Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(10), 111-115
Published Online October 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1510254

数学概念蕴含的必要条件的应用

李瑞瑞

信息工程大学基础部，河南 郑州

收稿日期：2025年9月10日；录用日期：2025年10月12日；发布日期：2025年10月27日

摘 要

数学概念定义中蕴含的必要条件在应用中常被忽视，限制了学生思维的拓展。本文从《高等数学》中几个基本概念的定义出发，分析其所蕴含的必要条件，结合典型例题讨论其在处理问题时的应用。通过形式统一、结构转化等策略，揭示了必要条件在简化证明、拓展思路方面的作用。本文的研究有助于深化对数学定义的理解，提升数学问题的解决效率。

关键词

定义，必要条件，可导，可积

The Applications of Necessary Conditions Contained in Mathematical Concepts

Ruirui Li

Department of Foundation, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: September 10, 2025; accepted: October 12, 2025; published: October 27, 2025

Abstract

The necessary conditions contained within mathematical definition are frequently overlooked in application, which limits the expansion of students' thinking. This paper starts from definition of several basic concepts in Advanced Mathematics, analyzes the necessary conditions Contained in this definition, and discusses their applications in solving problems through typical examples. By employing strategies such as formal unification and structural transformation, the role of necessary conditions in simplifying proofs and broadening the perspective is revealed. The research of this paper helps to deepen the understanding of mathematical definition and improve the efficiency of

文章引用: 李瑞瑞. 数学概念蕴含的必要条件的应用[J]. 理论数学, 2025, 15(10): 111-115.
DOI: 10.12677/pm.2025.1510254

solving problems.

Keywords

Definition, Necessary Conditions, Derivative, Integrable Template

1. 引言

定义是对概念的精确、严格的描述，它使用逻辑语言和符号来界定概念的本质特征和边界。在数学中，一个概念往往被定义为一组条件的等价描述。从逻辑结构上讲，数学定义通常是一个等价命题，也就是说，定义中的条件既是概念成立的充分条件，也是其必要条件。引入逻辑符号，分别将概念、条件记为 P、Q，那么定义则可表示为 $P \Leftrightarrow Q$，这个符号蕴含两个方向的推论：首先 $P \Rightarrow Q$，这表示 Q 是 P 的必要条件。反之 $Q \Rightarrow P$，则说明 Q 是 P 的充分条件。深入理解定义的逻辑结构，对解题方法研究至关重要。已有不少学者强调“回归定义”在解题中的重要性[1]，文献[2]也给出了概念思维在高等数学课程学习中的具体应用。但多数研究集中于定义充分性的使用，对于定义中蕴含的必要性提得较少，或者在处理问题时直接运用，这不利于学生归纳总结，作进一步的拓展思考。文献[3]从可导的充分性和必要性阐述了导数概念的应用，对相关的两类题目展开讨论。受此启发，本文从几个数学定义蕴含的必要条件的角度(即 $P \Rightarrow Q$ 这一逻辑方向)，讨论其在若干问题中的应用价值。

2. 数列极限定义蕴含的必要条件的应用

定义 1 [4]设 $\{x_n\}$ 为一数列，若存在常数 a，对于任意给定的正数 ε，总存在正整数 N，使得当 $n > N$ 时，有 $|x_n - a| < \varepsilon$，则称常数 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限，记为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

从必要性分析，已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则可以根据需要取某正数，此时控制自变量足够大程度的正整数 N 总是客观存在的。

例 1 设数列 $\{x_n\}$ 有界，又 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。

对于该问题，可以根据“无穷小与有界函数的乘积仍为无穷小”来证明，我们用定义，体会证明中概念充分性与必要性的切换。

分析 抽象数列极限问题的证明回归定义。要证明极限是 0，用定义的充分性，即：任意给定正数 ε，要找正整数 N，如何找？是要使 $|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| < \varepsilon$。对抽象数列，一般难以从 $|x_n y_n| < \varepsilon$ 中反解出 $n > N(\varepsilon)$，这时，一般对 $|x_n y_n - 0| = |x_n y_n|$ 放大处理，结合条件：$\{x_n\}$ 有界，即存在正数 M，有 $|x_n| < M, \forall n$。于是要使 $|x_n y_n - 0| = |x_n y_n| < \varepsilon$，只要 $M|y_n| < \varepsilon$，即 $|y_n| < \varepsilon/M$，结合条件 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，利用极限定义蕴含的必要性：对给定的 ε/M，上述的正整数 N 客观存在。

证 因为 $\{x_n\}$ 有界，即存在正数 M，有 $|x_n| < M, \forall n$。

任意给定正数 ε，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = 0$，由极限定义的必要性，对给定的 ε/M，存在 $N \in N_+$，当 $n > N$ 时，$|y_n| < \varepsilon/M$。

因此 $|x_n y_n - 0| < M|y_n| < \varepsilon$，由数列极限定义(充分性)，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n y_n = 0$。

3. 函数可导蕴含的必要条件的应用

定义 2 [4]设函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义，当自变量在 x_0 处取得增量 Δx (点 $x_0+\Delta x$ 仍在该邻域内)时，相应地，因变量取得增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$，如果 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 存在，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，并称这个极限为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，即

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

从必要性分析，若 $f'(x_0)$ 存在，则 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 存在，且其值为 $f'(x_0)$。即借助函数可导蕴含的必要条件可求极限问题。分析该极限的特点：“$\dfrac{0}{0}$”型，并且是含函数增量的“$\dfrac{0}{0}$”型。这给我们以启示，在处理具有相关特点的极限时，可以“形式统一”凑成导数的形式。

例 2 [5]设 $f(x)$ 在 $x=1$ 处可导，$f'(1)=1$，求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{f(x)-f(1)}{x^{10}-1}$。

解 “$\dfrac{0}{0}$”型极限问题，且含有函数增量，可统一形式凑成函数在一点处导数定义形式。

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x^{10}-1}&=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{1}{(x^5+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}\\&=f'(1)\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^5+1)(x^4+x^3+x^2+x+1)}\\&=\frac{1}{10}f'(1)=\frac{1}{10}.\end{aligned}$$

例 3 设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=$______。

解 因为 $1=f(0)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left[f\left(\dfrac{1}{n}\right)-1\right]=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}$。由隐函数存在定理 $y-x=\mathrm{e}^{x(1-y)}$ 在 $(0,1)$ 的某邻域内确定具有连续导数的函数 $y=f(x)$，且 $f'(0)=1$ 存在，故

$$\lim_{n\to\infty}n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-1\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)}{\frac{1}{n}}=f'(0)=1。$$

4. 函数可积蕴含的必要条件的应用

(1) 对定积分定义。从必要性分析，若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 可积，因为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$ 与对 $[a,b]$ 分法和点 ξ_i 的选取无关，故可选特殊的分割，如 n 等分，此时 $x_i=a+\dfrac{b-a}{n}i$ $(i=0,1,2,\cdots,n)$，$\Delta x_i=\dfrac{b-a}{n}$ $(i=1,2,\cdots,n)$。特殊的 ξ_i，如每一小区间段上取 $\xi_i=x_i=a+\dfrac{b-a}{n}i$，则

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i\right)\frac{b-a}{n}=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

因此对于 n 项和数列求极限，一种方法是利用定积分定义计算。

例 4 [6]求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{i\pi}{2n}}$。

解 凑成定积分中和式极限形式 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{i\pi}{2n}}\frac{1}{n}$，分别考虑 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n}$，$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{i\pi}{2n}}\frac{1}{n}$。

对 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n}$： $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n}=\lim\limits_{n\to\infty}n\frac{\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}$。

对 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{i\pi}{2n}}\frac{1}{n}$，记 $\xi_i=\frac{i\pi}{2n}$，则 $f(\xi_i)=\frac{1}{1+\cos\xi_i}$，因此被积函数为 $f(x)=\frac{1}{1+\cos x}$。再确定积分上下限 $\xi_1=\frac{\pi}{2n}\to 0\ (n\to\infty)$，$\xi_n=\frac{n\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\to\frac{\pi}{2}\ (n\to\infty)$，因此积分下限 $a=0$，上限 $b=\frac{\pi}{2}$，此时 $\Delta x_i=\frac{\pi}{2n}$，故形式统一将 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{i\pi}{2n}}\frac{1}{n}$ 凑成 $\frac{2}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{i\pi}{2n}}\frac{\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1+\cos x}\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}$。

综上， $\lim\limits_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{i\pi}{2n}}=\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{2n}\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\cos\frac{i\pi}{2n}}\frac{1}{n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{2}{\pi}=1$。

例 5 2010 年全国硕士研究生招生考试数学(一)第一题(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=(\quad)$。

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$ (B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$ (D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$

解析：与上例类似凑成特殊的和式极限形式。

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n+i}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{n^2+j^2}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}=\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{1+y^2}\mathrm{d}y\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(2) 对二重积分，类似地，从必要性分析，也可以求解特殊和式的极限。若函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积，因为 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\mu_i)\Delta\sigma_i$ 与对 $[a,b]\times[c,d]$ 的分法和点 (ξ_i,μ_i) 的选取无关，故可选特殊的分割：过 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 的 n 等分点，分别作平行于坐标轴的直线，此网格线将 $[a,b]\times[c,d]$ 分为 n^2 等份，此时 $\Delta\sigma_i=\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}$， $(i=1,2,\cdots,n^2)$。特殊的选取 (ξ_i,μ_i)： $\xi_i=a+\frac{b-a}{n}i$， $\eta_j=c+\frac{d-c}{n}j$， $(i,j=1,2,\cdots,n)$。则 $\lim\limits_{\lambda\to0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i,\mu_i)\Delta\sigma_i=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}f\left(a+\frac{b-a}{n}i,c+\frac{d-c}{n}j\right)\frac{(b-a)(d-c)}{n^2}=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$。

即对于双重和式求极限，一种方法是尝试构造二重积分。

仍对例 5 分析：$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$ 为双重和式求极限，“形式统一”：

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)}\frac{1}{n^2}\text{。}$$

取 $\xi_i=\frac{i}{n}$，$\eta_j=\frac{j}{n}$，$(i,j=1,2,\cdots,n)$，此时被积函数为 $f(x,y)=\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$，积分区域 D 为 $[0,1]\times[0,1]$，故

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}&=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left(1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right)}\frac{1}{n^2}\\&=\iint_D\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}\sigma\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

在平时的学习过程中，学生要多加总结，善于运用定义蕴含的必要条件，逆向思维，为处理问题找到突破口。

参考文献

[1] 波利亚. 怎样解题——数学思维的新方法[M]. 涂泓, 冯承天, 译. 上海: 上海科技教育出版社, 2007.

[2] 滕吉红, 黄晓英, 刘倩. 概念思维在高等数学中的应用[J]. 高师理科学刊, 2018, 38(9): 70-72.

[3] 周淑娟, 赵玉娥, 张娟娟, 于静. 关于导数概念的一点注记[J]. 高等数学研究, 2020, 23(5): 7-9.

[4] 同济大学数学系. 高等数学(上册) [M]. 第 7 版. 北京: 高等教育出版社, 2014.

[5] 张宇. 张宇考研数学题探析经典 1000 题[M]. 北京: 北京理工大学出版社, 2019.

[6] 郑华盛. 高等数学一题多解 300 例[M]. 北京: 科学出版社, 2018.