

可压缩非理想非混相两相流的一维初值问题

王 岑, 宋童言

北京化工大学数理学院, 北京

收稿日期: 2025年8月24日; 录用日期: 2025年9月26日; 发布日期: 2025年10月27日

摘 要

可压缩Navier-Stokes/Allen-Cahn方程组是描述非混相两相流流动的重要数学模型之一。本文研究可压缩等熵(或等温) Navier-Stokes/Allen-Cahn方程组初值问题的一维全局强解的存在唯一性, 其中压强满足Van der Waals状态方程, 该状态方程关于密度是非单调的, 物理上常用来描述流体的相变。本文通过能量方法, 在初值不含真空的情况下, 证明了该方程组一维Cauchy问题全局强解的存在唯一性, 这一结论不需要对初值加以任何小性限制。结果表明, 在任意有限时间段内, 非混相两相流的密度、相场、速度等物理量保持连续性, 在可能的相变发生处, 流体的密度可以振荡剧烈, 但是不会出现间断, 新的相变产生之处, 不同的相之间由扩散界面连接。

关键词

可压缩Navier-Stokes/Allen-Cahn方程, 强解, Van der Waals状态方程

Initial Value Problem for Compressible Non-Ideal Immiscible Two-Phase Flow in 1D

Cen Wang, Tongyan Song

College of Mathematics and Physics, Beijing University of Chemical Technology, Beijing

Received: August 24, 2025; accepted: September 26, 2025; published: October 27, 2025

Abstract

The compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn equations system is one of the important mathematical models for describing immiscible two-phase flows. This paper studies the existence and uniqueness of global strong solutions to the initial value problem for the 1-D compressible isentropic (or isothermal) Navier-Stokes/Allen-Cahn equations. The pressure satisfies the Van der Waals equation

of state, which is non-monotonic with respect to density and is commonly used in physics to describe fluid phase transitions. Using the energy method, we establish the existence and uniqueness of global strong solutions for the equations under the condition that the initial data contains no vacuum. This result holds without imposing any smallness restriction on the initial data. The results demonstrate that within any finite time interval, the physical quantities of the immiscible two-phase flow—such as density, phase field, and velocity—remain continuous. While the density may exhibit intense oscillations at locations where phase transitions are possible, discontinuities do not arise. Furthermore, where new phases emerge, the distinct phases are connected by diffuse interfaces.

Keywords

Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn Equations, Strong Solutions, Van der Waals Equation of State

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

非混相两相流在自然界中与工程应用中极为常见, 在化工材料, 航天航空等诸多领域有着广泛的应用, 随着生物、能源与环境保护工程的兴起与发展, 对非混相两相流的研究成为了非常重要的课题。互不相溶两相流问题涉及不同相之间的流动、质量传递、复杂的界面运动以及两相流相互作用, 是一个涉及流场和相场的耦合问题, 其传递机制非常复杂。两相混合流体可能会发生相变, 不同流体之间的交界处会出现扩散、聚合或者破裂等拓扑结构变化的情况。19 世纪初, 杨氏(Young), 拉普拉斯(Laplace)和高斯(Gauss)将两种不同流体之间的界面考虑为一个厚度为零的表面, 但这一方法不能较准确地刻画互不相溶的两相流之间的扩散界面。在 1894 年, 荷兰物理学家 Van der Waals [1]把互不相溶的两相流之间的界面描述为一个过渡层, 如图 1。基于此在 1958 年, Cahn-Hilliard 提出描述两相界面的扩散行为(如融合、分裂)的 Cahn-Hilliard 方程; 1979 年 Allen-Cahn 提出描述相变过程(如蒸发、凝固)的 Allen-Cahn 方程。随后, Blesgen [2]通过耦合可压缩 Navier-Stokes 方程与修正 Allen-Cahn 方程建立了具有扩散界面的可压缩两相流的 Navier-Stokes/Allen-Cahn (简称 NSAC)模型。

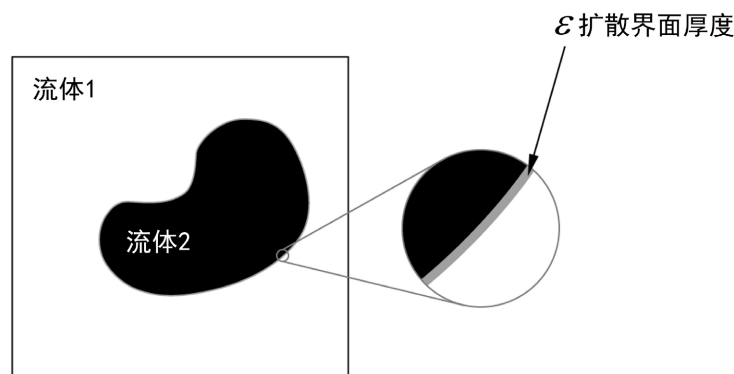


Figure 1. diffuse interfaces

图 1. 扩散界面

Navier-Stokes/Allen-Cahn 模型通常表示如下:

$$\begin{cases} \partial_t \rho + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = 0, \\ \partial_t(\rho \mathbf{u}) + \operatorname{div}(\rho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \nabla p - \nu \Delta \mathbf{u} - (\nu + \eta) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u} = \operatorname{div} \left(-\varepsilon \nabla \chi \otimes \nabla \chi + \frac{\varepsilon}{2} \nabla \chi \right), \\ \partial_t(\rho \chi) + \operatorname{div}(\rho \chi \mathbf{u}) = -\mu, \\ \rho \mu = \frac{1}{\varepsilon} \rho \frac{\partial f(\rho, \chi)}{\partial \chi} - \varepsilon \Delta \chi, \end{cases} \quad (1)$$

其中 $\rho = \rho(\mathbf{x}, t) = \rho_1 + \rho_2$ 表示混合流体的总密度, $\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ 表示流速, 且 $\rho \mathbf{u} = \rho_1 \mathbf{u}_1 + \rho_2 \mathbf{u}_2$, $\rho_i, \mathbf{u}_i$ ($i=1, 2$) 分别表示第 i 种流体的密度和流速, $\chi = \chi(\mathbf{x}, t)$ 表示相场(详情见注 1), μ 表示化学势, $f = f(\rho, \chi)$ 为势能密度函数(详情见注 2)。常数 $\nu > 0$, $\eta \geq 0$ 为黏性系数, 常数 $\varepsilon > 0$ 为混合流体的扩散界面厚度。

注 1: 在可压缩不混溶两相流中取一个微元体, 假设其体积为 V , 质量为 $M = M_1 + M_2$, 其中 M_1, M_2 分别表示不混溶两相流微元体中两类流体的质量。定义 $\chi_i = \frac{M_i}{M}$ ($i=1, 2$) 为微元体中各组分的质量浓度, $\chi = \chi_1 - \chi_2$ 。从物理意义上显然可知, χ 的取值范围应在 -1 到 1 之间。所谓不混溶两相流的扩散界面, 就是指满足 $\chi < 1$ 的区域, 因此我们可以通过 χ 的取值来追踪扩散界面的运动轨迹。

注 2: 势能密度 $f = f(\rho, \chi)$ 满足 Ginzburg-Landau 双阱势模型:

$$f(\rho, \chi) = -3\rho + \frac{8\theta}{3} \ln \frac{\rho}{3-\rho} + \frac{1}{4}(\chi^2 - 1)^2,$$

其中表示 $\theta > 0$ 临界温度。

对于满足理想气体状态方程的两相不混溶流动问题, 压强 p 是密度 ρ 的增函数, 即满足理想气体状态方程 $p = C\rho^\gamma$ ($\gamma \geq 1$), 对于满足该条件的方程(1), Feireisl-Petzeltová-Rocca-Schimperna [3] 基于 Lions [4] 提出的框架, 证明了等熵情形下 $\gamma > 6$ 时有限能量弱解的全局存在性。Chen-Wen-Zhu [5] 将该结果改进至 $\gamma > 2$ 。Ding-Li-Luo [6] 进一步在初始密度不含真空的有界区域中, 得到了一维强解的全局存在性。Chen-Guo [7] 将 Ding-Li-Luo [6] 的结论推广至允许初始真空的情形。另外 Chen-Hong-Shi [8] [9]、Chen-Li-Tang [10] 和 Zhao [11] 研究了三维情况下小初值扰动时强解的全局存在唯一性。

然而在高压和低温条件下, 气体的行为偏离了理想气体的假设, 特别是在气体接近液化时, 分子间的吸引力和分子自身的体积变得不容忽视, 气体会发生相变。对于存在相变的系统, 压强 p 通常关于密度 ρ 具有非单调性(称为非理想流体状态方程), 为了弥补这种情况的不足, 我们考虑 Van der Waals 气体状态方程(参考[1] [5] [12] [13]及其中的参考文献):

$$\left(p + \frac{a}{v^2} \right) (v - b) = R\theta, \quad (2)$$

其中 p 表示压强, v 表示体积, θ 表示温度, R 是气体常数, a 和 b 是表示分子内聚力效应和分子有限尺寸的常数。为方便研究, 使得其数学表达不随流体种类变化而变化, 以 p_c, v_c 和 θ_c 表示临界点处的状态参数值, 并定义无量纲分量 $p = \frac{p}{p_c}, v = \frac{v}{v_c}, \theta = \frac{\theta}{\theta_c}$, 则方程(2)的无量纲形式为:

$$\left(p + \frac{3}{v^2} \right) \left(v - \frac{1}{3} \right) = \frac{8}{3} \theta. \quad (3)$$

由方程(3)可直接证明: 当 $\theta > 1$ 时, p 是 v 的单调递减函数; 而当 $0 < \theta < 1$ 时, 存在某个体积区间使得 p 随 v 增大而增大, 相变发生在 $p(v)$ 呈上升趋势的区域附近, 如图 2 所示。

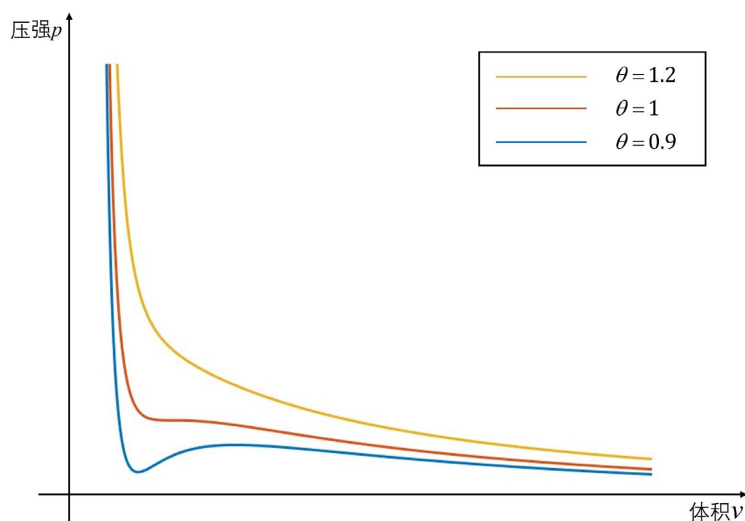


Figure 2. p-v at different temperatures

图 2. 不同温度 p-v 图

对于非理想气体的研究, Hsieh 与 Wang [13]通过引入人工粘性项的伪谱方法, 数值求解了基于方程(3)的等熵可压缩 Navier-Stokes 方程, 研究了相变过程对初始密度选择的依赖性。He-Liu-Shi [5]在一维情形下, 研究了 van der Waals 流体解的长时间渐近行为。Mei-Liu-Wong [14][15]在 Navier-Stokes 系统中引入附加人工粘性项并设定 $p(\rho) = \rho^{-3} - \rho^{-1}$, 证明了一维周期解的存在性、唯一性、正则性及一致有界性。Hoff 与-Khodia [12]则针对含小初始扰动的一维全空间可压缩 van der Waals 流体系统(1), 研究了特定稳态弱解的动态稳定性。

从物理角度而言, 在方程(3)中, 我们可以发现当 v 趋于 $\frac{1}{3}$ 时, 或系统温度趋于绝对零度, 或系统压强 p 急剧发散至无穷大, 而基于热力学第三定律可知, 绝对零度是无法达到的, 实际的物理过程必然表现为压强发散。但在真实物理世界中, 物质被压缩到分子本身大小后, 就无法再被压缩了; 当物质被压缩到非常致密时, 就会表现出微观粒子的特殊性质, 以及原子核之间的强力作用。为了方便数学上的研究以及与真实的物理现象的自洽, 有如下修正的 Van der Waals 气体状态方程:

$$p(v) = \begin{cases} -\frac{3}{v^2} + \frac{8\theta}{3v-1}, & v > \frac{1}{3} + \delta, \\ +\infty, & v \leq \frac{1}{3} + \delta, \end{cases} \quad (4)$$

其中 $v = \frac{1}{\rho}$, 任意小的常数 $\delta > 0$, θ 为临界温度, 我们有以下关于压强 p 的性质:

$$(1) \quad p(v) \xrightarrow{v \rightarrow +\infty} 0;$$

(2) 若 $\theta \geq 1$, $p(v)$ 为单调减函数。当 $0 < \theta < 1$, 存在两点 $\frac{1}{3} + \delta < \alpha < \beta$, 使得 $p(v)$ 在 $\left[\frac{1}{3} + \delta, \alpha\right]$, $[\beta, +\infty)$ 单调递减, $p(v)$ 在 (α, β) 单调递增; 进一步地, 存在 $\frac{1}{3} + \delta < \gamma < \alpha$, 使得 $p(\gamma) = p(\beta)$, 当 $\frac{1}{3} + \delta < v < \gamma$ 时 $p(\gamma) < p(v)$, $p(v)$ 在 $\left[\frac{1}{3} + \delta, \gamma\right]$ 上单调递减; 存在 $\zeta > \beta$, 使得 $p(\zeta) = p(\alpha)$, 当 $\zeta < v$ 时, $p(\zeta) < p(v)$, $p(v)$ 在 $[\zeta, +\infty)$ 上单调递减。如图 3。

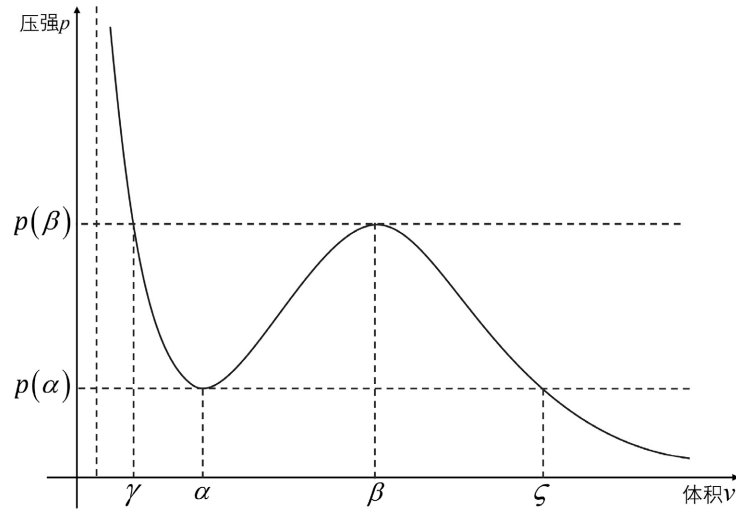


Figure 3. p-v of Van der Waals equations
图 3. Van der Waals 方程 p-v 图

(3)

$$p'(v) = \begin{cases} \frac{6}{v^3} - \frac{24\theta}{(3v-1)^2}, & v > \frac{1}{3} + \delta, \\ +\infty, & v \leq \frac{1}{3} + \delta, \end{cases}$$

本文的目的是讨论满足方程(4)的等熵 Navier-Stokes/Allen-Cahn 方程组(1)的强解的全局存在唯一性。该问题的难点在于给出密度的上下界估计以及克服压强 p 的非单调性带来的困难。为了简单起见, 我们首先考虑方程的一维情形:

则拉格朗日坐标系下一维等熵 Navier-Stokes/Allen-Cahn 方程组可表述为:

$$\begin{cases} v_t - u_x = 0, \\ u_t + (p(v))_x = \left(\frac{u_x}{v}\right)_x - \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\chi_x^2}{v^2}\right)_x, \\ \chi_t = -v\mu, \\ \mu = \frac{1}{\varepsilon} (\chi^3 - \chi) - \varepsilon \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_x, \end{cases} \quad (5)$$

满足初值条件:

$$(v, u, \chi)(x, 0) = (v_0, u_0, \chi_0)(x) \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} (\bar{v}, 0, \pm 1), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (6)$$

另外, $\|\cdot\|$ 表示范数, 定义为: $\|g\| = \left(\int_0^L |g(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}$, H^l ($l \geq 0$) 表示定义在 $\mathbb{R}$ 上的 L^2 函数 g 其导数 $\partial_x^j g$,

($j=1, \dots, l$) 也是 L^2 函数, 其范数定义为 $\|g\|_l = \left(\sum_{j=0}^l \|\partial_x^j g\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

2. 主要定理

定理 1: 对任意小的常数 $\delta > 0$, 假设压强 p 满足方程(4), 若式(6)中 $\bar{v}$ 满足:

$$\frac{1}{3} + \delta < \bar{v} < \gamma \text{ 或 } \zeta < \bar{v},$$

且

$$(v_0 - \bar{v}, u_0, (\chi_0)_x) \in H^1(\mathbb{R}), \quad \chi_0^2 - 1 \in L^2(\mathbb{R}),$$

$$\inf_{x \in \mathbb{R}} v_0 > \frac{1}{3} + \delta, \quad -1 \leq \chi_0 \leq 1,$$

则 Navier-Stokes/Allen-Cahn 方程组(5)~(6)的 Cauchy 问题存在唯一的全局强解 (v, u, χ) , 使得对任意 $T > 0$, 存在常数 C_1 , 使得:

$$(v - \bar{v}, u, \chi_x) \in L^\infty(0, T; H^1(\mathbb{R})), \quad \chi^2 - 1 \in L^\infty(0, T; L^2(\mathbb{R})),$$

$$v_x \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R})), \quad \chi_x \in L^2(0, T; H^1(\mathbb{R})), \quad \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_{xx} \in L^2(0, T; L^2(\mathbb{R})),$$

且

$$\frac{1}{3} + \delta < v(x, t) \leq C_1, \quad \chi(x, t) \in [-1, 1], \quad (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T],$$

其中 $C_1 > 0$, 且与 T, ε 有关。

3. 主要定理的证明

先定义解空间: 即对 $\forall c > 0, C > 0, T > 0$ 有

$$\begin{aligned} X_{c,C}([0, T]) = & \left\{ (v, u, \chi) \mid v - \bar{v} \in C([0, T]; H^2(\mathbb{R})), (u, \chi_x) \in C([0, T]; H^1(\mathbb{R})), \right. \\ & \chi^2 - 1 \in C([0, T]; L^2(\mathbb{R})), (v - \bar{v})_x \in L^2([0, T]; H^1(\mathbb{R})), \\ & u_x \in L^2([0, T]; H^1(\mathbb{R})), \chi_x \in L^2([0, T]; H^2(\mathbb{R})), -1 \leq \chi(x) \leq 1, \\ & \left. \inf_{x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]} v(x, t) \geq c > \frac{1}{3} + \delta, \sup_{t \in [0, T]} \left\{ \|(v - \bar{v}, u)\|_1 + \|\chi^2 - 1\| + \|\chi_x\|_1 \right\} \leq C \right\} \end{aligned}$$

3.1. 局部强解的存在性唯一性

命题 1: $\forall c > 0, C > 0$, 初值 (v_0, u_0, χ_0) 满足条件 $\inf_{x \in \mathbb{R}, t \in [0, T]} v_0(x, t) > c > \frac{1}{3} + \delta$,

$\|(v_0 - \bar{v}, u_0)\|_1 + \|\chi_0 - 1\| + \|\chi_{0x}\| \leq M, -1 \leq \chi_0 \leq 1$, 存在一个短时间 $T^* = T^*(C) > 0$, 使得问题(5)~(6)存在唯一解 (v, u, χ) , 满足 $(v, u, \chi) \in X_{\frac{m}{2} + \frac{1}{2}(\frac{1}{3} + \delta), 2C}([0, T^*])$ 。

证明:

利用类似文献[16]的迭代方法可以证明方程(5)~(6)的局部解的存在性。

3.2. 先验估计

命题 2. 在定理 1 的假设下, 若方程(5)~(6)有一个解 (v, u, χ) , 对 $T > 0$, 有 $(v, u, \chi) \in X_{\frac{1}{3} + \delta, +\infty}([0, T])$, 则:

$$\sup_{t \in [0, T]} \left(\|(v - \bar{v}, u, \chi_x)\|_1^2 + \|\chi^2 - 1\|^2 \right) + \int_0^T \left(\|v_x(\tau)\|^2 + \|u_x(\tau)\|_1^2 + \|\chi_x(\tau)\|^2 \right) d\tau \leq C,$$

其中 $C > 0$, 且与 T, ε 有关. 更进一步地, 存在 $C_1 > 0$, 使得: $\frac{1}{3} + \delta < v(x, t) \leq C_1, \chi \in [-1, 1], \forall (x, t) \in \mathbb{R} \times [0, T]$.

首先, 由 p 的性质(1)~(3)可知, 我们可以选取 $\bar{v}$, 满足 $\frac{1}{3} < \bar{v} < \gamma$, 定义:

$$\Phi(v) = \int_{\bar{v}}^v (p(\bar{v}) - p(s)) ds = p(\bar{v})(v - \bar{v}) - \int_{\bar{v}}^v p(s) ds, \quad (7)$$

直接计算可得

$$\Phi'(v) = p(\bar{v}) - p(v),$$

且

$$\Phi''(v) = -p'_v(v),$$

易知: $\Phi(\bar{v}) = \Phi'(\bar{v}) = 0$, 则

$$\Phi(v) = -\frac{1}{2} p'_v(\bar{v})(v - \bar{v})^2 + o((v - \bar{v})^2),$$

结合(7)可得

$$\Phi(v) > 0, \quad \forall v \neq \bar{v},$$

有关命题 2 的证明, 将由接下来的引理给出。

引理 1. 对任意的 $T > 0$, 都有

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\chi_x^2}{v} + \Phi(v) + \frac{(\chi^2 - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v\mu^2 + \frac{u_x^2}{v} \right) dx dt \leq C. \quad (8)$$

证明: 将(5)₂乘以 u , (5)₃乘以 μ , 相加后关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 积分, 并通过分部积分得到

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\chi_x^2}{v} + \frac{(\chi^2 - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v\mu^2 + \frac{u_x^2}{v} + (p(\bar{v}) - p(v))u_x \right) dx dt = 0, \quad (9)$$

结合(7)与(9)得

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\chi_x^2}{v} + \Phi(v) + \frac{(\chi^2 - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v\mu^2 + \frac{u_x^2}{v} \right) dx dt = 0, \quad (10)$$

再对(10)关于 t 在 $[0, T]$ 上积分得

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\chi_x^2}{v} + \Phi(v) + \frac{(\chi^2 - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v\mu^2 + \frac{u_x^2}{v} \right) dx dt \leq E_0,$$

式中 $E_0 = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{u_0^2}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \frac{\chi_{0x}^2}{v_0} + \Phi(v_0) + \frac{(\chi_0^2 - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx$, 引理 1 得证。

引理 2. 对任意的 $T > 0$, 都有

$$\|\chi\|_{L^\infty} \leq C.$$

证明: 设

$$\Omega_n = [n, n+1), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

由式(8)可得

$$\int_{\Omega_n} \chi^4 dx \leq 2 \int_{\Omega_n} \chi^2 dx + E_0 \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega_n} \chi^4 dx + (2 + E_0),$$

于是有

$$\int_{\Omega_n} \chi^4 dx \leq 2(2 + E_0),$$

因此可得到

$$\int_{\Omega_n} \chi(x, t) dx \leq \left(\int_{\Omega_n} \chi^4 dx \right)^{\frac{1}{4}} \leq (4 + 2E_0)^{\frac{1}{4}},$$

利用上式得到

$$|\chi(x, t)| \leq \left| \int_{\Omega_n} (\chi(x, t) - \chi(y, t)) dy \right| + \left| \int_{\Omega_n} \chi(y, t) dy \right| \leq C \left(\int_{\Omega_n} \chi^2 \right)^{\frac{1}{2}} + (4 + 2E_0)^{\frac{1}{4}},$$

引理 2 得证。

引理 3. 在压强假设(4)下, 对任意的 $T > 0$, 都有

$$\sup_{t \in [0, T]} \|v_x\|_{L^2} \leq C.$$

证明: 由(5)₁可得

$$\left(\frac{u_x}{v} \right)_x = \left(\frac{v_t}{v} \right)_x = (\ln v)_{xt} = \left(\frac{v_x}{v} \right)_t, \quad (11)$$

则(5)₂可写为

$$\left(\frac{v_x}{v} \right)_t - p'_v(v) v_x = u_t + \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\chi_x^2}{v^2} \right)_x, \quad (12)$$

将(12)乘以 $\frac{v_x}{v}$, 再关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 积分得到

$$\left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{v_x}{v} \right)^2 - u \frac{v_x}{v} \right) dx \right]_t + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-p'_v(v) \frac{v_x^2}{v} - \frac{u^2}{v} + \frac{\varepsilon \chi_x^2 v_x^2}{v^4} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon \chi_x \chi_{xx} v_x}{v^3} dx, \quad (13)$$

将(13)乘以 $\frac{1}{2}$, 与(8)相加得到

$$\begin{aligned} & \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} u \frac{v_x}{v} + \frac{1}{4} \left(\frac{v_x}{v} \right)^2 + \Phi(v) + \frac{\varepsilon \chi_x^2}{2v} + \frac{(\chi^2 - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dy \right]_t \\ & + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v \mu^2 - \frac{1}{2} p'_v(v) \frac{v_x^2}{v} + \frac{1}{2} \frac{u^2}{v} + \frac{\varepsilon \chi_x^2 v_x^2}{2v^4} \right) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon \chi_x \chi_{xx} v_x}{2v^3} dx, \end{aligned} \quad (14)$$

接下来我们处理 $-\frac{1}{2} p'_v(v) \frac{v_x^2}{v}$ 项。

由(14), 并结合 Young 不等式可得:

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{2} u \frac{v_x}{v} + \frac{1}{4} \left(\frac{v_x}{v} \right)^2 + \Phi(v) + \frac{\varepsilon \chi_x^2}{2v} + \frac{(\chi^2 - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dy \right]_t \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v \mu^2 + \frac{1}{2} \frac{u_x^2}{v} + \frac{\varepsilon \chi_x^2 v_x^2}{2v^4} \right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{12\theta v_x^2}{(3v-1)^2 v} dx \\
& = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon \chi_x \chi_{xx} v_x}{2v^3} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3v_x^2}{v^4} dx \\
& \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon \chi_x^2 v_x^2}{4v^4} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon \chi_{xx}^2}{v^2} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{3}{v^3} \frac{v_x^2}{v} dx, \\
& \text{由 } \left| -\frac{1}{2} u \frac{v_x}{v} \right| \leq \frac{\kappa}{2} u^2 + \frac{1}{2\kappa} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{v_x^2}{v^2} \text{ 知得, 有适合的 } \kappa > 0 \text{ 使得:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda_1 u^2 + \lambda_2 \left(\frac{v_x}{v} \right)^2 + \Phi(v) + \frac{\varepsilon \chi_x^2}{2v} + \frac{(\chi^2 - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dy \right]_t \\
& + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v \mu^2 + \frac{1}{2} \frac{u_x^2}{v} + \frac{\varepsilon \chi_x^2 v_x^2}{2v^4} \right) dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{12\theta v_x^2}{(3v-1)^2 v} dx \\
& \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varepsilon \chi_{xx}^2}{v^2} + C \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_x^2}{v^2} dx
\end{aligned}$$

其中 $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$ 。

由(5)₄可知

$$\varepsilon \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_x^2 = \frac{1}{\varepsilon} \chi (\chi^2 - 1) - \mu,$$

则

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_x^2 = \left[\frac{1}{\varepsilon} \chi (\chi^2 - 1) - \mu \right]^2 \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \chi^2 (\chi^2 - 1)^2 + v \mu^2 \frac{1}{v},$$

则

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_x^2 dx \leq C,$$

进一步, 由 Young 不等式与引理 1 有

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\chi_x}{v} \right)^2 (x, t) &= \int_{-\infty}^x d \left(\frac{\chi_y}{v} \right)^2 = 2 \int_{-\infty}^x \left(\frac{\chi_y}{v} \right) \left(\frac{\chi_y}{v} \right)_y dy \leq 2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \frac{\chi_x}{v} \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_x \right| dx \\
&\leq 2 \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{v} \frac{\chi_x^2}{v} dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}, \\
\sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{\chi_x}{v} \right)^2 &\leq C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_x^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

由(5)₄得

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_{xx}}{v} \right)^2 dx &= \frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-\mu + \frac{1}{\varepsilon} \chi (\chi^2 - 1) + \frac{\varepsilon \chi_x v_x}{v^2} \right)^2 dx \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(3v\mu^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} (\chi^2 - 1)^2 + \varepsilon^2 \frac{\chi_x^2 v_x^2}{v^2 v^2} \right) dx \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(3v\mu^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} (\chi^2 - 1)^2 \right) dx + \varepsilon C \sup_{x \in \mathbb{R}} \left(\frac{\chi_x}{v} \right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_x^2}{v^2} dx \\
&\leq \frac{C}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(3v\mu^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} (\chi^2 - 1)^2 \right) dx + \varepsilon C \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_x^2}{v^2} dx,
\end{aligned}$$

将上式关于 t 在 $[0, T]$ 上积分, 再结合引理 1 与 Gronwall 不等式可知:

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\lambda_1 u^2 + \lambda_2 \left(\frac{v_x}{v} \right)^2 + \Phi(v) + \frac{\varepsilon \chi_x^2}{2v} + \frac{(\chi^2 - 1)^2}{4\varepsilon} \right) dx \\
&+ \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(v\mu^2 + \frac{1}{2} \frac{u_x^2}{v} + \frac{12\theta v_x^2}{(3v-1)^2 v} + \frac{\varepsilon \chi_x^2 v_x^2}{4v^4} + \frac{\chi_{xx}^2}{v^2} \right) dx dt \leq C,
\end{aligned}$$

引理 3 得证。

引理 4. 压强假设(4)下, 任意的 $T > 0$, 都有

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R} \times [0, T])} \leq C_1.$$

证明: 考虑

$$f(v) = \int_{\bar{v}}^v \frac{1}{s} \sqrt{\Phi(s)} ds, \quad [17]$$

易得, 当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $v \rightarrow \bar{v}$, 当 $v \rightarrow \bar{v}$ 时, $f(v) \rightarrow 0$, 则有当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $f(v) \rightarrow 0$ 。结合引理 1 可得

$$f(v) = \int_{-\infty}^v \frac{\partial f}{\partial x} dx = \int_{-\infty}^v \frac{v_x}{v} \sqrt{\Phi(v)} dx \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{v_x}{v} \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(v) dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq C,$$

反证: $x \rightarrow \infty$, 可知

$$\int_{\bar{v}}^{\infty} \frac{1}{s} \sqrt{\Phi(s)} ds \rightarrow \infty,$$

即 $f(v) \rightarrow \infty$, 与 $f(v) \leq C$ 矛盾。

引理 4 得证。

引理 5. 对任意的 $T > 0$,

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{xx}^2 dx + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\chi_{xt}^2 + \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_{xx}^2 \right) dx dt \leq C.$$

证明: (5)₃ 以及(5)₄, 可得

$$\frac{\chi_t}{v} = -\frac{1}{\varepsilon} (\chi^3 - \chi) + \varepsilon \left(\frac{\chi_x}{v} \right)_x = -\frac{1}{\varepsilon} (\chi^3 - \chi) + \varepsilon \frac{\chi_{xx}}{v} - \varepsilon \frac{\chi_x v_x}{v^2}, \quad (15)$$

结合引理 1~引理 4 得到:

$$\int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_t^2 dx dt \leq C,$$

将(15)式对 x 求导, 且由

$$\left(\frac{\chi_t}{v}\right)_x = \frac{\chi_{xt}}{v} - \frac{\chi_t v_x}{v^2} = \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t - \frac{\chi_t v_x}{v^2} + \frac{\chi_x u_x}{v^2},$$

得

$$\left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t - \varepsilon \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_{xx} = -\frac{1}{\varepsilon}(\chi^3 - \chi)_x + \frac{\chi_t v_x}{v^2} - \frac{\chi_x u_x}{v^2}, \quad (16)$$

将(16)乘以 $\left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t$, 再关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 积分, 并结合引理 1~引理 4 与 Sobolev 嵌入定理得:

$$\begin{aligned} & \frac{\varepsilon}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_x^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t^2 dx \\ &= -\frac{1}{\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} (\chi^3 - \chi)_x \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_t v_x}{v^2} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t dx - \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_t u_x}{v^2} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t dx \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (3\chi^2 - 1)^2 \chi_x^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_t^2 v_x^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\chi_x^2}{v^2} u_x^2 dx \right) + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t^2 dx \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \left(1 + \|\chi_t\|_{L^\infty}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 dx + \left\| \frac{\chi_x}{v} \right\|_{L^\infty}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \right) + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t^2 dx \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \left(1 + \|\chi_t\| \|\chi_{xt}\| + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_x^w dx \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \right) + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t^2 dx \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \|\chi_t\|^2 + \varepsilon \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{xt}^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_x^w dx \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \right) + \frac{1}{3} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t^2 dx \\ &\leq \frac{C}{\varepsilon} \left(1 + \frac{1}{\varepsilon} \|\chi_t\|^2 + \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_x^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx \right) + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t^2 dx, \end{aligned}$$

再由 Gronwall 不等式得

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_x^2 dx + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{\chi_x}{v}\right)_t^2 dx dt \leq C,$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{xx}^2 dx \leq C,$$

则有:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (\chi_t^2 + \chi_{xx}^2) dx + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} (\chi_{xt}^2 + \chi_t^2 + \chi_{xx}^2) dx \leq C,$$

引理 5 得证。

引理 6. 对任意的 $T > 0$, 都有

$$\sup_{t \in [0, T]} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx + \int_0^T \int_{-\infty}^{+\infty} (u_t^2 + u_{xx}^2) dx dt \leq C.$$

证明: (5)₂ 乘以 u_{xx} , 再关于 x 在 $(-\infty, +\infty)$ 积分,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{+\infty} u_x^2 dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_{xx}^2}{v} dx \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx} p'_v(v) v_x dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx} \frac{u_x v_x}{v^2} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx} \frac{\varepsilon}{2} \left(\frac{\chi_x^2}{v^2} \right)_x dx \\
&= I_1 + I_2 + I_3,
\end{aligned}$$

结合引理 1~引理 5, 有

$$|I_1| \leq \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx + \frac{C}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 dx,$$

与

$$\begin{aligned}
|I_2| &\leq \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx + \frac{C}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} v_x^2 u_x^2 dx \\
&\leq \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx + \frac{C}{\lambda} \|u_x\| \|u_{xx}\| \|v_x\|^2 \\
&\leq 2\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx + \frac{C}{\lambda^3} \|u_x\|^2,
\end{aligned}$$

以及

$$\begin{aligned}
|I_3| dx &= \varepsilon \left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx} \left(\frac{\chi_x \chi_{xx}}{v^2} - \frac{\chi_x^2 v_x}{v^3} \right) dx \right| \\
&\leq \varepsilon \lambda \int_{-\infty}^{+\infty} u_{xx}^2 dx + \frac{C\varepsilon}{\lambda} \int_{-\infty}^{+\infty} (\chi_{xx}^2 + v_x^2) dx,
\end{aligned}$$

因此我们有

$$\sup_{t \in (0, T]} \|u_x(t)\|^2 + \int_0^T \|u_{xx}(\tau)\|^2 d\tau \leq C,$$

引理 6 得证。

4. 结束语

本文讨论了满足非理想状态方程的一维 Navier-Stokes/Allen-Cahn 方程组的 Cauchy 问题强解的全局存在唯一性。该结果无需初值具备小性条件, 在任意有限时间段内, 密度、相场、速度等物理量始终保持连续, 且密度在相变区可存在振荡但不会出现间断, 在新的相变产生之处, 不同的相之间由扩散界面连接从而确保了解的整体正则性。

基金项目

北京市自然科学基金委员会, 面上项目, 1252004, 大气海洋中非线性偏微分方程的定性理论研究, 2025-01-01 至 2027-12-31。

参考文献

- [1] Van der Waals, J.D. (1894) Thermodynamische Theorie der Kapillarität unter Voraussetzung stetiger Dichteänderung. *Zeitschrift für Physikalische Chemie*, **13**, 657-725. <https://doi.org/10.1515/zpch-1894-1338>
- [2] Blesgen, T. (1999) A Generalization of the Navier-Stokes Equations to Two-Phase Flows. *Journal of Physics D: Applied Physics*, **32**, 1119-1123. <https://doi.org/10.1088/0022-3727/32/10/307>
- [3] Feireisl, E., Petzeltová, H., Rocca, E. and Schimperna, G. (2010) Analysis of a Phase-Field Model for Two-Phase

- Compressible Fluids. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, **20**, 1129-1160. <https://doi.org/10.1142/s0218202510004544>
- [4] Lions, P.L. (1998) *Mathematical Topics in Fluid Mechanics, Vol. 2. Compressible Models*. Oxford University Press.
 - [5] He, Q., Liu, C. and Shi, X. (2018) Numerical Study of Phase Transition in Van Der Waals Fluid. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—B*, **23**, 4519-4540. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2018174>
 - [6] Ding, S., Li, Y. and Luo, W. (2012) Global Solutions for a Coupled Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System in 1D. *Journal of Mathematical Fluid Mechanics*, **15**, 335-360. <https://doi.org/10.1007/s00021-012-0104-3>
 - [7] Chen, M. and Guo, X. (2017) Global Large Solutions for a Coupled Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System with Initial Vacuum. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **37**, 350-373. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2017.03.001>
 - [8] Chen, Y., Hong, H. and Shi, X. (2023) The Asymptotic Stability of Phase Separation States for Compressible Immiscible Two-Phase Flow in 3D. *Acta Mathematica Scientia*, **43**, 2133-2158. <https://doi.org/10.1007/s10473-023-0513-9>
 - [9] Chen, Y., Hong, H. and Shi, X. (2023) Stability of the Phase Separation State for Compressible Navier-Stokes/Allen-Cahn System. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **40**, 45-74. <https://doi.org/10.1007/s10255-023-1070-7>
 - [10] Chen, Y., Li, H. and Tang, H. (2022) Global Existence and Optimal Time Decay Rates of 3D Non-Isentropic Compressible Navier-Stokes-Allen-Cahn System. *Journal of Differential Equations*, **334**, 157-193. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2022.06.018>
 - [11] Zhao, X. (2021) Global Well-Posedness and Decay Estimates for Three-Dimensional Compressible Navier-Stokes-Allen-Cahn Systems. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh: Section A Mathematics*, **152**, 1291-1322. <https://doi.org/10.1017/prm.2021.58>
 - [12] Hoff, D. and Khodja, M. (1993) Stability of Coexisting Phases for Compressible Van Der Waals Fluids. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **53**, 1-14. <https://doi.org/10.1137/0153001>
 - [13] Hsieh, D. and Wang, X. (1997) Phase Transition in Van der Waals Fluid. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, **57**, 871-892. <https://doi.org/10.1137/s0036139995295165>
 - [14] Mei, M., Shu Wong, Y. and Liu, L. (2007) Phase Transitions in a Coupled Viscoelastic System with Periodic Initial-Boundary Condition: (I) Existence and Uniform Boundedness. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—B*, **7**, 825-837. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2007.7.825>
 - [15] Mei, M., Shu Wong, Y. and Liu, L. (2007) Phase Transitions in a Coupled Viscoelastic System with Periodic Initial-Boundary Condition: (II) Convergence. *Discrete & Continuous Dynamical Systems—B*, **7**, 839-857. <https://doi.org/10.3934/dcdsb.2007.7.839>
 - [16] Huang, F.M., Shi, X.D. and Matsumura, A. (2004) On the Stability of Contact Discontinuity for Compressible Navier-Stokes Equations with Free Boundary. *Osaka Journal of Mathematics*, **41**, 193-210. <https://doi.org/10.18910/10064>
 - [17] Kanel, Y.I. (1979) Cauchy Problem for the Equations of Gasdynamics with Viscosity. *Siberian Mathematical Journal*, **20**, 208-218. <https://doi.org/10.1007/bf00970025>