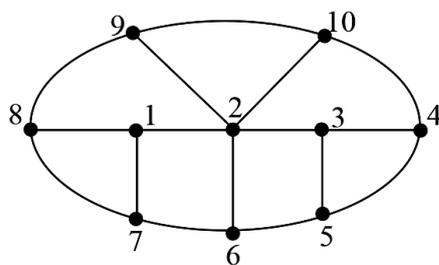


Figure 20. $DS(S_2^1, S_3^2, S_2^3, C_7)$, $J(G_{20})=1.9733$

图 20. $DS(S_2^1, S_3^2, S_2^3, C_7)$, $J(G_{20})=1.9733$

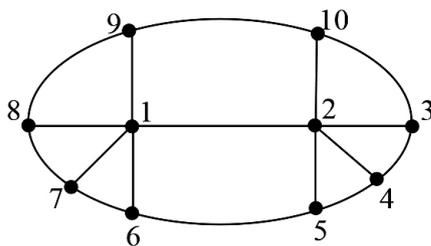


Figure 21. $DS(S_4^1, S_4^2, C_8)$, $J(G_{21}) = 2.0115$

图 21. $DS(S_4^1, S_4^2, C_8)$, $J(G_{21}) = 2.0115$

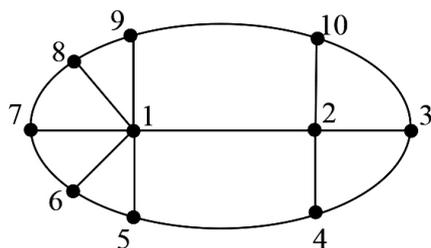


Figure 22. $DS(S_5^1, S_3^2, C_8)$, $J(G_{22}) = 2.0459$

图 22. $DS(S_5^1, S_3^2, C_8)$, $J(G_{22}) = 2.0459$

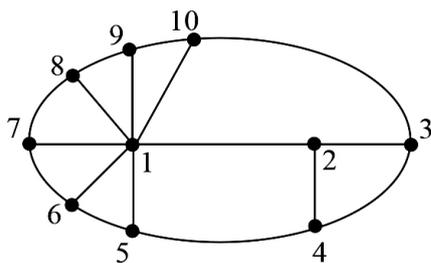


Figure 23. $DS(S_6^1, S_2^2, C_8)$, $J(G_{23}) = 2.1115$

图 23. $DS(S_6^1, S_2^2, C_8)$, $J(G_{23}) = 2.1115$

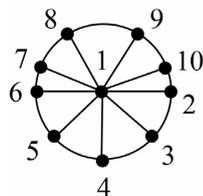


Figure 24. $DS(S_9^1, C_9)$, $J(G_{24}) = 2.4743$

图 24. $DS(S_9^1, C_9)$, $J(G_{24}) = 2.4743$

推论 2 从以上所得的哈林图类中可知:

1. 正则的哈林图都是完美匹配, 反之不然;
2. 因为构成哈林图的树 T 中不含 2 度顶点, 且在哈林图中, 最大度与内点个数有关, 所以 n 阶哈林图中的最大度范围是: $3 \leq \Delta \leq n-1$ 且 $\Delta \neq n-2$;

3. 当哈林图是轮图时, 顶点数越大, 则 Balaban 指数越小, 如图
 $J(G_1) > J(G_2) > J(G_4) > J(G_6) > J(G_{10}) > J(G_{15}) > J(G_{24})$;
4. 满足 3-正则的哈林图只会出现在 n 为偶数阶时, 且顶点数越大, 则 Balaban 指数越小, 如图
 $J(G_1) > J(G_3) > J(G_7) > J(G_{16})$;
5. 同阶条件下, 圈 C_k 中外点数 k 越多, 则 Balaban 指数越大, 如图
 $n=6$ 时, $J(G_3) < J(G_4)$;
 $n=7$ 时, $J(G_5) < J(G_6)$;
 $n=8$ 时, $J(G_7) < J(G_8)$, $J(G_9) < J(G_{10})$;
 $n=9$ 时, $J(G_{11}), J(G_{12}) < J(G_{13}), J(G_{14}) < J(G_{15})$;
 $n=10$ 时, $J(G_{16}) < J(G_{17}), J(G_{18}), J(G_{19}), J(G_{20}) < J(G_{21}), J(G_{22}), J(G_{23}) < J(G_{24})$ 。

推论 3 n 阶轮图的(sum)-Balaban 指标

满足条件的特殊哈林图是轮图, 直径为 2 时。设内点编号为 1, 则 $d(1)$ 表示内点到圈上各点的最短距离之和, $i(2 \leq i \leq n)$ 是圈上各点的编号, $d(i)$ 表示 i 点到图中各点的最短距离之和。由轮图的特殊性质可知, 内点 $d(1)$ 到圈上各点的最短距离之和就是最大度 $\Delta = n-1$, 而圈上的每个点到其他点的最短距离之和都相等, 故:

- 当 $n=4$ 时, 在图 G_1 中, $d(1) = n-1 = 3$, $d(i) = 3 + 2 \times 0 = 3$;
- 当 $n=5$ 时, 在图 G_2 中, $d(1) = n-1 = 4$, $d(i) = 3 + 2 \times 1 = 5$;
- 当 $n=6$ 时, 在图 G_4 中, $d(1) = n-1 = 5$, $d(i) = 3 + 2 \times 2 = 7$;
- 当 $n=7$ 时, 在图 G_6 中, $d(1) = n-1 = 6$, $d(i) = 3 + 2 \times 3 = 9$;
- 当 $n=8$ 时, 在图 G_{10} 中, $d(1) = n-1 = 7$, $d(i) = 3 + 2 \times 4 = 11$;
- ...

当阶数为 n 时, $d(1) = n-1$, $d(i) = 3 + 2 \times (n-4) = 2n-5$ 。

另外, 轮图时特殊的哈林图且始终只有一个中心点, 故哈林图 G 中的边数
 $m = |E(T)| + |E(C)| = n-1 + k = 2n-1 - |T-c| = 2n-2$ 。

此时, 由 $J(G)$ 与 $SJ(G)$ 公式计算得:

$$\begin{aligned}
 J(G) &= \frac{m}{m-n+2} \sum_{u,v \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{D_G(u) \cdot D_G(v)}} \\
 &= \frac{m}{m-n+2} \cdot \left[\frac{n-1}{\sqrt{(n-1)(2n-5)}} + \frac{n-1}{2n-5} \right] \\
 &= \frac{(2n-2)(n-1)}{n} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{(n-1)(2n-5)}} + \frac{1}{2n-5} \right] \\
 SJ(G) &= \frac{m}{m-n+2} \sum_{u,v \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{D_G(u) + D_G(v)}} \\
 &= \frac{m}{m-n+2} \cdot \left[\frac{n-1}{\sqrt{(n-1) + (2n-5)}} + \frac{n-1}{\sqrt{(2n-5) + (2n-5)}} \right] \\
 &= \frac{2n-2}{n} \cdot \left[\frac{n-1}{\sqrt{3n-6}} + \frac{n-1}{\sqrt{4n-10}} \right] \\
 &= \frac{2(n-1)^2}{n} \cdot \left[\frac{1}{\sqrt{3n-6}} + \frac{1}{\sqrt{4n-10}} \right]
 \end{aligned}$$

推论 4 哈林图 Balaban 指标的上界

引理 2 设 G 是具有 n 个顶点和 m 条边的简单连通图, 设 Δ 表示图 G 中最大的度, 则

$$J(G) \geq \left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n\Delta}{m}} \cdot \frac{n^2}{m-n+2}$$

由上述引理和结论 2.3 中最大度的范围可知:

推论 4.1 在一般 n 阶哈林图中, 当 $\Delta = n-3$ 时, 边 $m = 2n-3$, 故

$$J(G) \geq \left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n(n-3)}{2n-3}} \cdot \frac{n^2}{2n-3-n+2} = \left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n^2-3n}{2n-3}} \cdot \frac{n^2}{n-1}$$

推论 4.2 在特殊哈林图即轮图中, 当 $\Delta = n-1$ 时, 边 $m = 2n-2$, 故

$$J(G) \geq \left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2n-2}} \cdot \frac{n^2}{2n-2-n+2} = \left(\frac{n^2}{2}\right)^{\frac{n}{2}} \cdot n$$

推论 5 直径为 3 时 n 阶哈林图的最大 Balaban 指标

由推论 4 可知, 哈林图的 Balaban 指标有上界, 但无法具体到对应图, 要确定指标最大时的哈林图, 则需固定直径的长度, 根据定义条件, 构造具有最大度的哈林图, 进而计算指标。如, 若固定哈林图中直径的为 3, 此时内点数相同为 2, 若悬挂边越多, 最大度 Δ 越大, 则 $J(G)$ 和 $SJ(G)$ 指标就越大, 如图 G_8 和图 G_9 中图 8 的最大度 $\Delta_8 = 4$ 小于图 9 的最大度 $\Delta_9 = 5$, 所以 $J(G_8) < J(G_9)$; 图 G_{12} 、图 G_{13} 和图 G_{14} 中 $\Delta_{12} < \Delta_{13} < \Delta_{14}$, 所以 $J(G_{12}) < J(G_{13}) < J(G_{14})$; 图 G_{16} 、图 G_{17} 、 G_{21} 和图 G_{24} 中比较 $J(G)$ 大小都可得到验证。故引申至 $n(n \geq 11)$ 阶哈林图中, 由下图 25 所示, 固定直径为 3 时的最大 $J(G)_{\max}$ 指标和最大 J 指标下的 $SJ(G)$ 指标计算公式为:

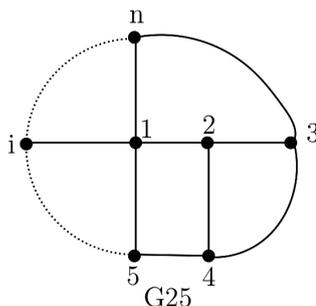


Figure 25. $DS(S_{n-4}^1, S_2^2, C_{n-2})$

图 25. $DS(S_{n-4}^1, S_2^2, C_{n-2})$

- 1、直径为 3, 则最大度为 $n-3$, 内点数为 2, 故 $m = 2n-3$;
- 2、哈林图的结构表示为 $DS(S_{n-4}^1, S_2^2, C_{n-2})$, 其中编号 $i(6 \leq i \leq n-1)$;
- 3、内点 1 到其他各点的距离之和为: $d(1) = n+1$
 内点 2 到其他各点的距离之和为: $d(2) = 2n-5$
 外点 3 到其他各点的距离之和为: $d(3) = 3n-12$
 外点 4 到其他各点的距离之和为: $d(4) = 3n-12$

外点 5 到其他各点的距离之和为: $d(5) = 2n - 5$

外点 6 到其他各点的距离之和为: $d(6) = 2n - 4$

4、从第 7 个点起, 设标号 $i (7 \leq i \leq n-1)$ 表示圈上外点的编号, 则:

外点 7 到其他各点的距离之和为: $d(7) = 13 + 2(n-8) = 2n - 3$

外点 8 到其他各点的距离之和为: $d(8) = 15 + 2(n-9) = 2n - 3$

外点 9 到其他各点的距离之和为: $d(9) = 17 + 2(n-10) = 2n - 3$

.....

外点 i 到其他各点的距离之和为: $d(i) = (2i-1) + 2[n-(i+1)] = 2n - 3$, 距离与编号数 i 无关

.....

外点 $n-1$ 到其他各点的距离之和: $d(n-1) = 2n - 3$

外点 n 到其他各点的距离之和: $d(n) = 2n - 5$

5、综上可由 Balaban 指标的定义, 得出固定 n 阶哈林图直径为 3 时的最大 Balaban 指标公式, 以及在最大 Balaban 指标时的 Sum-Balaban 指标:

$$\begin{aligned}
 J(G)_{\max} &= \frac{m}{m-n+2} \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{D_G(u) \cdot D_G(v)}} \\
 &= \frac{2n-3}{2n-3-n+2} \cdot \left[\frac{3}{\sqrt{(n+1)(2n-5)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)(2n-4)}} \right. \\
 &\quad + \frac{n-7}{\sqrt{(n+1)(2n-3)}} + \frac{1}{3n-12} + \frac{4}{\sqrt{(2n-5)(3n-12)}} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{(2n-5)(2n-4)}} + \frac{1}{\sqrt{(2n-4)(2n-3)}} + \frac{n-8}{2n-3} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{(2n-3)(2n-5)}} \right] \\
 SJ(G) &= \frac{m}{m-n+2} \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{D_G(u) + D_G(v)}} \\
 &= \frac{2n-3}{2n-3-n+2} \cdot \left[\frac{3}{\sqrt{(n+1)+(2n-5)}} + \frac{1}{\sqrt{(n+1)+(2n-4)}} \right. \\
 &\quad + \frac{n-7}{\sqrt{(n+1)+(2n-3)}} + \frac{1}{\sqrt{2(3n-12)}} + \frac{4}{\sqrt{(2n-5)+(3n-12)}} \\
 &\quad + \frac{1}{\sqrt{(2n-5)+(2n-4)}} + \frac{1}{\sqrt{(2n-4)+(2n-3)}} + \frac{n-8}{\sqrt{2(2n-3)}} \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{(2n-3)+(2n-5)}} \right] \\
 &= \frac{2n-3}{n-1} \cdot \left[\frac{3}{\sqrt{3n-4}} + \frac{1}{\sqrt{3n-3}} + \frac{n-7}{\sqrt{3n-2}} + \frac{1}{\sqrt{6n-24}} + \frac{4}{\sqrt{5n-17}} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{4n-9}} + \frac{1}{\sqrt{4n-7}} + \frac{n-8}{\sqrt{4n-6}} + \frac{1}{\sqrt{4n-8}} \right]
 \end{aligned}$$

3. 结论与展望

在 Balaban 指标的研究中, 对树图、圈图、双星图等图的研究成熟且完善, 基于这些研究等基础上研究树图加圈图再限制一定条件成新图的研究也存在, 但哈林图的 Balaban 研究还较少, 另一方面, 本文给出双星图加圈的构造方式, 进一步完善对星图的 Balaban 的补充刻画, 另外哈林图类的 Balaban 研究也给出了一种新的定义方法, 在限制直径的情况下, 由新的构造方式, 得出了最大 Balaban 指标公式, 最后计算出哈林图 Balaban 指标的上界, 为后续研究提供条件。

本文对于哈林图 Balaban 指标的研究还处于初步阶段, 后续可以考虑图运算下的 Balaban 指标的变化, 也可以在 Balaban 指标变化 d 的基础上, 对比双星图加圈前后 Balaban 指标的变化, 给出改变指标值的原因。

参考文献

- [1] Balaban, A.T. (1982) Highly Discriminating Distance Based Numerical Descriptor. *Chemical Physics Letters*, **89**, 399-404.
- [2] Deng, H. (2011) On the Sum-Balaban Index. *MATCH Communications in Mathematics and Computer Chemistry*, **66**, 273-284.
- [3] You, L. and Han, H. (2013) The Maximum Sum-Balaban Index of Trees with Given Diameter. *Ars Combinatoria*, **112**, 115-128.
- [4] Dong, H. and Guo, X. (2011) Character of Trees with Extreme Balaban Index. *MATCH Communications in Mathematica Chemistry*, **66**, 261-272.
- [5] Deng, B. and Chang, A. (2013) Maximal Balaban Index of Graphs. *MATCH Communications in Mathematics and Computer Chemistry*, **70**, 259-286.
- [6] Dong, H.W. and Guo, X.F. (2010) Character of Graph Has with Extremal Balaban Index. *MATCH Communications in Mathematics and Computer Chemistry*, **63**, 799-812.
- [7] 马文慧, 陆英宇. 特征树为双星的哈林图的反魔幻性[J]. 高师理科学刊, 2021, 41(12): 14-16.
- [8] Chen, Z., Dehmer, M., Shi, Y. and Yang, H. (2016) Sharp Upper Bounds for the Balaban Index of Bicyclic Graphs. *MATCH Communications in Mathematics and Computer Chemistry*, **75**, 105-128.
- [9] 武军秀, 高玉斌. 一类 3 正则图的 Balaban 指数[J]. 山西大学学报(自然科学版), 2023, 47(5): 935-942.
- [10] 陈晓峰, 王艺桥. 最大度为 7 的哈林图的 $L(2,1)$ -标号[J]. 华东师范大学学报(自然科学版), 2019(1): 39-47+57.
- [11] 刘顺琴. 哈林图的零阶广义 Randic 指标的若干极值问题[J]. 长春大学学报, 2015, 25(6): 53-56.