

一个新的Rogers-Ramanujan型连分数

陈洪莉

重庆师范大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2025年9月19日; 录用日期: 2025年10月20日; 发布日期: 2025年10月30日

摘 要

连分数是数论的重要研究对象, Rogers-Ramanujan型连分数是连分数的一种特殊情况, 连分数的构造及其收敛性是连分数理论中重要研究内容。我们通过用两个Rogers-Ramanujan型恒等式来定义两个幂级数 $F(z)$ 和 $G(z)$, 构造幂级数 $\{s_k\}$ 和数列 $\{a_k\}$ 以满足递归关系 $s_{k+1} = s_{k-1} - (a_k + b_k z)s_k$, 求出 s_k 和 a_k 的前五项, 对辅助级数进行猜想并使用数学归纳法证明, 由此得到一个新的Rogers-Ramanujan型连分数。

关键词

Rogers-Ramanujan型连分数, Rogers-Ramanujan型恒等式, 递归关系

A New Rogers-Ramanujan-Type Continued Fraction

Hongli Chen

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: September 19, 2025; accepted: October 20, 2025; published: October 30, 2025

Abstract

Continued fraction is an important research object in number, and Rogers-Ramanujan-type continued fraction is a special case of continued fraction. The construction of continued fractions and its convergence are important contents in the theory of continued fractions. Two power series $F(z)$ and $G(z)$ are defined by two Rogers-Ramanujan-type identities, the power series $\{s_k\}$ and number series $\{a_k\}$ are constructed to satisfy the recursive relation $s_{k+1} = s_{k-1} - (a_k + b_k z)s_k$, and the first five terms of s_k and a_k are obtained. The auxiliary series is conjectural and proved by mathematical induction, thus a new continued fraction of Rogers-Ramanujan-type is obtained.

Keywords

Rogers-Ramanujan-Type Continued Fraction, Rogers-Ramanujan-Type Identities, Recursive Relation

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

拉马努金(Srinivasa Ramanujan)是印度著名的数学家,在数论、无穷级数、连分数和特殊函数等领域均做出了重要的贡献。拉马努金与英国数学家 L.J. Rogers 分别独立发现了以下两个著名的恒等式:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q, q^4; q^5)_{\infty}}, \sum_{n=0}^{\infty} \frac{q^{n^2+n}}{(q; q)_n} = \frac{1}{(q^2, q^3; q^5)_{\infty}}.$$

被命名为 Rogers-Ramanujan 恒等式。

拉马努金留下的笔记本是他的主要研究结果,其中由美国数学家 Bruce Berndt 教授整理并汇总了世界上许多数学家对拉马努金笔记本中遗留问题的研究成果编成了包含 5 个大卷的《Ramanujan's Notebooks》[1]-[5],另还有被称为拉马努金遗失的笔记本(Ramanujan's Lost Notebook) [6]-[9]。拉马努金发现这个 Rogers-Ramanujan 恒等式与 Rogers-Ramanujan 连分数密切相关,通过这一关系,我们可以将恒等式转化为连分数形式。

在 2011 年, Nancy S.S. Gu 和 Helmut Prodinger [10]对大量的 Rogers-Ramanujan 型恒等式进行研究,得到了许多 Rogers-Ramanujan 型恒等式的连分数展开。

2013 年, Kamilla Oliver 和 Helmut Prodinger [11]推导出了与 Rogers-Ramanujan 型恒等式相似的级数的连分式展开式的一些实例扩充。

根据以上研究现状分析,本文的主要研究内容如下:

以[12]中的两个 Rogers-Ramanujan 型恒等式为出发点,定义幂级数 $F(z)$ 和 $G(z)$,使用递归关系 $s_{k+1} = s_{k-1} - (a_k + b_k z)s_k$ 和数学归纳法,构造一个新形式的 Rogers-Ramanujan 型连分数

$$\frac{zF(z)}{G(z)} = \frac{z}{a_0 + b_0 z + \frac{z}{a_1 + b_1 z + \frac{z}{a_2 + b_2 z + \ddots}}}.$$

2. 预备知识

这一节主要概述后续研究内容会用到的一些 q -级数的术语和符号。

定义 1 设任意的 $a, q \in \mathbb{C}$, 定义 q -移位阶乘

$$(a; q)_n := \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i), (a; q)_{\infty} := \prod_{i=0}^{\infty} (1 - aq^i).$$

其中当 $n=0$ 时, $(a; q)_n = 1$ 。

且 q -移位阶乘满足

$$(q^4; q^4)_n = (q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_n. \quad (1)$$

定义 2 对任意的 $a_n \neq 0$, 由有序复数列 $\langle \langle a_n, b_n \rangle, f_n \rangle$, $n \in \mathbb{N}_0$ 构成的连分数表示为

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1 + \frac{a_2}{b_2 + \frac{a_3}{b_3 + \ddots}}}.$$

为了方便, 通常也用以下符号

$$b_0 + \frac{a_1}{b_1} \frac{a_2}{b_2} \frac{a_3}{b_3} \cdots,$$

或者表示为 $b_0 + K(a_n/b_n)$ 或 $b_0 + K_{n=1}^\infty(a_n/b_n)$ 。

3. 一个新的 Rogers-Ramanujan 型连分数

先基于一对 Rogers-Ramanujan 型恒等式来定义幂级数 $F(z)$ 和 $G(z)$, 使用递归关系和数学归纳法构造一个 Rogers-Ramanujan 型连分数

$$\frac{zF(z)}{G(z)} = \frac{z}{a_0 + b_0z + \frac{z}{a_1 + b_1z + \frac{z}{a_2 + b_2z + \ddots}}}. \quad (2)$$

下面我们介绍这种新形式连分数 $\frac{zF(z)}{G(z)}$ 的构造方法: 首先取幂级数 $s_0 = F(z)$, $s_{-1} = G(z)$, 则有

$$\frac{zF(z)}{G(z)} = \frac{zs_0}{s_{-1}} = \frac{z}{\frac{s_{-1}}{s_0}}. \quad (3)$$

设幂级数列 $\{s_k\}$ 和数列 $\{a_k\}$ 并取合适的数列 $\{b_k\}$ 以满足递归关系

$$s_{k+1} = s_{k-1} - (a_k + b_kz)s_k \quad (k = 0, 1, 2, \cdots). \quad (4)$$

在递归关系(4)中取 $k=0$ 有: $s_{-1} = zs_1 + (a_0 + b_0z)s_0$, 代入(3)得

$$\frac{zF(z)}{G(z)} = \frac{z}{a_0 + b_0z + \frac{zs_1}{s_0}} = \frac{z}{a_0 + b_0z + \frac{z}{\frac{s_0}{s_1}}}. \quad (5)$$

在递归关系(4)中取 $k=1$ 有: $s_0 = zs_2 + (a_1 + b_1z)s_1$, 代入(5)得

$$\frac{zF(z)}{G(z)} = \frac{z}{a_0 + b_0z + \frac{z}{a_1 + b_1z + \frac{zs_2}{s_1}}}.$$

重复以上递归过程即可得到

$$\frac{zF(z)}{G(z)} = \frac{z}{a_0 + b_0 z + \frac{z}{a_1 + b_1 z + \frac{z}{a_2 + b_2 z + \ddots}}}.$$

所以对于幂级数 $F(z)$ 和 $G(z)$ ，只需要取合适的数列 $\{b_k\}$ ，即可使用递归关系和数学归纳法求出 $\{s_k\}$ 和数列 $\{a_k\}$ ，再将对应的 $\{a_k\}$ ， $\{b_k\}$ 代入(2)并化简，即可得到新形式的连分数。

在构造连分数之前，我们先给出对应的 Rogers-Ramanujan 型恒等式：

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q^4; q^4)_n} = \frac{1}{(q; q^5)_\infty (q^4; q^5)_\infty (-q^2; q^2)_\infty},$$

$$\sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_n} = \frac{1}{(q^2; q^5)_\infty (q^3; q^5)_\infty (-q^2; q^2)_\infty}.$$

定理 1 设[12]中的两个恒等式为 $F(z)$ ， $G(z)$

$$F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q^4; q^4)_n} z^n, G(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^4; q^4)_n} z^n.$$

则有

$$\frac{zF(z)}{G(z)} = \frac{z}{1 - q^{-1}z + \frac{z}{q(1+q^2) - z + \frac{z}{1+q^4 - q^{-1}z + \frac{z}{q(1+q^6) - z + \cdots \frac{z}{1+q^{4k} - q^{-1}z + \frac{z}{q(1+q^{4k+2}) - z + \cdots}}}}.$$

证明： 令幂级数 $F(z) = s_0$ ， $G(z) = s_{-1}$ ，通过使用式(1)易知

$$s_0 = F(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_n} z^n,$$

$$s_{-1} = G(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2+2n}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_n} z^n.$$

为得到(2)形式的连分数，根据递归关系 $s_{k+1} = s_{k-1} - (a_k + b_k z)s_k$ ($k=0,1,2,\dots$)，求出幂级数 $\{s_k\}$ 前 7 项 s_{k-1} 、 s_0 、 s_1 、 s_2 、 s_3 、 s_4 、 s_5 ，以及对应数列 $\{a_k\}$ 的前 5 项 a_1 、 a_2 、 a_3 、 a_4 、 a_5 ，其中取数列 $\{b_k\}$ 为 $b_{2k} = -q^{-1}$ ， $b_{2k+1} = -1$ ，再猜测幂级数 s_k ， a_k 和 b_k ，最后用数学归纳法证明。其中记幂级数 s_k 中 z^n 项的系数为 $[z^n]s_k$ 。

当 $k=0$ 时，有 $zs_1 = s_{-1} - (a_0 + b_0 z)s_0$ ，其中取 $b_0 = -q^{-1}$ 。

对于 z^0 的系数有：

$$0 = 1 - a_0.$$

则可得

$$a_0 = 1.$$

对于 z^n ($n \geq 1$) 的系数有：

$$\begin{aligned}
[z^n]s_1 &= [z^n](s_{-1} - (a_0 + b_0 z)s_0) \\
&= \frac{q^{n^2+2n}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_n} - \frac{q^{n^2}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_n} - (-q^{-1}) \frac{q^{(n-1)^2}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n-1}} \\
&= \frac{-q^{n^2}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_n} + \frac{q^{n^2-2n}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n-1}} \\
&= \frac{-q^{n^2}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_n} + \frac{q^{n^2-2n}(1+q^{2n})}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_n} \\
&= \frac{q^{n^2-2n}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_n}.
\end{aligned}$$

则可得

$$[z^n]s_1 = \frac{q^{n^2-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+1}}.$$

即

$$s_1 = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+1}} z^n. \quad (6)$$

当 $k=1$ 时, 有 $zs_2 = s_0 - (a_1 + b_1 z)s_1$, 其中取 $b_1 = -1$ 。

对于 z^0 的系数有:

$$0 = 1 - a_1 \frac{1}{q(1+q^2)}.$$

则可得

$$a_1 = q(1+q^2).$$

对于 $z^n (n \geq 1)$ 的系数有:

$$\begin{aligned}
[z^n]zs_2 &= [z^n](s_0 - (a_1 + b_1 z)s_1) \\
&= \frac{q^{n^2}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_n} - q(1+q^2) \frac{q^{n^2-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+1}} - (-1) \frac{q^{n^2-2n}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_n} \\
&= \frac{q^{n^2}(1+q^{2n+2}) - q^{n^2}(1+q^2)}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+1}} - (-1) \frac{q^{n^2-2n}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_n} \\
&= \frac{q^{n^2+2}(q^{2n}-1)}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+1}} - (-1) \frac{q^{n^2-2n}(1+q^{2n+2})}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+1}} \\
&= \frac{-q^{n^2+2}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+1}} + \frac{q^{n^2-2n} + q^{n^2+2}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+1}} \\
&= \frac{q^{n^2-2n}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+1}}.
\end{aligned}$$

则可得

$$[z^n]s_2 = \frac{q^{n^2-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2}}.$$

即

$$s_2 = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2}} z^n. \quad (7)$$

当 $k=2$ 时, 有 $zs_3 = s_1 - (a_2 + b_2 z)s_2$, 其中取 $b_2 = -q^{-1}$ 。

对于 z^0 的系数有:

$$0 = \frac{1}{q(1+q^2)} - a_2 \frac{1}{q(1+q^2)(1+q^4)}.$$

则可得

$$a_2 = 1 + q^4.$$

对于 $z^n (n \geq 1)$ 的系数有:

$$\begin{aligned} [z^n]zs_3 &= [z^n](s_1 - (a_2 + b_2 z)s_2) \\ &= \frac{q^{n^2-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+1}} - (1+q^4) \frac{q^{n^2-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2}} - (-q^{-1}) \frac{q^{n^2-2n}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+1}} \\ &= \frac{q^{n^2-1}(1+q^{2n+4})}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2}} - \frac{(1+q^4)q^{n^2-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2}} - (-q^{-1}) \frac{q^{n^2-2n}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+1}} \\ &= \frac{q^{n^2+3}(q^{2n}-1)}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2}} + \frac{q^{n^2-2n-1}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+1}} \\ &= \frac{-q^{n^2+3}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2}} + \frac{q^{n^2-2n-1}(1+q^{2n+4})}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2}} \\ &= \frac{q^{n^2-2n-1}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2}}. \end{aligned}$$

则可得

$$[z^n]s_3 = \frac{q^{n^2-2}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+3}}.$$

即

$$s_3 = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2-2}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+3}} z^n.$$

当 $k=3$ 时, 有 $zs_4 = s_2 - (a_3 + b_3 z)s_3$, 其中取 $b_3 = -1$ 。

对于 z^0 的系数有:

$$0 = \frac{1}{q(1+q^2)(1+q^4)} - a_3 \frac{1}{q^2(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)}.$$

则可得

$$a_3 = q(1+q^6).$$

对于 $z^n (n \geq 1)$ 的系数有:

$$\begin{aligned} [z^n]zs_4 &= [z^n](s_2 - (a_3 + b_3z)s_3) \\ &= \frac{q^{n^2-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2}} - q(1+q^6) \frac{q^{n^2-2}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+3}} - (-1) \frac{q^{n^2-2n-1}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2}} \\ &= \frac{q^{n^2-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+3}} [1 + q^{2n+6} - (1+q^6)] - (-1) \frac{q^{n^2-2n-1}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2}} \\ &= \frac{q^{n^2+5}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+3}} + \frac{q^{n^2-2n-1}(1+q^{2n+6})}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+3}} \\ &= \frac{q^{n^2-2n-1}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+3}}. \end{aligned}$$

则可得

$$[z^n]s_4 = \frac{q^{n^2-2}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+4}}.$$

即

$$s_4 = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2-2}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+4}} z^n.$$

当 $k=4$ 时, 有 $zs_5 = s_3 - (a_4 + b_4z)s_4$, 其中取 $b_3 = -q^{-1}$ 。

对于 z^0 的系数有:

$$0 = \frac{1}{q^2(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)} - a_4 \frac{1}{q^2(1+q^2)(1+q^4)(1+q^6)(1+q^8)}.$$

则可得

$$a_4 = 1 + q^8.$$

对于 $z^n (n \geq 1)$ 的系数有:

$$\begin{aligned} [z^n]zs_5 &= [z^n](s_3 - (a_4 + b_4z)s_4) \\ &= \frac{q^{n^2-2}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+3}} - (1+q^8) \frac{q^{n^2-2}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+4}} - (-q^{-1}) \frac{q^{n^2-2n-1}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+3}} \\ &= \frac{q^{n^2-2}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+4}} [1 + q^{2n+8} - (1+q^8)] + q^{-1} \frac{q^{n^2-2n-1}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+3}} \\ &= \frac{-q^{n^2+6}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+4}} + \frac{q^{n^2-2n-2}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+3}} \\ &= \frac{-q^{n^2+6}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+4}} + \frac{q^{n^2-2n-2}(1+q^{2n+8})}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+4}} \\ &= \frac{q^{n^2-2n-2}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+4}}. \end{aligned}$$

则可得

$$[z^n]s_5 = \frac{q^{n^2-3}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+5}}.$$

即

$$s_5 = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2-3}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+5}} z^n.$$

通过以上的计算可以猜想辅助级数 s_k , 和 a_k , b_k :

$$s_{2k} = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2-k}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2k}} z^n,$$

$$s_{2k+1} = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{n^2-k-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2k+1}} z^n,$$

$$a_{2k} = 1 + q^{4k}, \quad a_{2k+1} = q(1 + q^{4k+2}),$$

$$b_{2k} = -q^{-1}, \quad b_{2k+1} = -1.$$

下面证明猜想的辅助级数 s_k , 和 a_k , b_k 满足递归关系 $s_{k+1} = s_{k-1} - (a_k + b_k z)s_k$ ($k = 0, 1, 2, \dots$), 即证

$$[z^n]zs_{2k+2} = [z^n](s_{2k} - (a_{2k+1} + b_{2k+1}z)s_{2k+1}), \quad (8)$$

$$[z^n]zs_{2k+1} = [z^n](s_{2k-1} - (a_{2k} + b_{2k}z)s_{2k}). \quad (9)$$

证明递归关系(8): 当 $k = 0$ 时, 显然成立。

当 $k \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned} & [z^n](s_{2k} - (a_{2k+1} + b_{2k+1}z)s_{2k+1}) \\ &= \frac{q^{n^2-k}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2k}} - q(1 + q^{4k+2}) \frac{q^{n^2-k-1}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2k+1}} - (-1) \frac{q^{(n-1)^2-k-1}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n-1+2k+1}} \\ &= \frac{q^{n^2-k}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2k+1}} \left[1 + q^{2n+4k+2} - (1 + q^{4k+2}) \right] + \frac{q^{n^2-2n-k}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k}} \\ &= \frac{-q^{n^2+3k+2}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k+1}} + \frac{q^{n^2-2n-k}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k}} \\ &= \frac{-q^{n^2+3k+2}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k+1}} + \frac{q^{n^2-2n-k} (1 + q^{2n+4k+2})}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k+1}} \\ &= \frac{q^{n^2-2n-k}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k+1}}, \\ & [z^n]zs_{2k+2} = \sum_{n \geq 0} \frac{q^{(n-1)^2-(k+1)}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n-1+2(k+1)}} = \frac{q^{n^2-2n-k}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k+1}}. \end{aligned}$$

则递归关系(8)成立。

证明递归关系(9): 当 $k=0$ 时, 显然成立。

当 $k \geq 1$ 时,

$$\begin{aligned}
 & [z^n] (s_{2k-1} - (a_{2k} + b_{2k}z)s_{2k}) \\
 &= \frac{q^{n^2-k}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2k-1}} - (1+q^{4k}) \frac{q^{n^2-k}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2k}} - (-q^{-1}) \frac{q^{(n-1)^2-k}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k-1}} \\
 &= \frac{q^{n^2-k}}{(q^2; q^2)_n (-q^2; q^2)_{n+2k}} \left[1 + q^{2n+4k} - (1+q^{4k}) \right] + \frac{q^{n^2-2n-k}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k-1}} \\
 &= \frac{-q^{n^2+3k}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k}} + \frac{q^{n^2-2n-k}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k-1}} \\
 &= \frac{-q^{n^2+3k}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k}} + \frac{q^{n^2-2n-k} (1+q^{2n+4k})}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k}} \\
 &= \frac{q^{n^2-2n-k}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k}}, \\
 & [z^n] z s_{2k+1} = \frac{q^{(n-1)^2-k-1}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n-1+2k+1}} \\
 &= \frac{q^{n^2-2n-k}}{(q^2; q^2)_{n-1} (-q^2; q^2)_{n+2k}}.
 \end{aligned}$$

则递归关系(9)成立。

将数 a_k , b_k 代入(2)得

$$\frac{zF(z)}{G(z)} = \frac{z}{1-q^{-1}z+q(1+q^2)} \frac{z}{-z+1+q^4-q^{-1}z+q(1+q^6)} \cdots \frac{z}{1+q^{4k}-q^{-1}z+q(1+q^{4k+2})} \cdots.$$

这就证明到了定理。

4. 结语

本文基于一对 Rogers-Ramanujan 型恒等式, 使用[12]的类似的构造方法, 先构造辅助级数 s_k 和数列 a_k , b_k , 其满足关系 $s_{k+1} = s_{k-1} - (a_k + b_k z)s_k$ ($k=0,1,2,\dots$), 其中 a_k 由 s_k 唯一定义, 如果 a_k 已知, 只需要取合适的 b_k , 则对应的 s_k 亦可求出。在求出 a_k 和 s_k 的前几项后, 我们观察其结果的一般规律, 对其各自的通项公式进行猜想, 最后使用数学归纳法证明, 由此得到了一个新的 Rogers-Ramanujan 型连分数。

在未来研究中, 我们可以运用此递推关系或推广该构造方法, 提出新的辅助级数表达式, 得到其它新的 Rogers-Ramanujan 型连分数, 探讨取 z 取特殊值时, 连分数会退化为有意义的表达式, 从而进一步对数论中的 Rogers-Ramanujan 型恒等式和 Rogers-Ramanujan 型连分数的研究提供更多的实例, 也可为后续研究利用 q 级数的性质对连分数进行分析和处理提供理论基础。

参考文献

- [1] Berndt, B.C. (1985) Ramanujan's Notebooks. Part I. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1088-7>
- [2] Berndt, B.C. (1989) Ramanujan's Notebooks. Part II. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4530-8>

-
- [3] Berndt, B.C. (1991) Ramanujan's Notebooks. Part III. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0965-2>
 - [4] Berndt, B.C. (1994) Ramanujan's Notebooks. Part IV. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0879-2>
 - [5] Berndt, B.C. (1998) Ramanujan's Notebooks. Part V. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4612-1624-7>
 - [6] Andrews, G.E. and Berndt, B.C. (2005) Ramanujan's Lost Notebooks. Part I. Springer. <https://doi.org/10.1007/0-387-28124-X>
 - [7] Andrews, G.E. and Berndt, B.C. (2009) Ramanujan's Lost Notebooks. Part II. Springer.
 - [8] Andrews, G.E. and Berndt, B.C. (2012) Ramanujan's Lost Notebooks. Part III. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3810-6>
 - [9] Andrews, G.E. and Berndt, B.C. (2013) Ramanujan's Lost Notebooks. Part IV. Springer. <https://doi.org/10.1007/978-1-4614-4081-9>
 - [10] Gu, N.S.S. and Prodinger, H. (2011) On Some Continued Fraction Expansions of the Rogers-Ramanujan Type. *Ramanujan Journal*, **26**, 323-367. <https://doi.org/10.1007/s11139-011-9329-7>
 - [11] Kamilla, O. and Prodinger, H. (2013) Continued Fraction Expansions Related to Göllnitz' Little Partition Theorem. *Afrika Matematika*, **24**, 665-670. <https://doi.org/10.1007/s13370-012-0088-4>
 - [12] Rogers, L.J. (1894) Second Memoir on the Expansion of Certain Infinite Products. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **25**, 318-343. <https://doi.org/10.1112/plms/s1-25.1.318>