

带有平均曲率算子的拟线性问题在无穷区间上的可解性

杨 凯

西北师范大学, 数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年9月14日; 录用日期: 2025年10月16日; 发布日期: 2025年10月29日

摘 要

运用Leray-Schauder原理讨论无穷区间上带有平均曲率算子的拟线性问题。

$$\begin{cases} (\varphi(u'))' = f(t, u(t), u'(t)), & t \in [0, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t)e^t = 0, \end{cases} \quad (1)$$

具有可解性, 其中 $f: [0, \infty) \times \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续。 $\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}, s \in (-1, 1)$ 。

关键词

平均曲率算子, 可解性, 无穷区间, Leray-Schauder原理

Solvability of Quasilinear Problems with Mean Curvature Operator on Infinite Interval

Kai Yang

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: September 14, 2025; accepted: October 16, 2025; published: October 29, 2025

Abstract

In this paper, by using the Leray-Schauder theory, we are concerned with the solvability of

$$\begin{cases} (\varphi(u'))' = f(t, u(t), u'(t)), & t \in [0, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) e^t = 0, \end{cases}$$

where $f: [0, \infty) \times \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ is continuous, $\varphi(s) = \frac{s}{\sqrt{1-s^2}}, s \in (-1, 1)$.

Keywords

Mean Curvature Operator, Solvability, Infinite Interval, Leray-Schauder Theory

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对于线性二阶常微分方程的可解性的研究首先是由 Il'in 和 Moiseev 开始的。1992 年, Gupta 运用 Leray-Schauder 延拓定理在至多线性增长条件下研究了非线性二阶常微分方程三点边值问题, 见文[1][2], 此后出现了很多对于非线性二阶常微分方程的各种不同边值问题的可解性研究的重要结果。

1831 年, 法国数学家、物理学家索菲·热尔曼最先引入平均曲率的概念。平均曲率是微分几何中一个弯曲测量标准, 局部地描述了一个曲面嵌入周围空间的曲率。随着平均曲率的提出, 其应用广泛涉足于工程技术、物理、数学、计算机、地理等各类应用学科。而无穷区间上非线性边值问题也是一个经典的数学问题, 最早是由 R. E. Kider 给出, 它涉及许多重要的数学概念和方法, 如变分法、临界点理论、特征值法等。由此引起了越来越多的专家学者的关注, 并取得了许多重要的成果, 参见文[3]-[5]。近年来, 随着经济学、力学、天体力学以及交叉学科的不断发展, Minkowski 空间中带有平均曲率算子的拟线性问题引起了学者们的广泛关注, 并取得了系统而深刻的成果, 参见文[6][7]。针对这类微分方程问题的研究主要采用分歧理论、压缩映射、原理 Leray-Schauder 拓扑度理论、锥不动点定理、临界点理论、上下解方法、Leray-Schauder 延拓定理以及非线性抉择原理等方法。

1995 年, Gupta 在文[8]中, 运用 Leray-Schauder 延拓定理研究了如下二阶非线性常微分方程 m 点边值问题

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) + e(t), & 0 < t < 1, \\ x'(0) = 0, x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\xi_i) \end{cases}$$

的可解性, 类似问题参见文[9]-[11]。

2019 年, Dai 运用分歧理论在文[11]中, 证明了无穷区间上平均曲率方程问题

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t), x'(t)) + e(t), & 0 < t < 1, \\ x'(0) = 0, x(1) = \sum_{i=1}^{m-2} a_i x(\xi_i) \end{cases}$$

的径向解存在性, 不存在性和多重性。

2023 年, Chu 在文[12]运用 Schauder 不动点定理研究了半无限区间上二阶非线性微分方程

$$\begin{cases} x''(t) = f(t, x(t))t \geq t_0, \\ x(0) = \psi_0, \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \psi_0 \end{cases}$$

解的存在性、唯一性和稳定性。

受以上文献的启发, 本文主要运用 Leray-Schauder 延拓定理研究在无穷区间上带有平均曲率算子的拟线性问题

$$\begin{cases} (\varphi(u'))' = f(t, u(t), u'(t)), t \in [0, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t)e^t = 0, \end{cases} \quad (2)$$

的可解性。其中边界条件 $\lim_{t \rightarrow \infty} u'(t)e^t = 0$ 主要源于无穷区间微分方程的研究需求, 兼常见于扩散、衰减等动力学系统, 通过指数权重 e^t 对远期变化率 $u'(t)$ 施加强约束, 确保物理量的变化在长期演化中足够平缓, 体现系统的长期稳定性。

本文总假定:

(H1) 函数 $f: [0, \infty) \times \mathbb{R} \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续。

(H2) $\lim_{t \rightarrow \infty} e^t f(t, u, v) = 0$, 关于 u, v 一致成立。

(H3) 存在非负函数 p, q, r , 使得 $tp(t), tq(t), tr(t) \in L^1[0, \infty)$, 且对于 $t \in [0, \infty)$, $u(t) \in \mathbb{R}$, 以及 $v \in (-1, 1)$ 有

$$|f(t, u, v)| \leq p(t)|u(t)| + q(t)|v(t)| + r(t),$$

其中 $\int_0^\infty tp(t)dt < 1$, $\int_0^\infty tq(t)dt < \infty$, $\int_0^\infty tr(t)dt < \infty$ 。

本文的主要结果如下:

定理 1 假定(H1)~(H3)成立。则问题(1)在 $C^1[0, \infty)$ 中至少存在一个解。

2. 预备知识

设

$$X = \left\{ u \in C^1[0, \infty) \mid \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0, \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t)e^t = 0, \lim_{b \rightarrow \infty} \max_{[0, b]} |u'(t)| < +\infty \right\}$$

且 $\|u\|_X = \sup_{t \geq 0} |u(t)| + \sup_{t \geq 0} |u'(t)|$, 则由文献[8]可知, X 在 $\|\cdot\|_X$ 下构成 Banach 空间。

引理 1 假定(H1)~(H2)成立。则问题(1)的解等价于下列积分方程

$$u(t) = \int_t^\infty \left[\varphi^{-1} \left(\int_s^\infty f(\tau, u(\tau), u'(\tau)) d\tau \right) \right] ds, t \in [0, \infty) \quad (3)$$

的一个不动点。

证明 设 $u \in X$ 为(1)解, 则 $\lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = 0$, 否则与 $\lim_{t \rightarrow \infty} u'(t)e^t = 0$ 矛盾。将问题(1)中的方程从 t 到 ∞ 进行积分并结合 $\lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) = 0$, 可得

$$-\varphi(u'(t)) = \varphi(-u'(t)) = \int_t^\infty f(s, u(s), u'(s)) ds, t \in [0, \infty).$$

进一步

$$-u'(t) = \varphi^{-1} \left(\int_t^\infty f(s, u(s), u'(s)) ds \right), t \in [0, \infty). \quad (4)$$

再对(4)式从 t 到 ∞ 进行积分并结合 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ ，即可得到(3)。

另一方面，设 $u \in X$ 为满足(3)的解，通过对(3)式左右两边求导可得

$$-u'(t) = \varphi^{-1} \left(\int_t^\infty f(s, u(s), u'(s)) ds \right), \quad t \in [0, \infty).$$

再对上式左右两边作用 φ 后求得

$$(\varphi(u'))' = f(t, u(t), u'(t)).$$

由(H1)~(H2)可知，存在 $T_0 > 0$ ，使得对于任意 $t > T_0$ 有

$$|f(t, u, v)| < \varepsilon e^{-t}, \quad u \in \mathbb{R}, t \in [0, \infty).$$

则

$$\int_0^\infty f(s, u(s), u'(s)) ds < \int_0^T f(s, u(s), u'(s)) ds + \int_T^\infty \varepsilon e^{-t} dt, \quad (5)$$

右侧第一项为有限值，第二项积分收敛，故整个积分有界。

对于边界条件

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) e^t &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi^{-1} \left(\int_t^\infty f(s, u(s), u'(s)) ds \right) e^t \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\varphi^{-1} \left(\int_t^\infty f(s, u(s), u'(s)) ds \right)}{e^{-t}}, \end{aligned}$$

由于 $\varphi^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ ，当 $x \rightarrow 0$ 时， $\varphi^{-1}(x) \sim x$ 。再运用 L'Hospital 法则并结合(H2)可得

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) e^t &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\int_t^\infty f(s, u(s), u'(s)) ds}{e^{-t}} \\ &= -\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{f(t, u(t), u'(t))}{e^{-t}} = -\lim_{t \rightarrow \infty} f(t, u(t), u'(t)) e^t = 0. \end{aligned}$$

而对于

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \int_t^\infty \left[\varphi^{-1} \left(\int_s^\infty f(\tau, u(\tau), u'(\tau)) d\tau \right) \right] ds,$$

当 $t \rightarrow \infty$ 时，被积函数中的 $\int_s^\infty f(\tau, u(\tau), u'(\tau)) d\tau \rightarrow 0$ ，故 $\varphi^{-1}(\cdot) \rightarrow 0$ 。根据反常积分收敛性，整个积分值趋于 0，即 $\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0$ 。因此， u 是原问题(1)的解。

引理 2 定义算子 T ，

$$Tu(t) = \int_t^\infty \left[\varphi^{-1} \left(\int_s^\infty f(\tau, u(\tau), u'(\tau)) d\tau \right) \right] ds, \quad u \in X, \quad (6)$$

则算子 $T: X \rightarrow X$ 且 T 为紧算子。

证明 首先由引理 1 可知 $T: X \rightarrow X$ 。下证 $T(B)$ 是 X 中的相对紧集。设 B 是 X 中任意的有界子集，则对于任意的 $u \in B, t \in [0, \infty)$ ，存在 $M_0 > 0$ 使得

$$|u(t)| < M_0. \quad (7)$$

对于 $|Tu(t)|$ ，由于 $\varphi^{-1}(|s|) \leq s$ ，由(H3)及(7)式可得

$$\begin{aligned}
\|Tu\|(t) &\leq \int_t^\infty \left\| \varphi^{-1} \left(\int_s^\infty f(\tau, u(\tau), u'(\tau)) d\tau \right) \right\| ds \\
&\leq \int_t^\infty \int_s^\infty |f(\tau, u(\tau), u'(\tau))| d\tau ds \\
&\leq \int_t^\infty (s-t) |f(s, u(s), u'(s))| ds \\
&\leq \int_0^\infty s |f(s, u(s), u'(s))| ds \\
&\leq \int_0^\infty sp(s) |u(s)| + sq(s) |u'(s)| + sr(s) ds \\
&\leq M_0 \int_0^\infty sp(s) ds + \int_0^\infty sq(s) ds + \int_0^\infty sr(s) ds \\
&< \infty.
\end{aligned} \tag{8}$$

另一方面, 由于(H2)及(5)式得

$$\begin{aligned}
\|Tu\|'(t) &= \left| -\varphi^{-1} \left(\int_t^\infty f(s, u(s), u'(s)) ds \right) \right| \\
&\leq \varphi^{-1} \left(\left| \int_t^\infty f(s, u(s), u'(s)) ds \right| \right) \\
&\leq \int_t^\infty |f(s, u(s), u'(s))| ds \\
&< \infty.
\end{aligned} \tag{9}$$

由(8)~(9)式可得 $\|T(u)\|_X < \infty$ 。即证 $T(B)$ 一致有界。

设 $\{u_n\} \subset B, u_n \rightarrow u, (n \rightarrow \infty)$, 则由(H1)中 f 连续

$$\begin{aligned}
\|Tu_n\|(t) - \|Tu\|(t) &= \left| \int_t^\infty \left[\varphi^{-1} \left(\int_s^\infty f(\tau, u_n(\tau), u'_n(\tau)) d\tau \right) \right] ds - \int_t^\infty \left[\varphi^{-1} \left(\int_s^\infty f(\tau, u(\tau), u'(\tau)) d\tau \right) \right] ds \right| \\
&\leq \int_t^\infty \left| \varphi^{-1} \left(\int_s^\infty f(\tau, u_n(\tau), u'_n(\tau)) d\tau \right) - \varphi^{-1} \left(\int_s^\infty f(\tau, u(\tau), u'(\tau)) d\tau \right) \right| ds \\
&\leq \int_t^\infty \int_s^\infty |f(\tau, u_n(\tau), u'_n(\tau)) - f(\tau, u(\tau), u'(\tau))| d\tau ds \\
&\leq \int_t^\infty (s-t) |f(\tau, u_n(\tau), u'_n(\tau)) - f(\tau, u(\tau), u'(\tau))| ds \\
&\leq \int_0^\infty s |f(\tau, u_n(\tau), u'_n(\tau)) - f(\tau, u(\tau), u'(\tau))| ds \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

对于

$$\begin{aligned}
\|Tu_n\|'(t) - \|Tu\|'(t) &\leq \left| \varphi^{-1} \left(\int_t^\infty f(s, u_n(s), u'_n(s)) ds \right) - \varphi^{-1} \left(\int_t^\infty f(s, u(s), u'(s)) ds \right) \right| \\
&\leq \int_t^\infty |f(s, u_n(s), u'_n(s)) - f(s, u(s), u'(s))| ds \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty).
\end{aligned}$$

则有 T 连续。

又由(9)可知, 存在一个 $M_1 > 0$, 使得 $\|Tu\|'(t) \leq M_1$ 。借助 Lagrange 中值定理, 可得

$$\|Tu_n\|(t_1) - \|Tu_n\|(t_2) \leq M_1 |t_1 - t_2|, \quad t_1, t_2 \geq 0, \quad n \geq 1. \tag{10}$$

对于任意 $t_1, t_2 \geq 0$, 不妨设 $t_1 \leq t_2$, 则同样使用 Lagrange 中值定理, 有

$$\begin{aligned}
\|Tu_n\|'(t_1) - \|Tu_n\|'(t_2) &\leq \left| \varphi^{-1} \left(\int_{t_1}^\infty f(s, u_n(s), u'_n(s)) ds \right) - \varphi^{-1} \left(\int_{t_2}^\infty f(s, u_n(s), u'_n(s)) ds \right) \right| \\
&\leq \left| \int_{t_1}^\infty f(s, u_n(s), u'_n(s)) ds - \int_{t_2}^\infty f(s, u_n(s), u'_n(s)) ds \right| \\
&\leq \int_{t_1}^{t_2} |f(s, u_n(s), u'_n(s))| ds.
\end{aligned} \tag{11}$$

因此由(10)~(11)可得当 $|t_1 - t_2| \rightarrow 0$ 时,

$$\begin{aligned} |[Tu_n](t_1) - [Tu_n](t_2)| &\leq M_1 |t_1 - t_2| \rightarrow 0, \\ |[Tu_n]'(t_1) - [Tu_n]'(t_2)| &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

$T(u_n)$ 在 B 中等度连续。由(8)~(9)也可得 $T(u_n)$ 在 B 中一致有界。

由 $\lim_{t \rightarrow \infty} [Tu_n](t) = 0$, 则对于任意的 $\varepsilon > 0$, 存在 $t_\varepsilon > 0$, 使得

$$|[T(u_n)](t)| < \varepsilon, \quad t > t_\varepsilon, \quad n \geq 1,$$

类似地可得

$$|[T(u_n)]'(t)| < \varepsilon, \quad t > t_\varepsilon, \quad n \geq 1,$$

则 $\{T(u_n)\}$ 在 B 上是等度收敛的。

综上, 由 Arzela-Ascoli 定理可知, $\{T(u_n)\}$ 在 X 中是相对紧的, T 将 X 中的有界子集映为 X 中的相对紧集。因此 T 是一个紧算子。

3. 主要结果的证明

本文所使用的工具为文[8]中 Leray-Schauder 延拓定理, 下面我们将利用 Leray-Schauder 延拓定理来证明算子 T 存在不动点, 从而证明了问题(1)解的存在性。

定理 1 的证明 由引理 1 可知, (1)的解等价于其对应算子方程存在不动点。

为了证明 T 存在不动点, 只需要证明同伦族问题

$$\begin{cases} (\varphi(u'))' = \lambda f(t, u(t), u'(t)), & t \in [0, \infty), \\ \lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = 0, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} u'(t) e^t = 0, \end{cases}$$

即

$$u(t) = \int_t^\infty \left[\varphi^{-1} \left(\int_s^\infty \lambda f(\tau, u(\tau), u'(\tau)) d\tau \right) \right] ds, \quad t \in [0, \infty)$$

所有可能解在 $C^1[0, \infty)$ 中有一个不依赖于 $\lambda \in [0, 1]$ 的先验界。则有

$$\begin{aligned} |u(t)| &= \left| \int_t^\infty \left[\varphi^{-1} \left(\int_s^\infty \lambda f(\tau, u(\tau), u'(\tau)) d\tau \right) \right] ds \right| \\ &\leq \int_t^\infty \int_s^\infty \lambda |f(\tau, u(\tau), u'(\tau))| d\tau ds \\ &\leq \int_t^\infty \int_s^\infty |\lambda f(\tau, u(\tau), u'(\tau))| d\tau ds \\ &\leq \int_t^\infty (s-t) |f(s, u(s), u'(s))| ds \\ &\leq \int_0^\infty sp(s) |u(s)| + sq(s) |u'(s)| + sr(s) ds \\ &\leq \sup_{t \geq 0} |u(t)| \leq \frac{\int_0^\infty sq(s) ds + \int_0^\infty sr(s) ds}{1 - sp(s) ds} := c. \end{aligned}$$

故

$$\sup_{t \geq 0} |u(t)| \leq \frac{\int_0^\infty sq(s) ds + \int_0^\infty sr(s) ds}{1 - sp(s) ds} := c.$$

由于 $|u'(t)| < 1$ 故存在不依赖于 $\lambda \in [0, 1]$ 的常数 c 使得

$$\|u\|_X = \sup_{t \geq 0} |u(t)| + \sup_{t \geq 0} |u'(t)| \leq c + 1.$$

所以, 同伦族方程的所有可能解在 $C^1[0, \infty)$ 中有一个不依赖于 $\lambda \in [0, 1]$ 的先验界。

因此, 由 Leray-Schauder 原理可知, (1) 在 $C^1[0, \infty)$ 上至少存在一个解 u 。

参考文献

- [1] Il'in, V. and Moiseev, E. (1987) Nonlocal Boundary Value Problem of the First Kind for a Sturm-Liouville Operator in Its Differential and Finite Difference Aspects. *Differential Equations*, **23**, 803-810.
- [2] Gupta, C. (2001) A New A Priori Estimate for Multi-Point Boundary Value Problems. *Electronic Journal of Differential Equations*, **7**, 47-59.
- [3] Ma, R. and Xu, J. (2010) Bifurcation from Interval and Positive Solutions of a Nonlinear Fourth-Order Boundary Value Problem. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **72**, 113-122. <https://doi.org/10.1016/j.na.2009.06.061>
- [4] Agarwal, R.P. (1983) On multipoint Boundary Value Problems for Discrete Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **96**, 520-534. [https://doi.org/10.1016/0022-247x\(83\)90058-6](https://doi.org/10.1016/0022-247x(83)90058-6)
- [5] Chen, T., Zhao, Y. and Wu, H. (2024) Existence of Solutions for Systems of k -Dimensional Minkowski-Curvature Problems with Neumann Conditions. *Journal of Mathematical Research and Applications*, **44**, 35-42.
- [6] Chen, T. and Zhao, Y. (2023) Existence of Solutions for Systems of Minkowski-Curvature Neumann Problems. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **53**, 4131-1444. <https://doi.org/10.1216/rmj.2023.53.1431>
- [7] Ma, R. and Thompson, B. (2005) Multiplicity Results for Second-Order Two-Point Boundary Value Problems with Superlinear or Sublinear Nonlinearities. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **303**, 726-735. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2004.09.002>
- [8] Gupta, C.P., Ntouyas, S.K. and Tsamatos, P.C. (1995) Solvability of an M -Point Boundary Value Problem for Second Order Ordinary Differential Equations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **189**, 575-584. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1995.1036>
- [9] Ma, R. (2000) Positive Solutions for Semipositone $k(n, n-k)$ Conjugate Boundary Value Problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **252**, 220-229. <https://doi.org/10.1006/jmaa.2000.6987>
- [10] Chen, T. and Wu, H. (2024) Existence and Nonexistence of Solutions of Minkowski-Curvature Problems in Exterior Domains. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **75**, 735-748. <https://doi.org/10.1093/qmath/haae023>
- [11] Cao, X. and Dai, G. (2019) Bifurcation and Entire Hypersurfaces of Mean Curvature Equation in Minkowski Space. *Journal of Fixed Point Theory and Applications*, **21**, Article No. 82. <https://doi.org/10.1007/s11784-019-0720-0>
- [12] Chu, J. and Wang, Z. (2023) Nagumo-type Uniqueness and Stability for Nonlinear Differential Equations on Semi-Infinite Intervals. *Journal of Differential Equations*, **367**, 229-245. <https://doi.org/10.1016/j.jde.2023.05.001>