

# 利用形心坐标公式计算曲面积分

雷竞雄

武警警官学院基础部, 四川 成都

收稿日期: 2025年9月8日; 录用日期: 2025年10月15日; 发布日期: 2025年10月28日

## 摘要

形心坐标(几何中心坐标)在计算多元函数积分中是一个非常有用的工具, 但是具体的使用场景较为模糊, 本文给出形心坐标公式在计算曲面积分上的应用情况。

## 关键词

形心坐标公式, 曲面积分

# Calculating the Surface Integral Using the Centroid Coordinate Formula

Jingxiong Lei

Basic Department, Officers College of PAP, Chengdu Sichuan

Received: September 8, 2025; accepted: October 15, 2025; published: October 28, 2025

## Abstract

Centroid coordinates (geometric center coordinates) are a very useful tool in calculating integrals of multivariate functions, but the specific usage scenarios are relatively vague. This article presents the application of centroid coordinate formulas in calculating surface integrals.

## Keywords

Centroid Coordinate Formula, Surface Integral

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

文章引用: 雷竞雄. 利用形心坐标公式计算曲面积分[J]. 理论数学, 2025, 15(10): 156-158.

DOI: 10.12677/pm.2025.1510258

## 1. 预备知识

形心坐标的定义:

设有一平面薄片, 占有  $xOy$  面上的闭区域  $D$ , 在点  $(x, y)$  处的面密度为  $\mu(x, y)$ , 且在  $D$  上连续。利用微元法的静距元素[1]:  $dM_y = x\mu(x, y)d\sigma$ ,  $dM_x = y\mu(x, y)d\sigma$

$$\text{所以薄片的质心坐标为: } \bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\mu(x, y)d\sigma}{\iint_D \mu(x, y)d\sigma}, \quad \bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\mu(x, y)d\sigma}{\iint_D \mu(x, y)d\sigma}$$

当薄片是均匀的, 即面密度为常量, 由

$$\bar{x} = \frac{M_y}{M} = \frac{\iint_D x\mu(x, y)d\sigma}{\iint_D \mu(x, y)d\sigma} = \frac{1}{A} \iint_D x d\sigma, \quad \iint_D x d\sigma = A\bar{x},$$

$$\bar{y} = \frac{M_x}{M} = \frac{\iint_D y\mu(x, y)d\sigma}{\iint_D \mu(x, y)d\sigma} = \frac{1}{A} \iint_D y d\sigma, \quad \iint_D y d\sigma = A\bar{y}$$

其中  $A = \iint_D d\sigma$  为闭区域  $D$  的面积。此时薄片的质心完全由闭区域  $D$  的形状所决定, 将均匀薄片的质心叫做这平面薄片所占的平面图形的形心[2]-[4]。

则对于曲面积分有:

$$\bar{x} = \frac{\iint_{\Sigma} x\mu(x, y, z)dS}{\iint_{\Sigma} \mu(x, y, z)dS},$$

$$\bar{y} = \frac{\iint_{\Sigma} y\mu(x, y, z)dS}{\iint_{\Sigma} \mu(x, y, z)dS},$$

$$\bar{z} = \frac{\iint_{\Sigma} z\mu(x, y, z)dS}{\iint_{\Sigma} \mu(x, y, z)dS}$$

## 2. 当被积函数是线性函数时

如果积分区域  $D$  (对于二重积分)或  $\Omega$  (对于三重积分)的形心  $(\bar{x}, \bar{y})$  或  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  已知, 并且被积函数  $f(x, y)$  或  $f(x, y, z)$  是一个线性函数, 那么积分值等于形心处的函数值乘以区域的面积  $S_D$  或体积  $V_{\Omega}$  [4]。

下面给出证明:

定理一(二重积分)  $\iint_D (ax + by + c)d\sigma = (a\bar{x} + b\bar{y} + c) \cdot S_D$ , 其中:  $(\bar{x}, \bar{y})$  是区域  $D$  的形心坐标,  $S_D$  是区域的面积, 被积函数  $f(x, y) = ax + by + c$  是线性函数。

$$\text{证明 } \iint_D (ax + by + c)d\sigma = \iint_D ax d\sigma + \iint_D by d\sigma + \iint_D cd\sigma = aS_D\bar{x} + bS_D\bar{y} + cS_D$$

则对于曲面积分:  $\iint_{\Sigma} (ax + by + cz + d)dS = (a\bar{x} + b\bar{y} + c\bar{z} + d) \cdot S$ , 其中:  $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$  是曲面  $\Sigma$  的形心坐标,  $S$  是曲面  $\Sigma$  的表面积,  $f(x, y, z) = ax + by + cz + d$  是线性函数[5] [6]。

### 3. 示例

问题：设  $\Sigma$  是  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ ，计算曲面积分  $\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS$ 。

解法一(常规积分)

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS &= \iint_{\Sigma} (2ax) dS \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} 2ax \sqrt{1+z_x^2+z_y^2} dx dy \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} 2ax \sqrt{1+\left(\frac{a-x}{\sqrt{2ax-x^2-y^2}}\right)^2 + \left(\frac{a-y}{\sqrt{2ax-x^2-y^2}}\right)^2} dx dy \\ &= 2 \iint_{x^2+y^2 \leq 2ax} 2ax \sqrt{\frac{2a^2-2ay}{2ax-x^2-y^2}} dx dy\end{aligned}$$

此积分难以计算。

解法二(利用形心坐标)

$$\iint_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2) dS = \iint_{\Sigma} (2ax) dS = 2a\bar{x}S = 2a \cdot a \cdot 4\pi a^2 = 8\pi a^4,$$

其中球面  $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$  的形心坐标  $\bar{x} = a$ ， $S$  为球面表面积，则  $S = 4\pi a^2$ 。

显然解法二更加容易。

### 4. 结论

利用形心坐标计算线性函数的积分，只需要知道形心坐标和面积/表面积，将形心坐标代入线性函数再乘以面积/表面积即可得到积分结果，避免了繁琐的积分运算，极大地简化了过程。

### 参考文献

- [1] 孙爱民, 沈璐璐. 高等数学[M]. 北京: 人民邮电出版社: 2024: 157.
- [2] 严亚强. 利用形心坐标计算一类重积分和线面积分[J]. 高等数学研究, 2019, 22(2): 28-29+41.
- [3] 李玲, 胡学刚. 二重积分的若干计算技巧[J]. 高师理科学刊, 2014, 34(1): 4.
- [4] 张辉, 李应岐, 敬斌, 等. 谈二重积分的计算方法[J]. 商丘职业技术学院学报, 2015, 14(2): 5-7.
- [5] 杨德彬. 二重积分一题多解的方法总结[J]. 理科爱好者(教育教学), 2020(6): 14-15.
- [6] 陈贤峰. 关于几何体形心坐标的注记[J]. 大学数学, 2020, 36(6): 46-50.