Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(10), 40-46
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1510247

三次矩阵多项式的谱分解

张　荣，赵　康*

长沙理工大学数学与统计学院，湖南　长沙

收稿日期：2025年8月27日；录用日期：2025年9月28日；发布日期：2025年10月10日

摘　要

矩阵多项式的谱分解在振动主动控制与被动控制等问题上有广泛的应用。目前，针对二次矩阵多项式的谱分解问题已经有较为完善的研究成果，但尚未见到关于高次矩阵多项式谱分解的研究。本文根据矩阵多项式的若尔当对，给出三次矩阵多项式谱分解的两种不同的证明方法。

关键词

矩阵多项式，特征值，谱分解，若尔当对

The Spectral Decomposition of Third Order Matrix Polynomials

Rong Zhang, Kang Zhao*

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: August 27, 2025; accepted: September 28, 2025; published: October 10, 2025

Abstract

Spectral decomposition of matrix polynomial has wide applications in active control and passive control. So far, the spectral decomposition problem for quadratic matrix polynomials has been thoroughly studied, while systematic results for the high-order case are still open. Based on the Jordan pair of matrix polynomial, this paper proposes two distinct methods for the spectral decomposition of third-order matrix polynomials.

Keywords

Matrix Polynomials, Eigenvalue, Spectral Decomposition, Jordan Pair

*通讯作者。

文章引用：张荣，赵康．三次矩阵多项式的谱分解[J]．理论数学, 2025, 15(10): 40-46. DOI: 10.12677/pm.2025.1510247

1. 引言

二次矩阵多项式的谱分解与谱结构在振动主动控制[1]-[4]与被动控制[5]-[9]方面具有广泛的应用。目前，关于二次矩阵多项式的谱分解已有许多研究成果。Chu 与 Xu [10]刻画了实对称二次矩阵多项式的实值谱分解，并讨论了其在特征值反问题中的应用。当质量矩阵与刚度矩阵非奇异时，Zhao [1]给出二次对称矩阵多项式谱分解的一个新的证明，并利用动柔度与系统矩阵刻画了特征值配置问题的解析解。针对摩擦诱导的振动系统，Zhao [11]刻画了二次实非对称矩阵多项式的谱分解，并给出摩擦诱导振动系统无溢出修正问题的解析解。最近，Zhao [12]与 Qian [8]讨论了声振耦合振动系统的特征值嵌入问题，刻画了声振耦合振动系统的谱分解以及无溢出修正问题的解。然而，目前尚未见到关于高次矩阵多项式谱分解的研究。近年来，高阶控制系统因其广泛应用于机械、土木工程、机器人和控制理论等领域，并引起了研究人员的广泛关注，例如，三轴动态飞行运动模拟器系统和具有先进悬架系统的半车模型通常被描述为三阶系统[13] [14]。高次矩阵多项式的谱结构与谱分解在高阶控制系统的研究中有重要的应用。本文针对三阶矩阵多项式的谱分解进行研究，提出了两种不同的谱分解证明方法。

2. 三次矩阵多项式的谱结构

设三次矩阵多项式 $P(\lambda)=\lambda^3 M+\lambda^2 C+\lambda D+K$，其中 $M,C,D,K\in\mathbb{R}^{n\times n}$。不妨假设 $P(\lambda)$ 的所有不同特征值为 $\lambda_1,\bar{\lambda}_1,\cdots,\lambda_l,\bar{\lambda}_l,\lambda_{2l+1},\cdots,\lambda_k$，其中 $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j, j=1,\cdots,l$，而 $\lambda_j\in\mathbb{R}, j=2l+1,\cdots,k$，每个特征值都具有代数重数 n_j，即 $2n_1+\cdots+2n_l+n_{2l+1}+\cdots+n_k=3n$。对每一个 λ_j，设其若尔当标准型为 $J(\lambda_j)=\lambda_j I_{nj}+N_j\in\mathbb{C}^{n_j\times n_j}$，其中 N_j 是一个至多在超对角线上有 1 的幂零矩阵(具体数量取决于 λ_j 的几何重数)，设 $X_j\in\mathbb{C}^{n\times n_j}$ 是对应的广义右特征向量，$Y_j\in\mathbb{C}^{n\times n_j}$ 是对应的广义左特征向量。显然，当 $j=2l+1,\cdots,k$ 时，$J(\lambda_j)$，X_j,Y_j 是实矩阵。当 $j=1,\cdots,l$ 时，令 $X_j=X_{jR}+iX_{jI}$，$Y_j=Y_{jR}+iY_{jI}$，其中 $X_{jR},X_{jI},Y_{jR},Y_{jI}\in\mathbb{R}^{n\times n_j}$，

$$J_R(\lambda_j)=\begin{bmatrix}\alpha_j I_{n_j}+N_j & \beta_j I_{n_j}\\ -\beta_j I_{n_j} & \alpha_j I_{n_j}+N_j\end{bmatrix}. \tag{1}$$

令

$$X:=\left[X_{1R},X_{1I},\cdots,X_{lR},X_{lI},\cdots,X_k\right]\in R^{n\times 3n}, \tag{2}$$

$$Y:=\left[Y_{1R},Y_{1I},\cdots,Y_{lR},Y_{lI},\cdots,Y_k\right]\in R^{n\times 3n}, \tag{3}$$

$$J:=diag\left[J_R(\lambda_1),\cdots,J_R(\lambda_l),J(\lambda_{2l+1}),\cdots,J(\lambda_k)\right]\in R^{3n\times 3n}, \tag{4}$$

$$X_L=\begin{bmatrix}X\\ XJ\\ XJ^2\end{bmatrix},Y_L=\begin{bmatrix}Y\\ YJ\\ YJ^2\end{bmatrix}. \tag{5}$$

显然，若 (X,Y,J) 是 $P(\lambda)$ 的若尔当对，当且仅当 X_L 和 $Y_L\in R^{3n\times 3n}$ 是非奇异的，并且满足

$$\begin{cases}MXJ^3+CXJ^2+DXJ+KX=0,\\ \left(J^{\mathrm{T}}\right)^3 Y^{\mathrm{T}}M+\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2 Y^{\mathrm{T}}C+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}D+Y^{\mathrm{T}}K=0.\end{cases} \tag{6}$$

下面，我们给出三次矩阵多项式 $P(\lambda)$ 的两种不同的谱分解及其证明。

3. 三次矩阵多项式的第一种谱分解

我们引入一个非奇异矩阵 Γ 定义为

$$\Gamma=\left(Y_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} D & C & M \\ C & M & 0 \\ M & 0 & 0 \end{bmatrix}X_L\right)^{-1}\in R^{3n\times 3n}. \tag{7}$$

下面给出三次矩阵多项式的第一种谱分解。

定理 1. 给定 $(X,Y,J)\in R^{n\times 3n}\times R^{n\times 3n}\times R^{3n\times 3n}$，它们分别由式(2)，式(3)和式(4)定义。假设由式(5)定义的 X_L 和 Y_L 都是非奇异的，那么存在矩阵 $M,C,D,K\in R^{n\times n}\times R^{n\times n}\times R^{n\times n}\times R^{n\times n}$ 且 M 是非奇异的使得式(6)成立，当且仅当存在一个根据式(7)定义的非奇异矩阵 Γ 满足

$$\Gamma J^{\mathrm{T}}=J\Gamma, X\Gamma Y^{\mathrm{T}}=0, XJ\Gamma Y^{\mathrm{T}}=0. \tag{8}$$

此时 $P(\lambda)$ 的系数矩阵 M,C,D,K 可被表示为

$$\begin{cases} M=\left(XJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}}\right)^{-1}, C=-MXJ^3\Gamma Y^{\mathrm{T}}M, D=-MXJ^4\Gamma Y^{\mathrm{T}}M+CM^{-1}C, \\ K=-MXJ^5\Gamma Y^{\mathrm{T}}M+CM^{-1}D-CM^{-1}CM^{-1}C+DM^{-1}C. \end{cases} \tag{9}$$

证明(必要性)根据式(6)，式(7)，我们可以推出：

$$\begin{aligned}
\Gamma^{-1}J &= Y^{\mathrm{T}}DXJ+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}CXJ+\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}}MXJ+Y^{\mathrm{T}}CXJ^2+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}MXJ^2+Y^{\mathrm{T}}MXJ^3 \\
&= Y^{\mathrm{T}}\left(DXJ+CXJ^2+MXJ^3\right)+\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}}MXJ+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}CXJ+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}MXJ^2 \\
&= -Y^{\mathrm{T}}KX+\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}}MXJ+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}CXJ+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}MXJ^2 \\
&= \left(\left(J^{\mathrm{T}}\right)^3Y^{\mathrm{T}}M+\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}}C+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}D\right)X+\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}}MXJ+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}CXJ+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}MXJ^2 \\
&= J^{\mathrm{T}}\left(\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}}MX+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}CX+Y^{\mathrm{T}}DX+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}MXJ+Y^{\mathrm{T}}CXJ+Y^{\mathrm{T}}MXJ^2\right) \\
&= J^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}.
\end{aligned}$$

这证明了 $\Gamma J^{\mathrm{T}}=J\Gamma$ 。

由 Γ 的定义我们可以得到：

$$X_L\Gamma Y^{\mathrm{T}}M=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I_n \end{bmatrix}. \tag{10}$$

由此我们可以推出 M 的表达式，并且这也说明

$$X\Gamma Y^{\mathrm{T}}=0,\ XJ\Gamma Y^{\mathrm{T}}=0. \tag{11}$$

将式(6)中的第一式右乘 ΓY^{T} ，我们得到：

$$MXJ^3\Gamma Y^{\mathrm{T}}+CXJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}}+DXJ\Gamma Y^{\mathrm{T}}+KX\Gamma Y^{\mathrm{T}}=0, \tag{12}$$

将 M 的表达式和式(11)代入式(12)，我们可以得到 $C=-MXJ^3\Gamma Y^{\mathrm{T}}M$ 。同理，将式(6)中的第一式右乘 $J\Gamma Y^{\mathrm{T}}$ ，我们得到：

$$MXJ^4\Gamma Y^{\mathrm{T}}+CXJ^3\Gamma Y^{\mathrm{T}}+DXJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}}+KXJ\Gamma Y^{\mathrm{T}}=0, \tag{13}$$

将 M 和 C 的表达式和式(11)代入式(13)，我们可以得到 $D=-MXJ^4\Gamma Y^{\mathrm{T}}M+CM^{-1}C$。将式(6)中的第一式右乘 $J^2\Gamma Y^{\mathrm{T}}$，我们得到：

$$MXJ^5\Gamma Y^{\mathrm{T}}+CXJ^4\Gamma Y^{\mathrm{T}}+DXJ^3\Gamma Y^{\mathrm{T}}+KXJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}}=0, \tag{14}$$

将 M,C 和 D 的表达式和式(11)代入式(14)，我们可以得到：

$$K=-MXJ^5\Gamma Y^{\mathrm{T}}M+CM^{-1}D-CM^{-1}CM^{-1}C+DM^{-1}C\text{。}$$

(充分性)由 M,C,D,K 的表达式和式(8)我们可以得到：

$$X_L\begin{bmatrix}\Gamma Y^{\mathrm{T}}D+J\Gamma Y^{\mathrm{T}}C+J^2\Gamma Y^{\mathrm{T}}M & \Gamma Y^{\mathrm{T}}C+J\Gamma Y^{\mathrm{T}}M & \Gamma Y^{\mathrm{T}}M\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & 0 & 0\\ 0 & I_n & 0\\ 0 & 0 & I_n\end{bmatrix}, \tag{15}$$

这表明 X_L 是非奇异的。而且我们也可以推出：

$$\begin{aligned}MXJ^3X_L^{-1}&=MXJ^3\begin{bmatrix}\Gamma Y^{\mathrm{T}}D+J\Gamma Y^{\mathrm{T}}C+J^2\Gamma Y^{\mathrm{T}}M & \Gamma Y^{\mathrm{T}}C+J\Gamma Y^{\mathrm{T}}M & \Gamma Y^{\mathrm{T}}M\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}-K & -D & -C\end{bmatrix},\end{aligned} \tag{16}$$

由此可以得到 $MXJ^3+CXJ^2+DXJ+KX=0$。

另外，由 M,C,D,K 的表达式和式(8)我们可以还得到：

$$\begin{bmatrix}MXJ^2\Gamma+CXJ\Gamma+DX\Gamma\\ CX\Gamma+MXJ\Gamma\\ MX\Gamma\end{bmatrix}Y_L^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}I_n & 0 & 0\\ 0 & I_n & 0\\ 0 & 0 & I_n\end{bmatrix}, \tag{17}$$

这表明 Y_L 是非奇异的。而且我们也可以推出：

$$\left(Y_L^{\mathrm{T}}\right)^{-1}\left(J^{\mathrm{T}}\right)^3Y^{\mathrm{T}}M=\begin{bmatrix}MXJ^2\Gamma+CXJ\Gamma+DX\Gamma\\ CX\Gamma+MXJ\Gamma\\ MX\Gamma\end{bmatrix}\left(J^{\mathrm{T}}\right)^3Y^{\mathrm{T}}M=\begin{bmatrix}-K\\ -D\\ -C\end{bmatrix}, \tag{18}$$

由此可以得到 $\left(J^{\mathrm{T}}\right)^3Y^{\mathrm{T}}M+\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}}C+J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}}D+Y^{\mathrm{T}}K=0$。从而可以得到式(6)成立。

4. 三次矩阵多项式的第二种谱分解

定理 2. 给定 $(X,Y,J)\in R^{n\times 3n}\times R^{n\times 3n}\times R^{3n\times 3n}$，它们分别由式(2)，式(3)和式(4)定义。假设由式(5)定义的 X_L 和 Y_L 都是非奇异的，那么存在矩阵 $M,C,D,K\in R^{n\times n}\times R^{n\times n}\times R^{n\times n}\times R^{n\times n}$ 且 M 和 K 是非奇异的使得式(6)成立，当且仅当存在一个根据式(7)定义的非奇异矩阵 Γ 满足

$$\Gamma J^{\mathrm{T}}=J\Gamma, X\Gamma Y^{\mathrm{T}}=0, XJ\Gamma Y^{\mathrm{T}}=0. \tag{19}$$

此时 $P(\lambda)$ 的系数矩阵 M,C,D,K 可被表示为

$$M=\left(XJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}}\right)^{-1},C=-MXJ^3\Gamma Y^{\mathrm{T}}M,D=CM^{-1}C-MXJ^4\Gamma Y^{\mathrm{T}}M,K=-\left(XJ^{-1}\Gamma Y^{\mathrm{T}}\right)^{-1}. \tag{20}$$

证明(必要性)与定理 1 的证明相同，我们可以根据式(6)和式(7)推出 $\Gamma J^{\mathrm{T}}=J\Gamma$。

我们将式(6)的第二个式子改写为

$$J^{\mathrm{T}}Y_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}D & C & M\\ C & M & 0\\ M & 0 & 0\end{bmatrix}+Y_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix}K & 0 & 0\\ 0 & -C & -M\\ 0 & -M & 0\end{bmatrix}=0. \tag{21}$$

因为 X_L 是非奇异的，在式(21)两边同时右乘 X_L 可得：

$$J^{\mathrm{T}}Y_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} D & C & M \\ C & M & 0 \\ M & 0 & 0 \end{bmatrix}X_L+Y_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & -C & -M \\ 0 & -M & 0 \end{bmatrix}X_L=0. \tag{22}$$

然后我们根据 Γ 的定义，可以得出：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} D & C & M \\ C & M & 0 \\ M & 0 & 0 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{-1} \\ 0 & M^{-1} & -M^{-1}CM^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}CM^{-1} & M^{-1}\left(CM^{-1}C-D\right)M^{-1} \end{bmatrix} \\ &= X_L\Gamma Y_L^{\mathrm{T}} \\ &= \begin{bmatrix} X\Gamma Y^{\mathrm{T}} & X\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & X\Gamma\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}} \\ XJ\Gamma Y^{\mathrm{T}} & XJ\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & XJ\Gamma\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}} \\ XJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}} & XJ^2\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & XJ^2\Gamma\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{23}$$

由上式可知 $X\Gamma X^{\mathrm{T}}=0$， $XJ\Gamma Y^{\mathrm{T}}=0$，以及

$$M=\left(XJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}}\right)^{-1},C=-MXJ^3\Gamma Y^{\mathrm{T}}M,D=CM^{-1}C-MXJ^4\Gamma Y^{\mathrm{T}}M, \tag{24}$$

这正是式(20)中 M,C,D 的表达式。将 Γ 代入式(22)，我们可以得到：

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & -C & -M \\ 0 & -M & 0 \end{bmatrix}^{-1} &= \begin{bmatrix} K^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M^{-1} \\ 0 & -M^{-1} & M^{-1}CM^{-1} \end{bmatrix} \\ &= -X_L\Gamma\left(J^{-1}\right)^{\mathrm{T}}Y_L^{\mathrm{T}} \\ &= -\begin{bmatrix} X\Gamma\left(J^{-1}\right)^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & X\Gamma Y^{\mathrm{T}} & X\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} \\ XJ\Gamma\left(J^{-1}\right)^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & XJ\Gamma Y^{\mathrm{T}} & XJ\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} \\ XJ^2\Gamma\left(J^{-1}\right)^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & XJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}} & XJ^2\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix},\end{aligned} \tag{25}$$

这再次证明了 $X\Gamma X^{\mathrm{T}}=0$， $XJ\Gamma Y^{\mathrm{T}}=0$，并且得到与式(24)相同的 M,C 的表达式，以及我们可以推出 $K=-\left(XJ^{-1}\Gamma Y^{\mathrm{T}}\right)^{-1}$。

(充分性)存在一个根据式(7)定义的 Γ 满足式(19)，那么

$$X_L\Gamma Y_L^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & X\Gamma\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}} \\ 0 & XJ\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & XJ\Gamma\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}} \\ XJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}} & XJ^2\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & XJ^2\Gamma\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{26}$$

是非奇异的，这可以得到 $XJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}}$ 是非奇异的。从而 M 可以定义成式(20)中的样子。我们再一次使用式(19)，则

$$X_L\Gamma\left(J^{-1}\right)^{\mathrm{T}}Y_L^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix} X\Gamma\left(J^{-1}\right)^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & XJ\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} \\ 0 & XJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}} & XJ^2\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{27}$$

是非奇异的，这可以得到 $XJ^{-1}\Gamma Y^{\mathrm{T}}$ 非奇异。从而 K 可以定义成式(20)中的样子。

现在将式(20)中定义的 M,C,D,K 代入式(26)和式(27)，可以得到：

$$\begin{aligned}\Gamma^{-1}&=Y_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & X\Gamma\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}} \\ 0 & XJ\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & XJ\Gamma\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}} \\ XJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}} & XJ^2\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & XJ^2\Gamma\left(J^{\mathrm{T}}\right)^2Y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1}X_L \\ &=Y_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} 0 & 0 & M^{-1} \\ 0 & M^{-1} & -M^{-1}CM^{-1} \\ M^{-1} & -M^{-1}CM^{-1} & M^{-1}\left(CM^{-1}C-D\right)M^{-1} \end{bmatrix}^{-1}X_L \\ &=Y_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} D & C & M \\ C & M & 0 \\ M & 0 & 0 \end{bmatrix}X_L,\end{aligned} \tag{28}$$

以及

$$\begin{aligned}-J^{\mathrm{T}}\Gamma^{-1}&=-Y_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} X\Gamma\left(J^{-1}\right)^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & XJ\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} \\ 0 & XJ^2\Gamma Y^{\mathrm{T}} & XJ^2\Gamma J^{\mathrm{T}}Y^{\mathrm{T}} \end{bmatrix}^{-1}X_L \\ &=Y_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} K^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -M^{-1} \\ 0 & -M^{-1} & M^{-1}CM^{-1} \end{bmatrix}^{-1}X_L \\ &=Y_L^{\mathrm{T}}\begin{bmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & -C & -M \\ 0 & -M & 0 \end{bmatrix}X_L.\end{aligned} \tag{29}$$

因为 X_L 和 Y_L 非奇异，由式(28)和式(29)可以证明式(22)成立，从而推出式(6)成立。

5. 总结

本文针对三次矩阵多项式的谱分解进行研究，利用三次矩阵多项式的若尔当对提出了两种不同的证明方法。这两种方法都利用了一个特殊矩阵 Γ 来表示系数矩阵，不同之处在于第一种证明方法对系统的特征值没有要求，而第二种方法要求系统没有零特征值。我们得到三次矩阵多项式的谱分解之后，可以将该理论应用到三次系统的实际问题当中，例如特征值配置问题和无溢出修正问题等，这些问题还需进一步的讨论研究。

基金项目

湖南省自然科学基金面上项目(项目号：2025JJ500340)，湖南省教育厅重点项目(项目号：23A0266)，

工程数学建模与分析湖南省重点实验室(项目号：2017TP1017)。长沙市自然科学基金项目(项目号：kq2502074)。

参考文献

[1] Zhao, K., Deng, F. and Liu, Z. (2024) Partial Quadratic Eigenvalue Assignment for Vibration Systems Using Receptances and System Matrices. *Journal of Sound and Vibration*, **575**, 118245. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2024.118245

[2] Zhang, J., Ouyang, H. and Yang, J. (2014) Partial Eigenstructure Assignment for Undamped Vibration Systems Using Acceleration and Displacement Feedback. *Journal of Sound and Vibration*, **333**, 1-12. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2013.08.040

[3] Tehrani, M.G. and Ouyang, H. (2012) Receptance-Based Partial Pole Assignment for Asymmetric Systems Using State-feedback. *Shock and Vibration*, **19**, 1135-1142. https://doi.org/10.1155/2012/564061

[4] Bai, Z., Yang, J. and Datta, B.N. (2016) Robust Partial Quadratic Eigenvalue Assignment with Time Delay Using the Receptance and the System Matrices. *Journal of Sound and Vibration*, **384**, 1-14. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.08.002

[5] Chu, M.T., Datta, B., Lin, W. and Xu, S. (2008) Spillover Phenomenon in Quadratic Model Updating. *AIAA Journal*, **46**, 420-428. https://doi.org/10.2514/1.31320

[6] Mao, X. and Dai, H. (2012) Finite Element Model Updating with Positive Definiteness and No Spill-Over. *Mechanical Systems and Signal Processing*, **28**, 387-398. https://doi.org/10.1016/j.ymssp.2011.11.002

[7] Chu, D., Chu, M. and Lin, W. (2009) Quadratic Model Updating with Symmetry, Positive Definiteness, and No Spill-over. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **31**, 546-564. https://doi.org/10.1137/080726136

[8] Qian, J., Cai, Y., Chu, D. and Tan, R.C.E. (2017) Eigenvalue Embedding of Undamped Vibroacoustic Systems with No-spillover. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **38**, 1190-1209. https://doi.org/10.1137/16m1100411

[9] Lancaster, P. and Prells, U. (2005) Inverse Problems for Damped Vibrating Systems. *Journal of Sound and Vibration*, **283**, 891-914. https://doi.org/10.1016/j.jsv.2004.05.003

[10] Chu, M.T. and Xu, S. (2009) Spectral Decomposition of Real Symmetric Quadratic Lambda -Matrices and Its Applications. *Mathematics of Computation*, **78**, 293-293. https://doi.org/10.1090/s0025-5718-08-02128-5

[11] Zhao, K. and Liu, J. (2024) Updating the Quadratic Asymmetric Vibration System with No-Spillover. *Applied Mathematical Modelling*, **127**, 379-395. https://doi.org/10.1016/j.apm.2023.12.013

[12] Zhao, K. and Liu, Z.Y. (2023) Eigenvalue Embedding of Damped Vibroacoustic System with No-Spillover. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, **44**, 1189-1217. https://doi.org/10.1137/22m1527416

[13] Duan, G. (2005) Parametric Approaches for Eigenstructure Assignment in High-Order Linear Systems. *International Journal of Control*, *Automation and Systems*, **3**, 419-429.

[14] Le, X. and Wang, J. (2015) Neurodynamics-Based Robust Pole Assignment for High-Order Descriptor Systems. *IEEE Transactions on Neural Networks and Learning Systems*, **26**, 2962-2971. https://doi.org/10.1109/tnnls.2015.2461553