

# 一类非遗传代数的态射范畴的李代数

冉玲玲

福州大学数学与统计学院, 福建 福州

收稿日期: 2025年8月28日; 录用日期: 2025年9月27日; 发布日期: 2025年10月20日

## 摘要

设 $A$ 是一类特定的非遗传代数,  $C_2(\mathcal{P})$ 是投射 $A$ -模的态射范畴。本文证明了 $C_2(\mathcal{P})$ 存在Hall多项式, 给出其退化Hall李代数的乘法公式, 由此实现了Heisenberg李代数的第 $n$ 个中心扩张的商。

## 关键词

Hall代数, 态射范畴, 李代数, 非遗传代数

# Lie Algebras Arising from Morphism Categories of Certain Nonhereditary Algebras

Lingling Ran

School of Mathematics and Statistics, Fuzhou University, Fuzhou Fujian

Received: August 28, 2025; accepted: September 27, 2025; published: October 20, 2025

## Abstract

In this paper, we establish the existence of Hall polynomials for  $C_2(\mathcal{P})$  when  $\mathcal{P}$  is the full subcategory of projective  $A$ -modules, where  $A$  is a certain nonhereditary algebra. We then derive multiplication formulas for the degenerate Hall Lie algebra, which is spanned by the isomorphism classes of indecomposable objects in  $C_2(\mathcal{P})$ .

## Keywords

Hall Algebra, Morphism Category, Lie Algebra, Nonhereditary Algebra

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

1972 年 Gabriel 提出了箭图和表示的概念, 建立了 Dynkin 型箭图的不可分解表示的维数向量与半单李代数的正根的一一对应[1]。Kac 进一步利用代数几何和不变量理论的技术将 Gabriel 的工作推广到任意型箭图[2] [3]。

随后, 1990 年, Ringel 定义了一类有限域上有限维代数  $A$  的结合代数  $\mathcal{H}(A)$ , 称之为 Ringel-Hall 代数, 证明了当  $A$  是表示有限型的遗传代数时,  $\mathcal{H}(A)$  实现了相应量子包络代数的正部分, 提供了一种通过 Hall 代数方法实现李代数的构造[4]。

近年来, Bridgeland 在 2013 年引入投射  $A$ -模的 2-周期复形的态射范畴  $C_{\mathbb{Z}_2}(\mathcal{P})$ , 定义了一类 Hall 代数, 从而实现了整个量子群[5]。进而, Chen 等在  $A$  是有限表示型时实现了单李代数[6]。最近 Chen 等利用投射  $A$ -模的态射范畴实现了 Heisenberg 李代数的中心扩张[7]。受上述文献启发, 本文研究  $A$  是非遗传代数时, 态射范畴的 Hall 李代数的结构变化。

我们的目标是研究导出等价的李代数之间的关系。本文中, 给定一个含  $q$  个元素的有限域  $k$ 。设  $Q$  是箭图

$$1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n,$$

记  $A = kQ / \langle \alpha_1 \alpha_2, \alpha_2 \alpha_3, \dots, \alpha_{n-2} \alpha_{n-1} \rangle$ ,  $\mathcal{A} = A$ -模范畴。这还是一个整体维数为  $n$  的 gentle 代数, 它是关于 2 项复形的 Hall 代数研究中的一个有意义的例子。本文克服了对  $A$  的投射态射范畴  $C_2(\mathcal{P})$  的一次扩张群的刻画, 证明了 Hall 代数  $\mathcal{H}(C_2(\mathcal{P}))$  存在 Hall 多项式。主要使用了模范畴的同调性质, 特别是 Auslander-Reiten 理论。

记号  $\mathcal{P} \subset \mathcal{A}$ ,  $\mathcal{I} \subset \mathcal{A}$  分别表示由  $\mathcal{A}$  的投射对象及内射对象构成的满子范畴。 $\text{Ind}(\mathcal{P})$  表示  $\mathcal{P}$  的不可分解投射对象集,  $S_i$  表示  $A$ -模对应顶点  $i$  的单模,  $P_i, I_i$  分别表示  $S_i$  的投射盖和内射包。符号  $a_X$  表示  $A$  中对象  $X$  的自同构群  $\text{Aut}(X)$  的基数。

## 2. 态射范畴与 Hall 代数

设范畴  $C_2(\mathcal{A})$  中的对象是  $\mathcal{A}$  中的态射  $M_{-1} \xrightarrow{f} M_0$ 。  $M_{-1} \xrightarrow{f} M_0$  到  $N_{-1} \xrightarrow{g} N_0$  的态射  $(\mu, \nu)$ , 满足  $g\mu = \nu f$ , 则称  $C_2(\mathcal{A})$  是  $\mathcal{A}$  的态射范畴。  $C_2(\mathcal{P})$  中对象是  $f: P_{-1} \rightarrow P_0$ , 其中  $P_{-1}, P_0 \in \mathcal{P}$ , 是  $C_2(\mathcal{A})$  的满子范畴。类似地, 可以定义范畴  $C_2(\mathcal{I})$ 。

本文考虑  $C_2(\mathcal{P})$  中的三类对象:

$$K_p = P \xrightarrow{1} P$$

$$Z_p = P \longrightarrow 0$$

$$T_M = Q_M \xrightarrow{f_M} P_M$$

其中  $P \in \mathcal{P}$ ,  $M \in \mathcal{A}$ ,  $Q_M \xrightarrow{f_M} P_M \xrightarrow{\pi_M} M \longrightarrow 0$  是  $M$  的极小投射表现。

**引理 2.1 [8]**  $C_2(\mathcal{P})$  中全体不可分解对象为

$$K_{P_i}, Z_{P_i}, T_{P_i}, T_{S_i}, i = 1, \dots, n.$$

**注记 2.2** 文献[9]-[13]已经研究了态射范畴的 AR-理论。设  $H^i$  是  $\mathbf{Ch}(\mathcal{A})$  到  $\mathcal{A}$  的上同调函子。文献[8]中证明,  $H^0$  将  $C_2(\mathcal{P})$  中的几乎可裂正合对(conflation)映射到  $\mathcal{A}$  的几乎可裂序列。设  $A$  是 Artin 代数,  $C_n(\mathcal{P})$  表示  $\mathcal{P}$  的复形范畴, 即包含全体复形  $X = (X^i, d_X^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ , 当  $i \notin \{1, \dots, n\}$  时,  $X^i = 0$ 。在文献[14]中证明了  $C_n(\mathcal{P})$  存在几乎可裂正合对。特别地, 可以得到  $C_2(\mathcal{P})$  的几乎可裂正合对。

**命题 2.3**  $C_2(\mathcal{P})$  的几乎可裂正合对形如

$$\begin{aligned} T_{S_1} &\hookrightarrow Z_{P_2} \oplus K_{R_1} \rightarrow Z_{R_1}, \\ T_{S_{i+1}} &\hookrightarrow T_{P_i} \oplus K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \rightarrow T_{S_i}, \quad (i=1, \dots, n-1), \\ T_{P_i} &\hookrightarrow T_{S_i} \rightarrow Z_{P_{i+1}}, \quad (i=1, \dots, n-1), \\ T_{P_n} &\hookrightarrow K_{P_n} \oplus T_{P_{n-1}} \rightarrow T_{S_{n-1}}. \end{aligned}$$

并且每个几乎可裂正合对中的态射都是典范态射。

**定义 2.4** (整) Ringel-Hall 代数  $\mathcal{H}(\mathcal{A})$  是以  $\mathcal{A}$  中对象同构类为基的自由阿贝尔群, 其乘法定义为

$$[X] \cdot [Y] = \sum_{[Z]} F_{XY}^Z [Z],$$

称  $F_{XY}^Z$  为 Hall 数。

由 Riedtmann-Peng 公式[15][16], 设  $X, Y, Z$  是  $\mathcal{A}$  中对象, 则

$$F_{XY}^Z = \frac{|\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y)_Z| a_Z}{|\text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)| a_X a_Y},$$

其中  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y)_Z$  表示  $\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(X, Y)$  中形如  $0 \rightarrow Y \rightarrow Z \rightarrow X \rightarrow 0$  的短正合列的等价类构成的集合。

### 3. $C_2(\mathcal{P})$ 的 Hall 数

本节首先给出了  $C_2(\mathcal{P})$  的某些关键同调性质, 并使用 Riedtmann-Peng 公式计算得到了  $C_2(\mathcal{P})$  的 Hall 数。后文用  $X$  表示  $C_2(\mathcal{P})$  中对象  $(X_{-1} \rightarrow X_0)$ 。

**引理 3.1** [[8]命题 5.3~5.4] 设  $X, Y \in C_2(\mathcal{P})$ , 则

$$D\text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(X, Y) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0(Y), H^0(\tau X)) \cong \overline{\text{Hom}_{C_2(\mathcal{P})}(Y, \tau X)},$$

其中对偶函子  $D = \text{Hom}_k(-, k/\text{rad}k)$ ,  $F$  是由  $D(A) \otimes_{\mathcal{A}}$ -诱导的使  $C_2(\mathcal{P})$  和  $C_2(\mathcal{I})$  等价的函子,  $\tau X \in C_2(\mathcal{P})$  使得, 若  $H^{-1}(F(X))$  非零, 那么  $H^0(\tau X) = H^{-1}(F(X))$ , 否则  $\tau X = 0$ 。

**引理 3.2** 设  $P \in \text{Ind } \mathcal{P}$ , 单  $A$ -模  $S_i$ , 则

$$\begin{aligned} |\text{Hom}_{C_2(\mathcal{P})}(Z_P, T_{S_i})| &= |\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, S_{i+2})|; \\ |\text{Hom}_{C_2(\mathcal{P})}(T_{S_i}, T_P)| &= |\text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_i, P)|; \\ a_{K_P} &= a_P, a_{Z_P} = a_P, a_{T_P} = a_P, a_{T_{S_i}} = a_{S_i}. \end{aligned}$$

**证明:** 对任意态射  $(g, 0) \in \text{Hom}_{C_2(\mathcal{P})}(Z_P, T_{S_i})$ , 由核的泛性质, 存在  $l_g \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, S_{i+2})$  使得  $f_{S_i} l_g = g$ , 从而定义映射

$$\varphi: \text{Hom}_{C_2(\mathcal{P})}(Z_P, T_{S_i}) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P, S_{i+2}), (g, 0) \mapsto l_g,$$

可以直接验证  $\varphi$  是同构。类似地, 可以证明(2)。

由[[8]命题 3.1],  $a_{K_P} = a_P, a_{Z_P} = a_P, a_{T_P} = a_P$ 。下面证明  $a_{T_{S_i}} = a_{S_i}$ 。由同调代数的比较引理, 得到满态射

$$\phi: \text{Hom}_{C_2(\mathcal{P})}(T_{S_i}, T_{S_i}) \twoheadrightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_i, S_i),$$

设  $f = (f_{-1}, f_0), g = (g_{-1}, g_0) \in \text{Hom}_{C_2(\mathcal{P})}(T_{S_i}, T_{S_i})$ , 若  $\pi_{S_i} f_0 = \pi_{S_i} g_0$ , 那么由核的泛性质知存在  $h \in \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_i, S_{i+1}) = 0$ , 使得  $f_0 - g_0 = 0$ , 即  $f_0 = g_0$ 。类似地, 可以得到  $f_{-1} = g_{-1}$ 。因此  $\phi$  是同构。

**引理 3.3** 设  $X \in \text{Ind}C_2(\mathcal{P})$ , 单  $A$ -模  $S_i$ , 则

$$\begin{aligned} \left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(T_{S_i}, T_{S_{i+1}})_{K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}} \right| &= a_{S_{i+1}}; \\ \left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(T_{S_i}, T_{P_{i+1}})_{K_{P_{i+1}} \oplus T_{P_i}} \right| &= a_{S_i}; \\ \left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(T_{S_i}, X)_L \right| &= 1, \text{ if } X \not\cong T_{S_{i+1}} \text{ or } T_{P_{i+1}}. \end{aligned}$$

**证明:** 由引理 2.1 和引理 3.1 知

$$\text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(T_{S_i}, X) \cong D\text{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0(X), H^0(\tau T_{S_i})),$$

由[[8]命题 5.5]和命题 2.3 知,  $H^0(\tau T_{S_i}) = S_{i+1}$ 。若  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0(X), S_{i+1}) = 0$ , 那么  $\text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(T_{S_i}, X) = 0$ 。否则  $\text{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0(X), S_{i+1}) \neq 0$ , 从而  $H^0(X) = S_{i+1}$  或者  $H^0(X) = P_{i+1}$ 。因此, 只需考虑以下两种情形。

情形 1.  $X = T_{S_{i+1}}$ 。这种情形下不难看出

$$\text{Hom}_{C_2(\mathcal{P})}(T_{S_{i+1}}, T_{S_{i+1}}) = \{f \mid f \in \text{Aut}T_{S_{i+1}} \text{ 或 } f = 0\},$$

由引理 3.1, 只需讨论  $L$  的两种情况。

- (i) 如果  $L = T_{S_i} \oplus T_{S_{i+1}}$ , 那么  $\left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(T_{S_i}, X)_L \right| = 1$ 。
- (ii) 如果  $L = K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}$ , 那么  $\left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(T_{S_i}, X)_L \right| = a_{S_{i+1}}$ 。

情形 2.  $X = T_{P_{i+1}}$ 。类似地, 可以得到

- (i) 如果  $L = T_{S_i} \oplus T_{P_{i+1}}$ , 那么  $\left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(T_{S_i}, X)_L \right| = 1$ 。
- (ii) 如果  $L = K_{P_{i+1}} \oplus T_{P_i}$ , 那么  $\left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(T_{S_i}, X)_L \right| = a_{S_i}$ 。

**引理 3.4 [17]** 设  $X, Y, M, N \in \mathcal{A}$ , 则

$$\left| {}_M \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)_N \right| = \sum_L a_L F_{LM}^X F_{NL}^Y,$$

其中  ${}_M \text{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y)_N = \{f: X \rightarrow Y \mid \ker f \cong M \text{ and } \text{coker } f \cong N\}$ 。

**引理 3.5** 设  $L \in C_2(\mathcal{P})$ ,  $P_i, P_j \in \text{Ind } \mathcal{P}$ , 单  $A$ -模  $S_i$ , 则

$$\left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(Z_{P_j}, T_{S_i})_L \right| = \left| {}_U \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_j, S_i)_V \right|, \left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(Z_{P_j}, T_{P_i})_L \right| = \left| {}_{U'} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_j, P_i)_{V'} \right|,$$

其中  $U = H^{-1}(L)/S_{i+2}$ ,  $V = H^0(L)$  以及  $U' = H^{-1}(L)$ ,  $V' = H^0(L)$ 。

**证明:** 只需证明第一个等式。第二个等式类似可证。由引理 3.1 以及  $S_1 = I_1, P_j = I_{j+1}$  知

$$\text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(Z_{P_j}, T_{S_i}) \cong D\text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_i, P_{j-1}) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_j, S_i), j = 2, \dots, n,$$

$$\text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(Z_{P_1}, T_{S_i}) \cong D\text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_i, S_1) \cong \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_1, S_i), j = 1.$$

取正合对  $T_{S_i} \twoheadrightarrow L \twoheadrightarrow Z_{P_j}$  的零同调, 由蛇引理知, 存在态射  $\delta: P_{j+1} \rightarrow S_i$  使得下述序列正合。

$$0 \rightarrow S_{i+2} \rightarrow H^{-1}(L) \xrightarrow{\delta} P_j \rightarrow S_i \rightarrow H^0(L) \rightarrow 0,$$

那么由[18], 可以得到

$$\left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(Z_{P_j}, T_{S_i}) \right|_L = \left| {}_U \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_j S_i)_V \right|,$$

其中  $U = H^{-1}(L)/S_{i+2}$ ,  $V = H^0(L)$ 。类似地, 可以证明  $j=1$  时也成立。

**引理 3.6** 设  $X, Y \in \text{Ind } C_2(\mathcal{P})$ , 单  $A$ -模  $S_i$ , 则

$$F_{T_{S_i} T_{S_{i+1}}}^{K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}} = \frac{a_{P_i} a_{P_{i+1}} a_{P_{i+2}}}{a_{S_i}}, F_{T_{S_i} T_{P_{i+1}}}^{K_{P_{i+1}} \oplus T_{P_i}} = a_{P_i} a_{P_i},$$

$$F_{T_{S_i} X}^{T_{S_i} \oplus X} = \left| \text{Hom}_{\mathcal{A}}(H^0(X), S_i) \right| (X \not\cong T_{S_{i+1}}, X \not\cong T_{P_{i+1}}),$$

$$F_{Z_{P_j} T_{S_i}}^L = \frac{\sum_M a_M F_{MU}^{P_j} F_{VM}^{S_i}}{\left| \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_j, S_{i+2}) \right|} \frac{a_L}{a_{P_j} a_{S_i}}, F_{Z_{P_j} T_{P_i}}^L = \sum_M a_M F_{MU}^{P_j} F_{VM}^{P_i} \frac{a_L}{a_{P_j} a_{P_i}}.$$

**证明:** 只需证明第一个等式, 其余等式类似可证。由 Reidtmann-Peng 公式知

$$F_{T_{S_i} T_{S_{i+1}}}^{K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}} = \frac{\left| \text{Ext}(T_{S_i}, T_{S_{i+1}})_{K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}} \right|}{\left| \text{Hom}(T_{S_i}, T_{S_{i+1}}) \right|} \frac{a_{K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}}}{a_{T_{S_i}} a_{T_{S_{i+1}}}},$$

因为

$$\left| \text{Hom}(K_{P_{i+1}}, Z_{P_{i+2}}) \right| \left| \text{Hom}(K_{P_{i+1}}, T_{P_i}) \right| \left| \text{Hom}(Z_{P_{i+2}}, K_{P_{i+1}}) \right| \left| \text{Hom}(Z_{P_{i+2}}, T_{P_i}) \right| \left| \text{Hom}(T_{P_i}, K_{P_{i+1}}) \right| \left| \text{Hom}(T_{P_i}, Z_{P_{i+2}}) \right| = 1$$

所以由引理 3.2, 引理 3.3 可知

$$\begin{aligned} F_{T_{S_i} T_{S_{i+1}}}^{K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}} &= \frac{\left| \text{Ext}(T_{S_i}, T_{S_{i+1}})_{K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}} \right|}{\left| \text{Hom}(T_{S_i}, T_{S_{i+1}}) \right|} \frac{a_{K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}}}{a_{T_{S_i}} a_{T_{S_{i+1}}}} \\ &= \frac{a_{S_{i+1}}}{\left| \text{Hom}(S_i, S_{i+1}) \right|} \frac{a_{K_{P_{i+1}}} a_{Z_{P_{i+2}}} a_{T_{P_i}}}{a_{S_i} a_{S_{i+1}}} \\ &= \frac{a_{P_i} a_{P_{i+1}} a_{P_{i+2}}}{a_{S_i}}. \end{aligned}$$

#### 4. $\mathcal{L}(A)$ 的结构

本节首先说明了  $C_2(\mathcal{P})$  中 Hall 多项式存在, 并且计算了  $C_2(\mathcal{P})$  中不可分解对象的 Hall 多项式, 刻画了 Ringel-Hall 李代数的结构。本节中有关 Hall 多项式的内容参考文献[4] [19]。

**引理 4.1** 下述三个命题等价。

- (1) 对任意  $X, Y, Z \in C_2(\mathcal{P})$ , Hall 多项式  $\varphi_{XY}^Z$  存在;
- (2) 若  $X \in \text{Ind } C_2(\mathcal{P})$ ,  $Y, Z \in C_2(\mathcal{P})$ , Hall 多项式  $\varphi_{XY}^Z$  存在;
- (3) 若  $X, Y \in \text{Ind } C_2(\mathcal{P})$ ,  $Z \in C_2(\mathcal{P})$ , Hall 多项式  $\varphi_{XY}^Z$  存在。

**证明:** 文献[20]中已证(1)、(2)等价, 类似可证(2)、(3)等价。

**命题 4.2**  $C_2(\mathcal{P})$  存在 Hall 多项式。

**证明:** 由引理 4.1 知, 只需对不可分解对象  $X$  和  $Y$  以及任意  $Z$ , 证明 Hall 多项式  $\varphi_{XY}^Z$  存在. 本文讨论  $X = T_{S_i}, Y = T_{S_j}$  的情形, 其余情形类似可证.

由引理 3.3 知, 此时  $Z = K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}$ , 又由引理 3.6 知  $F_{T_{S_i} T_{S_{i+1}}}^{K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}} = \frac{a_{P_i} a_{P_{i+1}} a_{P_{i+2}}}{a_{S_i}}$ , 因为

$$F_{P_i P_j}^{P_i \oplus P_j} = |\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_j, P_i)|, F_{P_i S_j}^{P_i \oplus S_j} = |\text{Hom}_{\mathcal{A}}(S_j, P_i)|, F_{S_i P_j}^{S_i \oplus P_j} = |\text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_j, S_i)|, F_{S_i S_i}^{S_i \oplus S_i} = a_{S_i},$$

所以

$$F_{T_{S_i} T_{S_{i+1}}}^{K_{P_{i+1}} \oplus Z_{P_{i+2}} \oplus T_{P_i}} = \frac{F_{P_i P_i}^{P_i \oplus P_i} F_{P_{i+1} P_{i+1}}^{P_{i+1} \oplus P_{i+1}} F_{P_{i+2} P_{i+2}}^{P_{i+2} \oplus P_{i+2}}}{F_{S_i S_i}^{S_i \oplus S_i}}$$

故  $C_2(\mathcal{P})$  存在 Hall 多项式存在当且仅当  $\mathcal{A}$  存在 Hall 多项式.  $\mathcal{A}$  的 Auslander-Reiten 箭图是直向的, 从而由 [4] 知  $\mathcal{A}$  存在 Hall 多项式.

因此可以定义(退化) Ringel-Hall 代数  $\mathcal{H}_1(C_2(\mathcal{P}))$ , 其乘法为

$$X \cdot Y = \sum_Z \varphi_{XY}^Z(q)(1)Z,$$

从而有交换乘法

$$[X, Y] = \sum_Z (\varphi_{XY}^Z(q)(1) - \varphi_{YX}^Z(q)(1))Z.$$

设  $\mathcal{L}$  表示由  $C_2(\mathcal{P})$  中不可分解对象同构类为基的  $\mathbb{Q}$ -向量空间, 下面确立了  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(C_2(\mathcal{P}))$  的乘法公式.

**命题 4.3** 设  $X \in \text{Ind } C_2(\mathcal{P})$ ,  $P_i, P_j \in \text{Ind } \mathcal{P}$  以及单  $A$ -模  $S_i, S_j$ , 则

$$[K_{P_i}, X] = 0, [Z_{P_i}, Z_{P_j}] = 0, [T_{P_i}, T_{P_j}] = 0, [Z_{P_i}, T_{S_j}] = 0, [T_{S_i}, T_{S_j}] = 0, [T_{S_i}, T_{P_j}] = 0.$$

**证明:** 由引理 3.6 和命题 4.2 计算可得  $\varphi_{T_{S_i} T_{S_j}}^L = 0$ , 于是  $[T_{S_i}, T_{S_j}] = 0$ . 类似地, 可以验证另外几种情况也成立.

**命题 4.4** 设  $P \in \text{Ind } \mathcal{P}$ , 那么在  $\mathcal{L}$  中有

$$[Z_{P_i}, T_P] = \begin{cases} K_{P_i}, & \text{若 } P = P_i, \text{ 且 } i = 1, \dots, n \\ T_{S_{i-1}}, & \text{若 } P = P_{i-1}, \text{ 且 } i = 2, \dots, n \\ 0, & \text{否则} \end{cases}$$

**证明:** 考虑正合对

$$T_P \twoheadrightarrow M = (P_i \xrightarrow{f_i} P) \twoheadrightarrow Z_{P_i},$$

Hall 数  $F_{Z_{P_i} T_P}^M \neq 0$  当且仅当  $M \not\cong T_P \oplus Z_{P_i}$ , i.e.,  $f_i \neq 0$ . 这等价于  $P = P_i$  或者  $P = P_{i-1}$ . 于是处理以下三种情形.

情形 1.  $P = P_i$ . 该种情形下可得  $0 \neq f_i \in \text{End}_{\mathcal{A}}(P_i)$ , 因此  $f_i \in \text{Aut}_{\mathcal{A}}(P_i)$  从而有  $M \cong K_{P_i}$ . 由引理 3.4 知

$$\left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(Z_{P_i}, T_{P_i})_{K_{P_i}} \right| = \left| {}_0 \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_i, P_i)_0 \right| = \sum_G a_G F_{G0}^{P_i} F_{0G}^{P_i} = a_{P_i},$$

直接计算可得

$$F_{Z_{P_i} T_{P_i}}^{K_{P_i}} = \frac{|\text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(Z_{P_i}, C_{P_i})_{K_{P_i}}| a_{P_i}}{|\text{Hom}_{C_2(\mathcal{P})}(Z_{P_i}, C_{P_i})| a_{P_i} a_{P_i}} = 1.$$

因此,

$$[Z_{P_i}, T_{P_i}] = \sum_M (\varphi_{Z_{P_i} T_{P_i}}^M(q)(1) - \varphi_{T_{P_i} Z_{P_i}}^M(q)(1)) M = \varphi_{Z_{P_i} C_{P_i}}^{K_{P_i}}(q)(1) K_{P_i} = K_{P_i}.$$

情形 2.  $P = P_{i-1}$ 。该种情形类似可得  $M \cong T_{S_{i-1}}$ 。由引理 3.4 知

$$\left| \text{Ext}_{C_2(\mathcal{P})}^1(Z_{P_i}, T_{P_{i-1}})_{T_{S_{i-1}}} \right| = \left| {}_{S_{i+1}} \text{Hom}_{\mathcal{A}}(P_i, P_{i-1})_{S_{i-1}} \right| = \sum_G a_G F_{GS_{i+1}}^{P_i} F_{S_{i-1}G}^{P_{i-1}},$$

通过计算可得

$$\begin{aligned} \sum_G a_G F_{GS_{i+1}}^{P_i} F_{S_{i-1}G}^{P_{i-1}} &= \sum_G a_G \frac{|\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(G, S_{i+1})_{P_i}| a_{P_i}}{a_G a_{S_{i+1}}} \frac{|\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(S_{i-1}, G)_{P_{i-1}}| a_{P_{i-1}}}{a_G a_{S_{i-1}}} \\ &= a_{S_i} \frac{|\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(S_i, S_{i+1})_{P_i}| |\text{Ext}_{\mathcal{A}}^1(S_{i-1}, S_i)_{P_{i-1}}| a_{P_i} a_{P_{i-1}}}{a_{S_i} a_{S_{i+1}} a_{S_i} a_{S_{i-1}}} \\ &= \frac{a_{P_i} a_{P_{i-1}}}{a_{S_{i+1}}} \end{aligned}$$

于是  $F_{Z_{P_i} T_{P_{i-1}}}^{T_{S_{i-1}}} = \frac{a_{S_{i-1}}}{a_{S_{i+1}}}$ , 因此

$$[Z_{P_i}, T_{P_{i-1}}] = \sum_M (\varphi_{Z_{P_i} T_{P_{i-1}}}^M(q)(1) - \varphi_{T_{P_{i-1}} Z_{P_i}}^M(q)(1)) M = \varphi_{Z_{P_i} C_{P_i}}^{T_{S_i}}(q)(1) T_{S_i} = T_{S_i}.$$

情形 3. 否则,  $f_i = 0$ , 于是  $M = Z_{P_i} \oplus C_{P_i}$ , 因此  $[Z_{P_i}, C_{P_i}] = 0$ 。

接下来, 将本文的 Hall 李代数与文献[7]中由  $B$ -模范畴的投射模的态射范畴产生的 Heisenberg 李代数的中心扩张进行比较, 其中  $B$  是下述箭图的路代数

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n.$$

回顾[7]知, 满足下列生成关系

$$[C_{S_i}, C_{S_j}] = 0, [Z_{P_i}, Z_{P_j}] = 0, [K_{P_i}, C_{S_j}] = 0, [K_{P_i}, Z_{P_j}] = 0, [C_{S_i}, Z_{P_j}] = \delta_{ij} K_{P_i},$$

的 Lie 子代数  $\mathcal{L}_B = \langle C_{S_i}, Z_{P_i} \rangle \subseteq \mathcal{H}_1(C_2(\mathcal{P}_B))$  是 Heisenberg 李代数的第  $n$  个中心扩张。

定义映射

$$\varphi: \mathcal{L}_B \longrightarrow \mathcal{L}_A,$$

将  $\mathcal{L}_B$  中的基元映成  $\mathcal{L}_A$  中的基元

$$K_{P_i} \mapsto K_{P_i}, Z_{P_i} \mapsto Z_{P_i}, C_{P_i} \mapsto T_{P_i}, C_{S_i} \mapsto T_{S_i}, C_{I_i} \mapsto 0 (i \neq n).$$

**定理 4.5** 映射  $\varphi$  是一个满态射。

**证明:** 由命题 4.3, 命题 4.4 和[7] Theorem 5.10]可以直接验证  $\varphi$  保持李括号, 而  $\varphi$  满射是显然的, 从而得证。

## 5. 结论与讨论

本文发现了导出等价的两个模范畴的 Hall 李代数不一定同构, 并建立了这两个 Hall 李代数之间的满同态。本文尚未处理一般的非遗传代数的情形, 期望对一般的情形仍有上述结论成立。

## 基金项目

福建省自然科学基金资助项目(2024J01361)。

## 参考文献

- [1] Gabriel, P. (1972) Unzerlegbare Darstellungen I. *Manuscripta Mathematica*, **6**, 71-103. <https://doi.org/10.1007/bf01298413>
- [2] Kac, V.G. (1980) Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory. *Inventiones Mathematicae*, **56**, 57-92. <https://doi.org/10.1007/bf01403155>
- [3] Kac, V.G. (1982) Infinite Root Systems, Representations of Graphs and Invariant Theory, II. *Journal of Algebra*, **78**, 141-162. [https://doi.org/10.1016/0021-8693\(82\)90105-3](https://doi.org/10.1016/0021-8693(82)90105-3)
- [4] Ringel, C.M. (1990) Hall Algebras and Quantum Groups. *Inventiones Mathematicae*, **101**, 583-591. <https://doi.org/10.1007/bf01231516>
- [5] Bridgeland, T. (2013) Quantum Groups via Hall Algebras of Complexes. *Annals of Mathematics*, **177**, 739-759. <https://doi.org/10.4007/annals.2013.177.2.9>
- [6] Chen, Q. and Deng, B. (2015) Cyclic Complexes, Hall Polynomials and Simple Lie Algebras. *Journal of Algebra*, **440**, 1-32. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2015.04.043>
- [7] Chen, Q. and Zhang, L. (2024) Hall Algebra of Morphism Category. *Czechoslovak Mathematical Journal*, **74**, 1145-1164. <https://doi.org/10.21136/cmj.2024.0103-24>
- [8] Raymundo, B. (2004) The Category of Morphisms between Projective Modules. *Communications in Algebra*, **32**, 4303-4331. <https://doi.org/10.1081/agb-200034145>
- [9] Eshraghi, H. (2013) The Auslander-Reiten Translation in Morphism Categories. *Journal of Algebra and Its Applications*, **13**, Article ID: 1350119. <https://doi.org/10.1142/s0219498813501193>
- [10] Hafezi, R. and Eshraghi, H. (2023) Determination of Some Almost Split Sequences in Morphism Categories. *Journal of Algebra*, **633**, 88-113.
- [11] Hafezi, R. and Eshraghi, H. (2025) From Morphism Categories to Functor Categories. *Bulletin of the Malaysian Mathematical Sciences Society*, **48**, Article No. 88. <https://doi.org/10.1007/s40840-025-01863-z>
- [12] Ringel, C. and Schmidmeier, M. (2007) The Auslander-Reiten Translation in Submodule Categories. *Transactions of the American Mathematical Society*, **360**, 691-716. <https://doi.org/10.1090/s0002-9947-07-04183-9>
- [13] Xiong, B., Zhang, P. and Zhang, Y. (2012) Auslander-Reiten Translations in Monomorphism Categories. *Forum Mathematicum*, **26**, 863-912. <https://doi.org/10.1515/forum-2011-0003>
- [14] Bautista, R., Souto Salorio, M.J. and Zuazua, R. (2005) Almost Split Sequences for Complexes of Fixed Size. *Journal of Algebra*, **287**, 140-168. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2005.01.032>
- [15] Peng, L. (1997) Some Hall Polynomials for Representation-Finite Trivial Extension Algebras. *Journal of Algebra*, **197**, 1-13. <https://doi.org/10.1006/jabr.1997.7113>
- [16] Riedtmann, C. (1994) Lie Algebras Generated by Indecomposables. *Journal of Algebra*, **170**, 526-546. <https://doi.org/10.1006/jabr.1994.1351>
- [17] Sevenhant, B. and Van den Bergh, M. (1999) On the Double of the Hall Algebra of a Quiver. *Journal of Algebra*, **221**, 135-160. <https://doi.org/10.1006/jabr.1999.7958>
- [18] Ding, M., Xu, F. and Zhang, H. (2020) Acyclic Quantum Cluster Algebras via Hall Algebras of Morphisms. *Mathematische Zeitschrift*, **296**, 945-968. <https://doi.org/10.1007/s00209-020-02465-0>
- [19] Ringel, C.M. (1992) Lie Algebras (Arising in Representation Theory). In: Tachikawa, H. and Brenner, S., Eds., *Representations of Algebras and Related Topics*, Cambridge University Press, 284-291. <https://doi.org/10.1017/cbo9780511661853.010>
- [20] Nasr-Isfahani, A.R. (2010) Hall Polynomials for Nakayama Algebras. *Algebras and Representation Theory*, **15**, 483-490. <https://doi.org/10.1007/s10468-010-9253-3>