

螺旋曲线上离散小波变换的实例

张志辉, 王 刚*

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年9月24日; 录用日期: 2025年10月28日; 发布日期: 2025年11月14日

摘 要

本文通过长度保持投影方法探讨螺旋曲线上的离散小波变换实例。首先, 基于欧拉离散化方案构建了三种不同的保长投影方法。接着, 通过长度保持投影方法简明介绍了螺旋曲线上离散小波变换的实现方式。最后, 通过三个不同螺旋曲线的信号分解与重构案例进行验证, 并附有相关示意图供讨论参考。

关键词

长度保持投影离散化, 螺旋空间曲线, 小波分析

Some Examples of Discrete Wavelet Transform on Helix Curves

Zhihui Zhang, Gang Wang*

School of Mathematics Science, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: September 24, 2025; accepted: October 28, 2025; published: November 14, 2025

Abstract

In this paper, examples for discrete wavelet transform on a helix curve are discussed by the length-preserving projection. Firstly, three different length-preserving projections are constructed by the Euler discretized scheme. Then discrete wavelet transform on a helix curve is introduced simply by length-preserving projection. Finally, three examples are constructed to decompose and reconstruct with the signal on three different helix curves. Some figures are given for our discussion.

Keywords

Discretization of Length-Preserving Projection, Helix Space Curves, Wavelet

*通讯作者。



1. 引言

近年来, 小波方法的发展日新月异。该技术不仅能处理非平稳数据、实现时域定位, 还能对信号进行多尺度分析。小波分析已广泛应用于信号处理、图像去噪、面部生物识别、医学(某些器官可视为球面结构)、金融数据等多个领域。现实世界中的某些数据可能存在于特定光滑流形中, 例如双层双曲面、抛物面等二维光滑流形, 以及各类抽象流形。研究流形上小波变换的一种可行方法是基于李群、李代数及其表示理论。例如, J. P. Leduc 曾通过运动学群的酉表示探讨了连续时空小波变换。另一种探讨小波及其在流形应用的有效方法是采用双射投影技术, 例如垂直投影、径向投影、球面投影、保面积投影、保长投影等。基于特定曲线的小波分析方法, 在处理金融数据(如比特币交易数据、金融机构存款余额数据等)时提出了若干新见解, 例如“回归增长趋势波动率”、“回归增长趋势误差”、“回归趋势线的小波近似数据”等。这些金融数据处理主要针对平面曲线, 如线性回归曲线、对数曲线等。此外, 现实世界中的许多数据可能存在于空间曲线中, 例如航班数据、卫星轨道数据、生物学(DNA 双螺旋结构)等。例如, 地震数据在地球表面形成了空间曲线。对这类数据进行小波变换是空间曲线小波分析的一个很好的例子; 卫星轨道运行数据便在近似的圆螺旋曲线上。另外, 自然界中也存在类似于双曲螺旋线的现象, 如台风外围雨带、河流入海口、动物捕食轨迹和植物卷须生长等, 它们在部分阶段或尺度下呈现出“趋近直线”或“反比关系”的特征, 与双曲螺旋线的几何特性有一定相似性。处理这类流形上数据, 小波方法应提升到相应的空间曲线上。利用空间曲线上保长投影的欧拉离散化方法, 本文将讨论在这类螺旋曲线上进行离散小波变换和重构。

2. 预备知识

在本节中, 我们介绍了一类螺旋空间曲线以及构造若干螺旋曲线上的保持投影。

2.1. 螺旋空间曲线的方程

众所周知, 圆柱螺旋线的方程由以下运动给出。一个绕固定直线轴运动的粒子会做匀速圆周运动, 并且以恒定速度沿轴线平行移动。其轨迹是一个圆柱螺旋线。方程如下:

$$\vec{r} = \{u \cos(v), u \sin(v), av\}.$$

如果将沿轴线匀速直线运动的物体改变为另一种圆周运动, 即让绕固定轴做匀速圆周运动的粒子同时进行另一段匀速圆周运动(例如卫星既绕地球又绕太阳运行), 其运动轨迹将呈现圆形螺旋形态。具体方程定义如下:

定义 2.1 [1] [2] 若空间中一质点的轨迹满足以下参数方程

$$\vec{r} = \{(a + v_0 \cos(\omega t)) \cos(t), (a + v_0 \cos(\omega t)) \sin(t), v_0 \sin(\omega t)\} \quad (1)$$

其中 $|v_0| < a$, a, v_0 表示两个圆周运动的半径, ω 是角速度, 那么该方程的轨迹是一个圆螺旋线。如果与 XOY 平面平行的圆在上述方程中变为双曲线, 则轨迹方程可以在定义 2.2 中获得。

定义 2.2 [1] [2] 若空间中一质点的轨迹满足以下参数方程

$$\vec{r} = \{(a + v_0 \cos(\omega t)) \sec(t), (b + v_0 \cos(\omega t)) \tan(t), v_0 \sin(\omega t)\} \quad (2)$$

其中 $|v_0| < a$, a, b 是双曲线的实半轴和虚半轴的长度, 以及 v_0 表示圆运动的半径, ω 是角速度, 那么该方程的轨迹是一个双曲线螺旋线。

推广定义 2.1 和 2.2, 我们得到

定义 2.3 [1] [2] 对于连续平面导引曲线 $F(x, y) = 0$, 其参数方程为

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}, t \text{ 是参数.}$$

那么广义螺旋曲线的一般方程为

$$\bar{r} = \{(a + v_0 \cos(\omega t)) f(t), (a + v_0 \cos(\omega t)) g(t), v_0 \sin(\omega t)\} \quad (3)$$

其中 a, v_0, ω 是满足某些条件的常数。

对于广义螺旋的方程,

$$\bar{r} = \{(a + v_0 \cos(\omega t)) f(t), (a + v_0 \cos(\omega t)) g(t), v_0 \sin(\omega t)\},$$

通过简单的计算, 可以得到以下导数:

$$\bar{r}' = \{(a + v_0 \cos(\omega t)) f'(t) - \omega v_0 \sin(\omega t) f(t), (a + v_0 \cos(\omega t)) g'(t) - \omega v_0 \sin(\omega t) g(t), v_0 \omega \cos(\omega t)\}$$

2.2. 离散化保长投影的例子

类似于保长投影[1]-[5]和保面积投影[6]-[8]和, 将传统的多分辨率分析方法推广到平滑曲线上更为便捷(更多细节可参考相关文献[1] [3]-[5])。根据平滑曲线上离散长度保持投影的算法[1] [4], 本节将计算离散化保长投影 P 的结果。

首先, 简要阐述一下欧拉离散化方案的基本思想。解决一个常微分方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(t, y(t)) \\ y(t_0) = y_0 \end{cases},$$

对于有限时间区间 $[T_0, T_1]$ 插入 n 个分点, $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_1$, 分割成 n 个小步长 Δt_i , 其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n$ 。为了方便计算, 可以取等步长 $\Delta t_i = \Delta t = \frac{T_1 - T_0}{n}$ 。

欧拉离散化的关键一步是用有限差商来近似导数。当步长 Δt 很小时, 我们可以近似地认为

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t_i} \approx \frac{y(t_i + \Delta t) - y(t_i)}{\Delta t}$$

得到了显式欧拉法的迭代公式:

$$y(t_{i+1}) \approx y(t_i) + f(t, y(t_i)) \Delta t.$$

根据泰勒公式, 可知局部截断误差与步长 Δt 的平方成正比, 记为 $O((\Delta t)^2)$, 总的全局误差大约是 n 个局部误差的累积, 这意味着全局误差与步长 Δt 成线性关系, 记为 $O(\Delta t)$ 。这是一阶方法。

文献[1] [5] [7] [8]中提到显式构造曲面与曲线上保面积投影和保长投影是较少的, 多数情形需要利用数值方法。下面我们将运用欧拉离散化方案构造保长投影。

2.2.1. 圆螺旋线的保长投影

考虑一个圆螺旋线 C :

$$\bar{r} = \{(a + v_0 \cos(\omega t)) \cos t, (a + v_0 \cos(\omega t)) \sin t, v_0 \sin(\omega t)\}.$$

选择参数 $a = 8, v_0 = 2, \omega = 16$,

$$\bar{r} = \{(8 + 2 \cos(16t)) \cos t, (8 + 2 \cos(16t)) \sin t, 2 \sin(16t)\}.$$

经计算可得

$$dL = \sqrt{32^2 + (8 + 2 \cos 16t)^2} dt \quad (4)$$

根据欧拉离散化方法: 对于有限区间 $[T_0, T_1]$, $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_1$, 则

$$dL = \sqrt{32^2 + (8 + 2 \cos 16t)^2} dt \Leftrightarrow \sqrt{32^2 + (8 + 2 \cos 16t)^2} \Delta t_i = \Delta L_i$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \Delta L_i = L_i - L_{i-1}$ 。

保长投影 p 的离散化格式可表示如下:

$$p: t_i \rightarrow L_i = L_{i-1} + \sqrt{32^2 + (8 + 2 \cos 16t)^2} (t_i - t_{i-1})$$

其中 $(x_0, y_0, z_0) \rightarrow L_0 = 0$ 。它的逆 p^{-1} 为

$$p^{-1}: L_i \rightarrow t_i = t_{i-1} + \frac{1}{\sqrt{32^2 + (8 + 2 \cos 16t)^2}} (L_i - L_{i-1}), \quad (5)$$

$$(x(t_i), y(t_i), z(t_i)) = \{(8 + 2 \cos(16t_i)) \cos t_i, (8 + 2 \cos(16t_i)) \sin t_i, 2 \sin(16t_i)\},$$

其中 $L_0 \rightarrow t_0$, 可得点 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 。

2.2.2. 双曲螺旋线保长投影的离散化

考虑一个双曲螺旋线 C :

$$\bar{r} = \{(a + v_0 \cos(\omega t)) \sec(t), (b + v_0 \cos(\omega t)) \tan(t), v_0 \sin(\omega t)\}$$

选择参数 $a = 4, b = 2, v_0 = 1, \omega = 8$,

$$\bar{r} = \{(4 + \cos(8t)) \sec(t), (2 + \cos(8t)) \tan(t), \sin(8t)\}.$$

经计算可得

$$dL = \sqrt{\sec^4 t \left[(-8 \sin(8t) \cos t + (4 + \cos(8t)) \sin t)^2 + (-8 \sin(8t) \sin t \cos t + (2 + \cos(8t)))^2 \right] + 64 \cos^2(8t)} dt \quad (6)$$

根据欧拉离散化方法: 对于有限区间 $[T_0, T_1]$, $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_1$, 则

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{\sec^4 t \left[(-8 \sin(8t) \cos t + (4 + \cos(8t)) \sin t)^2 + (-8 \sin(8t) \sin t \cos t + (2 + \cos(8t)))^2 \right] + 64 \cos^2(8t)} dt \\ &\Leftrightarrow \sqrt{\sec^4 t_i \left[(-8 \sin(8t_i) \cos t_i + (4 + \cos(8t_i)) \sin t_i)^2 + (-8 \sin(8t_i) \sin t_i \cos t_i + (2 + \cos(8t_i)))^2 \right] + 64 \cos^2(8t_i)} \Delta t_i = \Delta L_i \end{aligned}$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \Delta L_i = L_i - L_{i-1}$ 。

保长投影 p 的离散化格式可表示如下:

$$p: t_i \rightarrow L_i, L_i = L_{i-1} + \sqrt{\sec^4 t_i \left[(-8\sin(8t_i)\cos t_i + (4 + \cos(8t_i))\sin t_i)^2 + (-8\sin(8t_i)\sin t_i \cos t_i + (2 + \cos(8t_i)))^2 \right] + 64\cos^2(8t_i)}(t_i - t_{i-1})$$

其中 $(x_0, y_0, z_0) \rightarrow L_0 = 0$ 。它的逆 p^{-1} 为

$$\begin{aligned} p^{-1}: L_i &\rightarrow t_i \\ &= t_{i-1} + \frac{1}{\sqrt{\sec^4 t_i \left[(-8\sin(8t_i)\cos t_i + (4 + \cos(8t_i))\sin t_i)^2 + (-8\sin(8t_i)\sin t_i \cos t_i + (2 + \cos(8t_i)))^2 \right] + 64\cos^2(8t_i)}}(L_i - L_{i-1}), \quad (7) \\ (x(t_i), y(t_i), z(t_i)) &= \left\{ (4 + \cos(8t_i))\sec(t_i), (2 + \cos(8t_i))\tan(t_i), \sin(8t_i) \right\}, \end{aligned}$$

其中 $L_0 \rightarrow t_0$, 可得点 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 。

2.2.3. 广义螺旋线保长投影的离散化

对于广义螺旋的方程,

$$\bar{r} = \left\{ (a + v_0 \cos(\omega t)) f(t), (a + v_0 \cos(\omega t)) g(t), v_0 \sin(\omega t) \right\},$$

选择参数 $a = 4, v_0 = 1, \omega = 8, f(t) = t, g(t) = t^2 - 2t$,

$$\bar{r} = \left\{ (4 + \cos(8t))t, (2 + \cos(8t))(t^2 - 2t), \sin(8t) \right\}.$$

经计算可得

$$dL = \sqrt{(4 + \cos(8t) - 8t \sin(8t))^2 + (4(t-1) + 2(t-1)\cos(8t) - 8t(t-2)\sin(8t))^2 + (8\cos(8t))^2} dt \quad (8)$$

根据欧拉离散化方法: 对于有限区间 $[T_0, T_1]$, $T_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = T_1$, 则

$$\begin{aligned} dL &= \sqrt{(4 + \cos(8t) - 8t \sin(8t))^2 + (4(t-1) + 2(t-1)\cos(8t) - 8t(t-2)\sin(8t))^2 + (8\cos(8t))^2} dt \\ &\Leftrightarrow \\ &\sqrt{(4 + \cos(8t) - 8t \sin(8t))^2 + (4(t-1) + 2(t-1)\cos(8t) - 8t(t-2)\sin(8t))^2 + (8\cos(8t))^2} \Delta t_i = \Delta L_i \end{aligned}$$

其中 $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}, \Delta L_i = L_i - L_{i-1}$ 。

保长投影 p 的离散化格式可表示如下:

$$\begin{aligned} p: t_i &\rightarrow L_i, \\ &= L_{i-1} + \sqrt{(4 + \cos(8t) - 8t \sin(8t))^2 + (4(t-1) + 2(t-1)\cos(8t) - 8t(t-2)\sin(8t))^2 + (8\cos(8t))^2}(t_i - t_{i-1}) \end{aligned}$$

其中 $(x_0, y_0, z_0) \rightarrow L_0 = 0$ 。它的逆 p^{-1} 为

$$\begin{aligned} p^{-1}: L_i &\rightarrow \\ t_i &= t_{i-1} + \frac{1}{\sqrt{(4 + \cos(8t) - 8t \sin(8t))^2 + (4(t-1) + 2(t-1)\cos(8t) - 8t(t-2)\sin(8t))^2 + (8\cos(8t))^2}}(L_i - L_{i-1}), \quad (9) \\ (x(t_i), y(t_i), z(t_i)) &= \left\{ (4 + \cos(8t_i))t_i, (2 + \cos(8t_i))(t_i^2 - 2t_i), \sin(8t_i) \right\}, \end{aligned}$$

其中 $L_0 \rightarrow t_0$, 可得点 $(x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ 。

3. 螺旋空间曲线上离散小波变换的概述

类似于文献[1] [3] [5] [9]的方法, 在本节中我们通过保长投影讨论了螺旋空间曲线上离散小波变换。假设螺旋空间曲线 C 满足方程(3)中的参数方程:

$$\xi = (x(t), y(t), z(t)) = \{(a + v_0 \cos(\omega t))f(t), (a + v_0 \cos(\omega t))g(t), v_0 \sin(\omega t)\}, t \in R.$$

根据文献[1] [3] [5] [9]讨论的保长投影, 它是一个双射投影 $p: \xi \rightarrow X$ 以及逆映射为 $p^{-1}: X \rightarrow \xi$ 。保长投影的作用是将螺旋空间曲线上的一段弧长微元 $dL(\xi)$ 等长地投影到直线上的相应弧长 dX 微元。利用保长投影 p , 对于任意函数 $\tilde{f}, \tilde{g} \in L^2(C)$,

$$\langle \tilde{f}, \tilde{g} \rangle_{L^2(C)} = \langle \tilde{f} \circ p^{-1}, \tilde{g} \circ p^{-1} \rangle_{L^2(R)} \quad (10)$$

如果考虑函数 $f, g \in L^2(R)$,

$$\langle f, g \rangle_{L^2(R)} = \langle f \circ p, g \circ p \rangle_{L^2(C)} \quad (11)$$

根据式(10)和式(11), 可定义并建立螺旋空间曲线上 $L^2(C)$ 的多分辨率分析如下:

如果一个子空间序列 v_j 满足以下性质:

- 1) $v_j \subset v_{j+1}, \forall j \in Z$;
- 2) $\bigcap_{j \in Z} v_j = \{0\}, \overline{\bigcup_{j \in Z} v_j} = L^2(C)$;
- 3) $f^C \in v_j \Rightarrow D_2 f^C \in v_{j+1}$, 其中 D_2 是由公式定义的;
- 4) 集合 $\{\phi_{0,k}^C, k \in Z\}$ 是 v_0 的一个正交基, 其中 $v_j = \text{clos}_{L^2(R)} \langle \phi_{j,k}^C : k \in Z \rangle$, $\phi_{j,k}^C = \phi_{j,k} \circ p$, 则称诱导子空间 v_j 生成了 $L^2(C)$ 的一个正交多分辨率分析。

对于每一个整数 $j \in Z$, 假设 w_j 是子空间 v_j 在空间 v_{j+1} 中的正交补空间, 即 $v_{j+1} = v_j \oplus w_j$ 。该空间 w_j 被称为螺旋曲线上的小波子空间。若存在小波函数 ψ , 则在螺旋曲线上的函数 ψ^C 可由 $\psi^C = \psi \circ p$ 诱导生成。显然, 对于每个 $j \in Z$, $\{\psi_{j,k}^C, k \in Z\}$ 都是 w_j 的正交基, 因此 $\{\psi_{j,k}^C, k \in Z, j \in Z\}$ 也是 $\overline{\bigoplus_{j \in Z} w_j} = L^2(C)$ 的正交基。因此, 在螺旋空间曲线上 ϕ^C 称为尺度函数, 而 ψ^C 是螺旋空间曲线 C 上对应的小波。

讨论中平移算子和膨胀算子可定义如下:

- 1) 平移算子: $T_b \phi^C(\xi) = (\phi^C \circ p^{-1})(p(\xi) - b), b \in R$;
- 2) 伸缩算子: $D_a \phi^C(\xi) = (\phi^C \circ p^{-1})(a \cdot p(\xi)), a > 0$ 。

根据多分辨率分析, 对于一个尺度函数 ϕ^C 满足如下两尺度方程:

$$\phi^C(\xi) = \sum_{k \in Z} h_k^C (\phi^C \circ p^{-1})(2 \cdot p(\xi) - k), \quad (12)$$

其中序列 $\{h_k^C\}$ 称为 ϕ^C 的两尺度序列。对应于尺度函数 ϕ^C 的小波函数 ψ^C 满足如下双尺度方程:

$$\psi^C(\xi) = \sum_{k \in Z} g_k^C (\phi^C \circ p^{-1})(2 \cdot p(\xi) - k) \quad (13)$$

其中序列 $\{g_k^C\}$ 称为 ψ^C 的两尺度序列。利用保长投影 p , 关联的尺度函数 $\phi = \phi^C \circ p^{-1}$ 满足:

$$\phi(x) = \sum_{k \in Z} h_k \phi(2x - k), \text{ 其中序列 } \{h_k\} \text{ 是 } \phi \text{ 的两尺度序列。该序列 } \{h_k^C\} \text{ 有如下的结论。}$$

定理 4.1 [1] [3]-[5] 假设 p 是从螺旋空间曲线 C 到实轴子集 X 的保长投影。若 $L^2(C)$ 中函数 ϕ^C 是利用投影 p 将 $\phi \in L^2(R)$ 诱导生成的尺度函数, 则序列 $\{h_k\}$ 和 $\{h_k^C\}$ 满足等式 $h_k^C = h_k$, 其中序列 $\{h_k\}$ 是 $L^2(R)$ 中尺度函数 ϕ 的两尺度序列, 即 $\phi(x) = \sum_{k \in Z} h_k \phi(2x - k)$ 。

证明: 利用保长投影 p 使得 $p(\xi) = x, x \in R$, 则

$$\begin{aligned} h_k^C &= \left\langle \phi^C(\xi), (\phi^C \circ p^{-1})(2 \cdot p(\xi) - k) \right\rangle_{L^2(C)} \\ &= \left\langle \phi^C \circ p^{-1}(x), (\phi^C \circ p^{-1})(2 \cdot p(p^{-1}(x)) - k) \right\rangle_{L^2(R)} \\ &= \left\langle \phi(x), \phi(2x - k) \right\rangle_{L^2(R)} = h_k \end{aligned}$$

所以 $h_k^C = h_k$ 。

类似于定理 4.1, 对应的小波函数 ψ^C 的两尺度序列 $\{g_k^C\}$ 满足类似的等式。

定理 4.2 [1] [3] [4] [5] 假设 p 是从螺旋空间曲线 C 到实轴子集 X 的保长投影。若 $L^2(C)$ 中函数 ϕ^C 是利用投影 p 将 $\phi \in L^2(R)$ 诱导生成的尺度函数, 且 ψ^C 是由 $\psi \in L^2(R)$ 诱导的小波函数, 则序列 $\{g_k^C\}$ 和 $\{g_k^C\}$ 满足等式 $g_k^C = g_k$, 其中序列 $\{g_k^C\}$ 是小波函数 ψ 的两尺度序列, 满足等式

$$\psi(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} g_k \phi(2x - k)。$$

证明类似于定理 4.1。

根据文献[1][3][4][5]的分解重构公式, 若信号函数 f^C 在螺旋空间曲线上平方可积, 即, $f^C \in L^2(C)$, 以及投影算子 P_j^C 和 T_j^C , $P_j^C f^C \in v_j$, $T_j^C f^C \in w_j$, 则

$$T_j^C f^C = \sum_{k \in \mathbb{Z}} d_{j,k}^C \psi_{j,k}^C, \quad P_j^C f^C = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{j,k}^C \phi_{j,k}^C。$$

根据 $v_{j+1} = v_j \oplus w_j$, 等式 4.1 和等式 4.2, 利用保长投影可计算出近似系数 $c_{j,k}^C$ 和小波系数 $d_{j,k}^C$ 。因此分解算法如下所示:

$$\begin{cases} c_{j,k}^C = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} c_{j+1,k'}^C \bar{h}_{k-2k'}^C \\ d_{j,k}^C = \frac{\sqrt{2}}{2} \sum_{k' \in \mathbb{Z}} c_{j+1,k'}^C \bar{g}_{k-2k'}^C \end{cases} \quad (14)$$

式子与传统的分解公式类似。此外, 在保长投影的基础上, 重构公式可表示为:

$$c_{j+1,k}^C = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\sum_{k' \in \mathbb{Z}} c_{j,k'}^C h_{k-2k'}^C + \sum_{k' \in \mathbb{Z}} d_{j,k'}^C g_{k-2k'}^C \right). \quad (15)$$

这同样类似于传统重构公式。

4. 数值例子的构造

这一节, 利用保长投影我们还给出了三个数值例子。例 4.1 讨论圆螺旋曲线上离散小波变换及其重构。

例 4.1 考虑文献[9]中小波“Db2”。它的尺度函数 $\phi(x)$ 与小波函数 $\psi(x)$ 分别满足方程:

$$\begin{aligned} \phi(x) &= \frac{1+\sqrt{3}}{4} \phi(2x) + \frac{3+\sqrt{3}}{4} \phi(2x-1) + \frac{3-\sqrt{3}}{4} \phi(2x-2) + \frac{1-\sqrt{3}}{4} \phi(2x-3), \\ \psi(x) &= \frac{1-\sqrt{3}}{4} \phi(2x+2) - \frac{3-\sqrt{3}}{4} \phi(2x+1) + \frac{3+\sqrt{3}}{4} \phi(2x) - \frac{1+\sqrt{3}}{4} \phi(2x-1). \end{aligned}$$

根据第 2.2.1 小节构造圆螺旋线的保长投影, 上述尺度函数和小波函数可以被提升到圆螺旋线上。从而推导出对应的尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C , 并确定相应的两尺度序列。由定理 4.1 和定理 4.2, 通过方

程(12)和方程(13), 可得到的尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C 的两尺度方程分别如下所示:

$$\begin{aligned}\phi^C(\xi) &= \frac{1+\sqrt{3}}{4}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)) + \frac{3+\sqrt{3}}{4}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)-1) + \frac{3-\sqrt{3}}{4}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)-2) \\ &\quad + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)-3), \\ \psi^C(\xi) &= \frac{3+\sqrt{3}}{4}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)) - \frac{1+\sqrt{3}}{4}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)-1) - \frac{3-\sqrt{3}}{4}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)+1) \\ &\quad + \frac{1-\sqrt{3}}{4}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)+2)\end{aligned}$$

在图 1 中给出了圆螺旋曲线上的尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C 的图示。

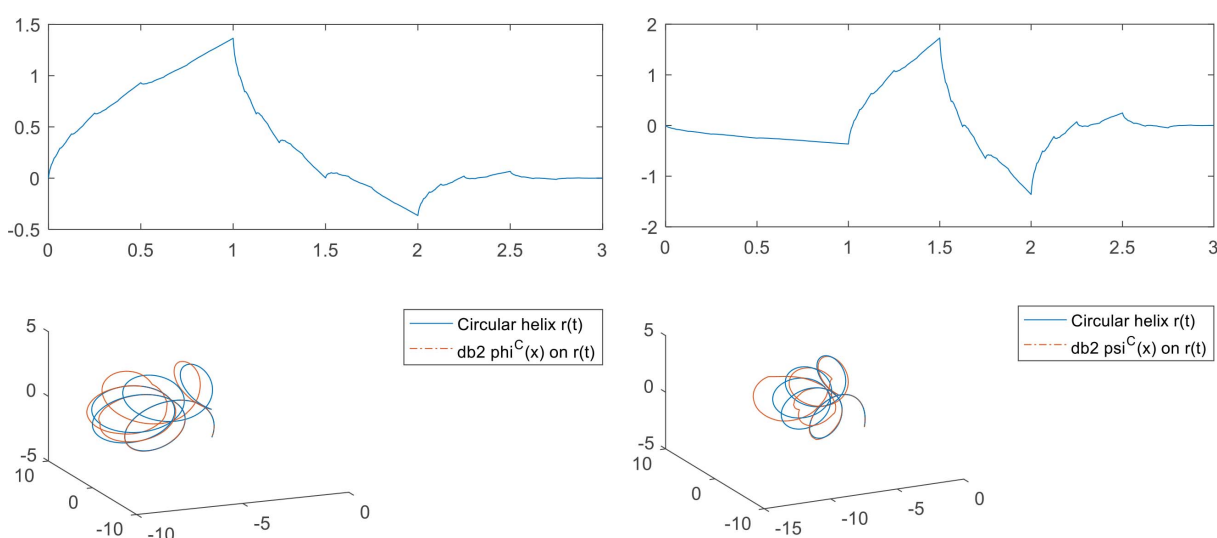


Figure 1. Diagram of the db2 scaling function ϕ^C and wavelet function ψ^C on a circular helical curve

图 1. 圆螺旋曲线上的 db2 尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C 的图示

给定如下的原始信号 $f(t)$:

$$f(t) = 0.5\sin(10t) + 0.2\varepsilon_t$$

其中 $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, $t \in [0, \pi]$ 。该圆螺旋曲线的离散化保长投影采样点为 2280, $\Delta t = \frac{\pi}{2280}$ 。通过保长投影

将原始信号提升在圆螺旋曲线上, 如图 2 中第一行第一列的图形所示。图中红色虚线表示了圆螺旋曲线上原始信号。通过圆螺旋空间曲线的分解与重构公式, 将圆螺旋曲线上原始信号分解至 3 层, 可获得低频信号 ca1、高频信号 cd1、cd2 和 cd3。图 2 第二行第一列展示了低频信号 ca1, 它捕捉了圆螺旋曲线上原始信号的主要近似特征; 而高频信号 cd1、cd2 和 cd3 则通过不同尺度的分析, 捕捉到圆螺旋曲线上原始信号的细节信息, 详见图 2 中第二行第二列的图形, 第三行第一列的图形以及第三行第二列的图形。

通过重构公式和长度保持投影, 可以将低频信号 ca1、高频信号 cd1、cd2 和 cd3 重构, 从而获得重构信号。如图 3 第二行图形所示, 与图 3 第一行的原始信号进行对比。误差信号也在图 3 第三行图形中给出, 原始信号与重构信号之间的误差范数为 6.7281×10^{-12} 。

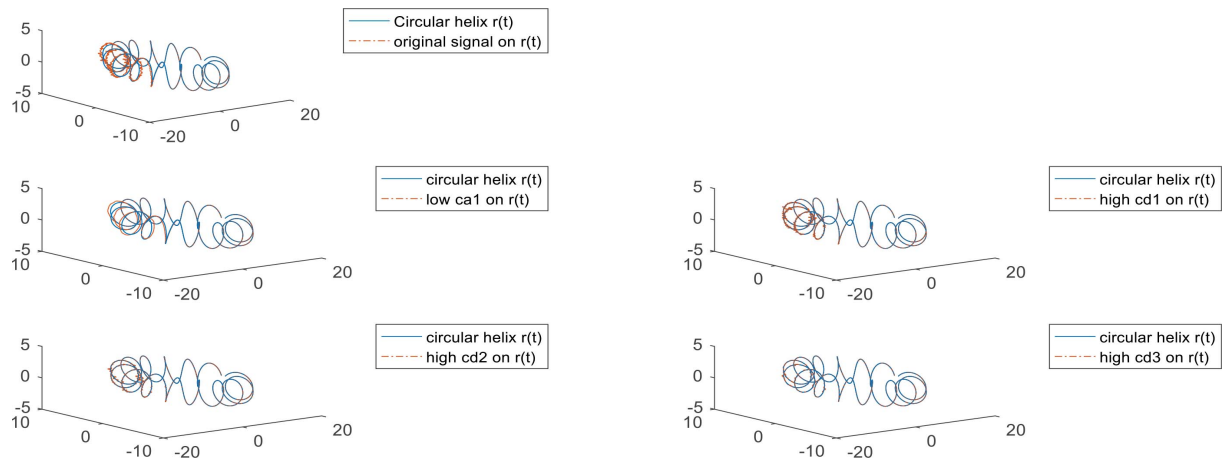


Figure 2. The original signal and its decomposition on a circular helical curve

图 2. 圆螺旋曲线上的原始信号及其分解

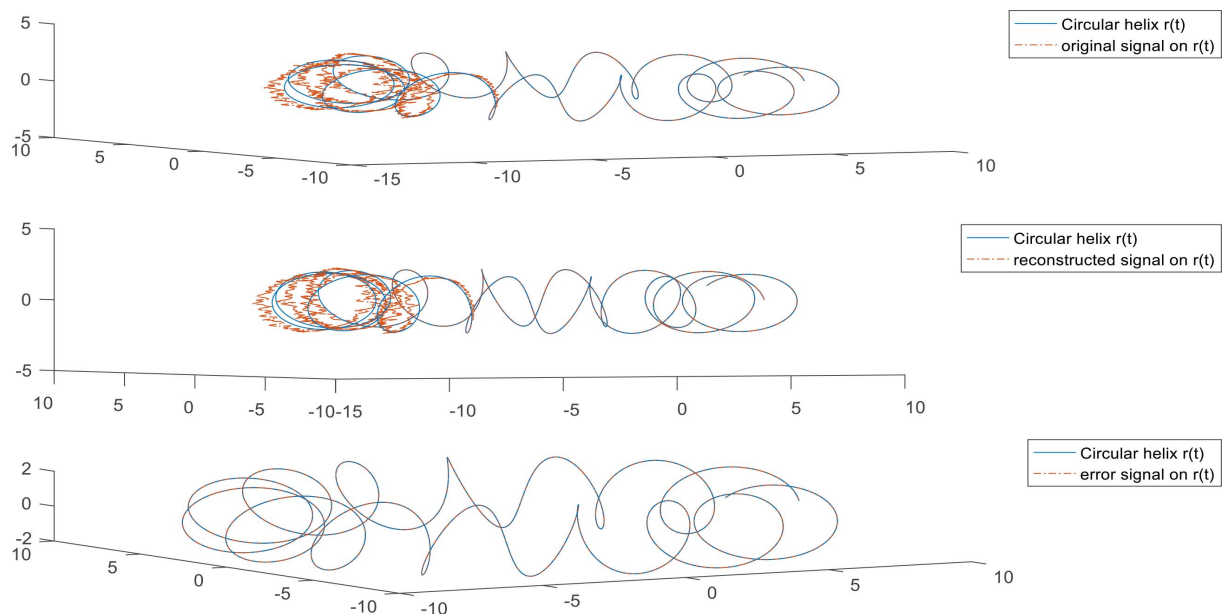


Figure 3. The original signal, reconstructed signal, and their error signal on a circular helical curve

图 3. 圆螺旋曲线上原始信号, 重建的信号及其误差信号

例 4.2 考虑文献[1] [4] [9]中小波“Db3”。类似地, 根据第 2.2.2 小节构造双曲螺旋线的保长投影, 推导出双曲螺旋线上尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C , 并确定相应的两尺度序列。由定理 4.1 和定理 4.2, 通过方程(12)和方程(13), 可得到的尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C 的两尺度方程分别如下所示:

$$\begin{aligned} \phi^C(\xi) = & \frac{1+\sqrt{10}+\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16} \phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)) + \frac{5+\sqrt{10}+3\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16} \phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)-1) \\ & + \frac{10-2\sqrt{10}+2\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16} \phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)-2) + \frac{10-2\sqrt{10}-2\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16} \phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)-3) \\ & + \frac{5+\sqrt{10}-3\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16} \phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)-4) + \frac{10+\sqrt{10}-\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16} \phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)-5), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\psi^C(\xi) = & \frac{5+\sqrt{10}+3\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)) - \frac{1+\sqrt{10}+\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)-1) \\ & - \frac{10-2\sqrt{10}+2\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)+1) + \frac{10-2\sqrt{10}-2\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)+2) \\ & - \frac{5+\sqrt{10}-3\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)+3) + \frac{1+\sqrt{10}-\sqrt{5+2\sqrt{10}}}{16}\phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)+4)\end{aligned}$$

其中 $p(\xi) = x$ 。

在图 4 中给出了双曲螺旋线上的尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C 的图示。

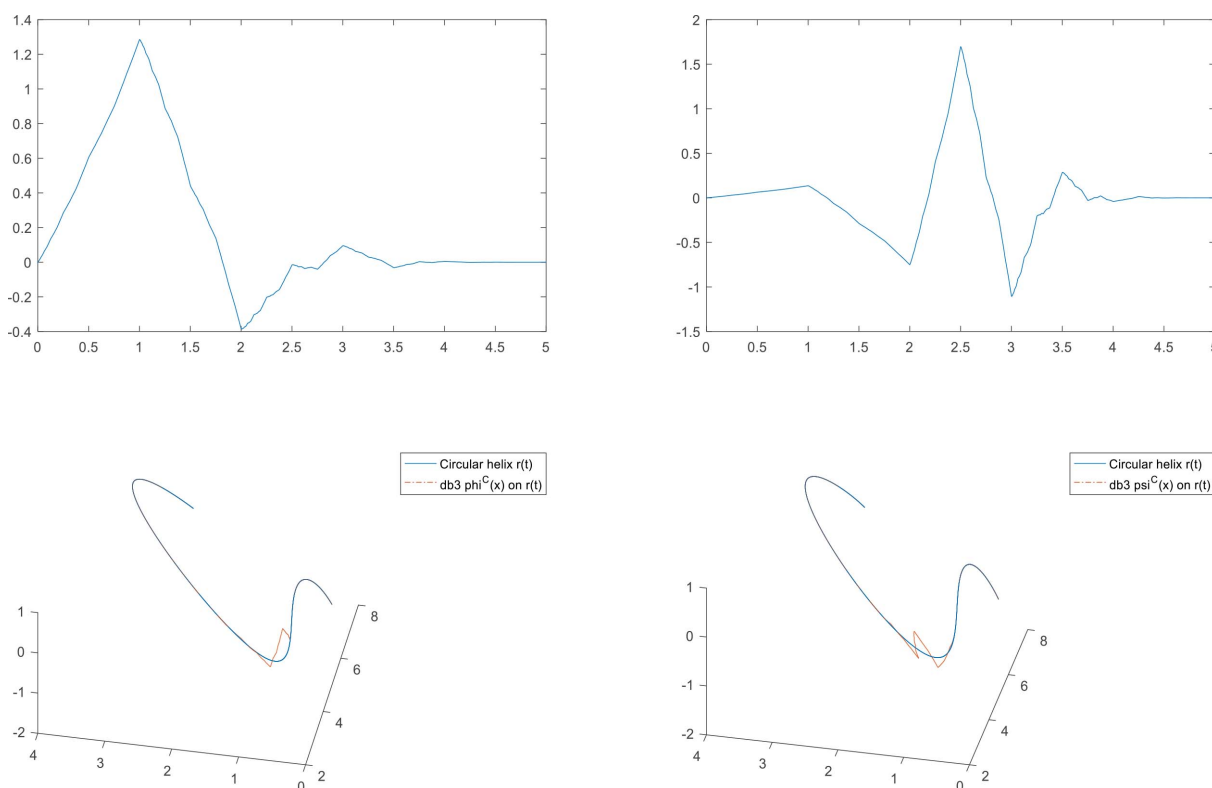


Figure 4. Diagram of the db3 scaling function ϕ^C and wavelet function ψ^C on a hyperbolic spiral curve

图 4. 双曲螺旋线上的 db3 尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C 的图示

给定如下的原始信号 $f(t)$ ：

$$f(t) = 0.5\sin(10t) + 0.2\varepsilon_t$$

其中 $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, $t \in [0, \pi]$ 。该双曲螺旋曲线的离散化保长投影采样点为 2000, $\Delta t = \frac{\pi}{2000}$ 。通过保长投影将原始信号提升在双曲螺旋线上, 如图 5 中第一行第一列的图形所示。图中红色虚线表示了双曲螺旋线上原始信号。通过双曲螺旋线的分解与重构公式, 将双曲螺旋线上原始信号分解至 3 层, 可获得低频信号 ca1、高频信号 cd1、cd2 和 cd3。图 5 第二行第一列展示了低频信号 ca1, 它捕捉了双曲螺旋线上原始信号的主要近似特征; 而高频信号 cd1、cd2 和 cd3 则通过不同尺度的分析, 捕捉到双曲螺旋线上原始信号的细节信息, 详见图 5 中第二行第二列的图形, 第三行第一列的图形以及第三行第二列的图形。

通过重构公式和长度保持投影, 可以将低频信号 $ca1$ 、高频信号 $cd1$ 、 $cd2$ 和 $cd3$ 重构, 从而获得重构信号。如图 6 第二行图形所示, 与图 6 第一行的原始信号进行对比。误差信号也在图 6 第三行图形中给出, 原始信号与重构信号之间的误差范数为 7.9027×10^{-11} 。

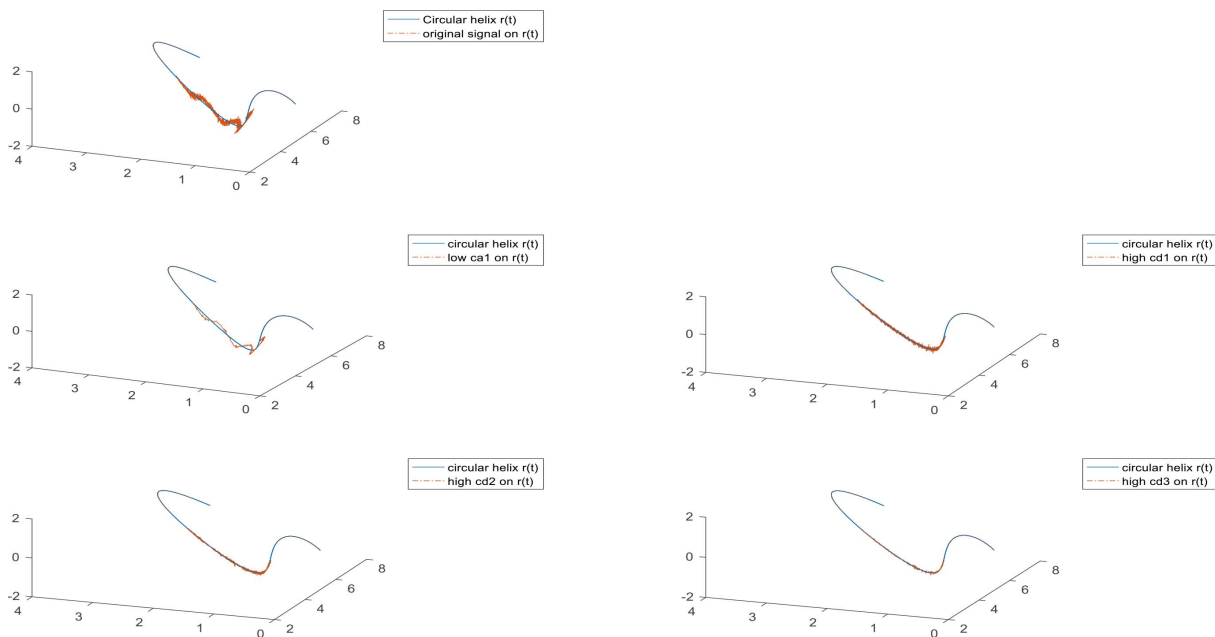


Figure 5. The original signal and its decomposition on a hyperbolic spiral curve

图 5. 双曲螺旋线上的原始信号及其分解

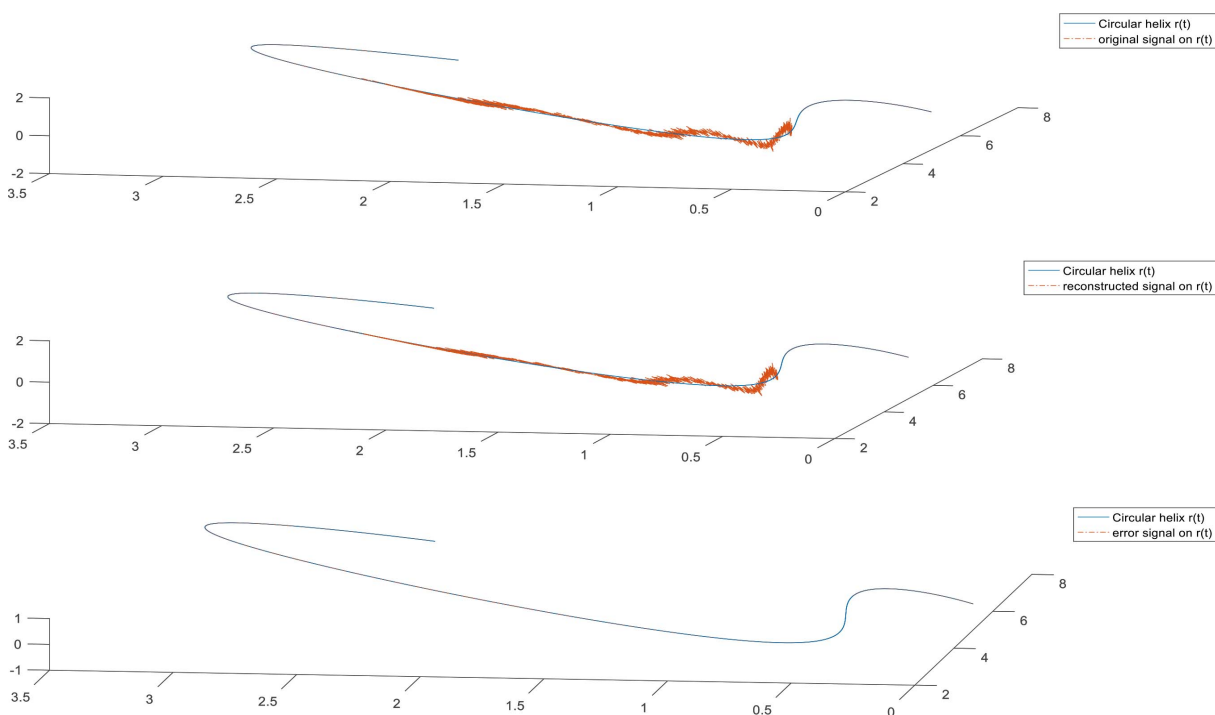


Figure 6. The original signal, reconstructed signal, and their error signal on a hyperbolic spiral curve

图 6. 双曲螺旋曲线上原始信号, 重建的信号及其误差信号

例 4.3 考虑文献[9]中“haar”小波。类似地, 根据第 2.2.3 小节构造广义螺旋线的保长投影, 推导出广义螺旋线上尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C , 并确定相应的两尺度序列。由定理 4.1 和定理 4.2, 通过方程 (12) 和方程 (13), 可得到的尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C 的两尺度方程分别如下所示:

$$\phi^C(\xi) = \phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)) + \phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi) - 1)$$

$$\psi^C(\xi) = \phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi)) - \phi^C \circ p^{-1}(2 \cdot p(\xi) - 1)$$

在图 7 中给出了广义螺旋线上的 haar 尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C 的图示。

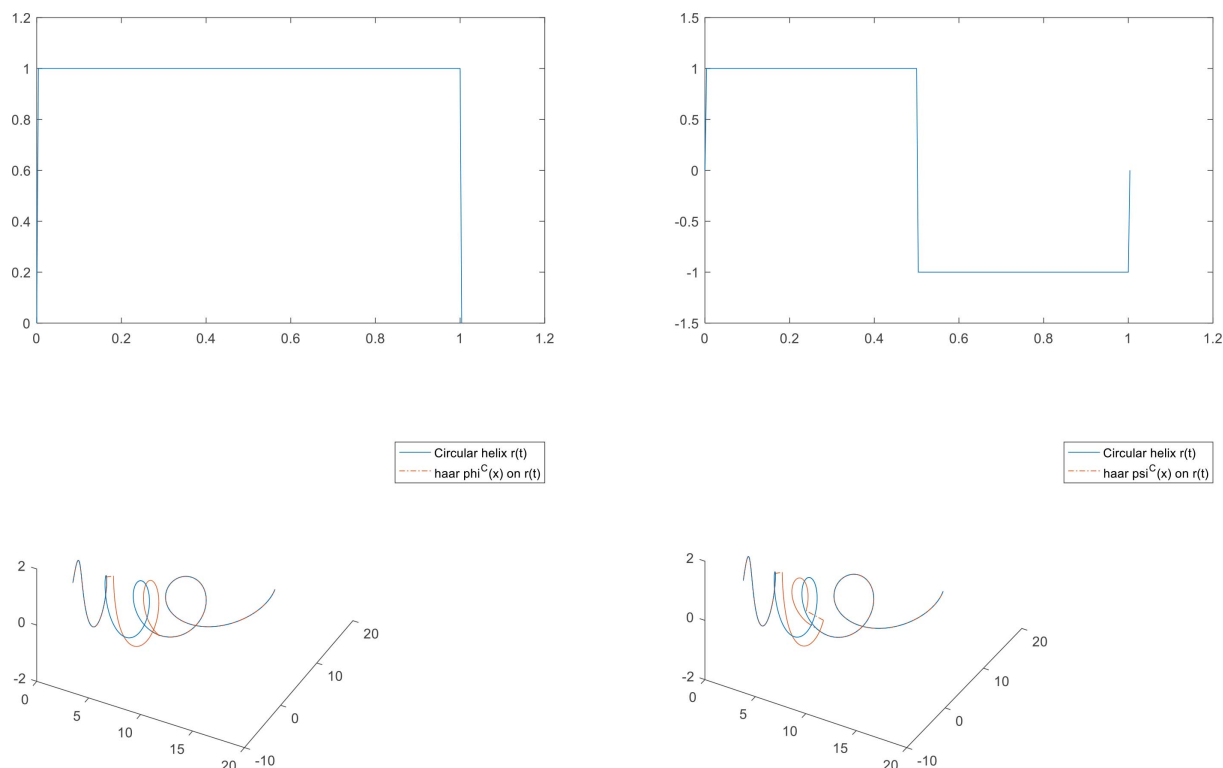


Figure 7. Diagram of the haar scaling function ϕ^C and wavelet function ψ^C on a generalized helix curve

图 7. 广义螺旋线上的 haar 尺度函数 ϕ^C 和小波函数 ψ^C 的图示

给定如下的原始信号 $f(t)$:

$$f(t) = 0.5 \sin(10t) + 0.2 \varepsilon_t$$

其中 $\varepsilon_t \sim N(0, \sigma^2)$, $t \in [0, \pi]$ 。该广义螺旋曲线的离散化保长投影采样点为 3000, $\Delta t = \frac{\pi}{3000}$ 。通过保长投影将原始信号提升在广义螺旋线上, 如图 8 中第一行第一列的图形所示。图中红色虚线表示了广义螺旋线上原始信号。通过广义螺旋线的分解与重构公式, 将广义螺旋线上原始信号分解至 3 层, 可获得低频信号 ca1、高频信号 cd1、cd2 和 cd3。图 8 第二行第一列展示了低频信号 ca1, 它捕捉了广义螺旋线上原始信号的主要近似特征; 而高频信号 cd1、cd2 和 cd3 则通过不同尺度的分析, 捕捉到广义螺旋线上原始信号的细节信息, 详见图 8 中第二行第二列的图形, 第三行第一列的图形以及第三行第二列的图形。

通过重构公式和长度保持投影, 可以将低频信号 ca1、高频信号 cd1、cd2 和 cd3 重构, 从而获得重

构信号。如图 9 第二行图形所示, 与图 9 第一行的原始信号进行对比。误差信号也在图 9 第三行图形中给出, 原始信号与重构信号之间的误差范数为 2.6097×10^{-15} 。

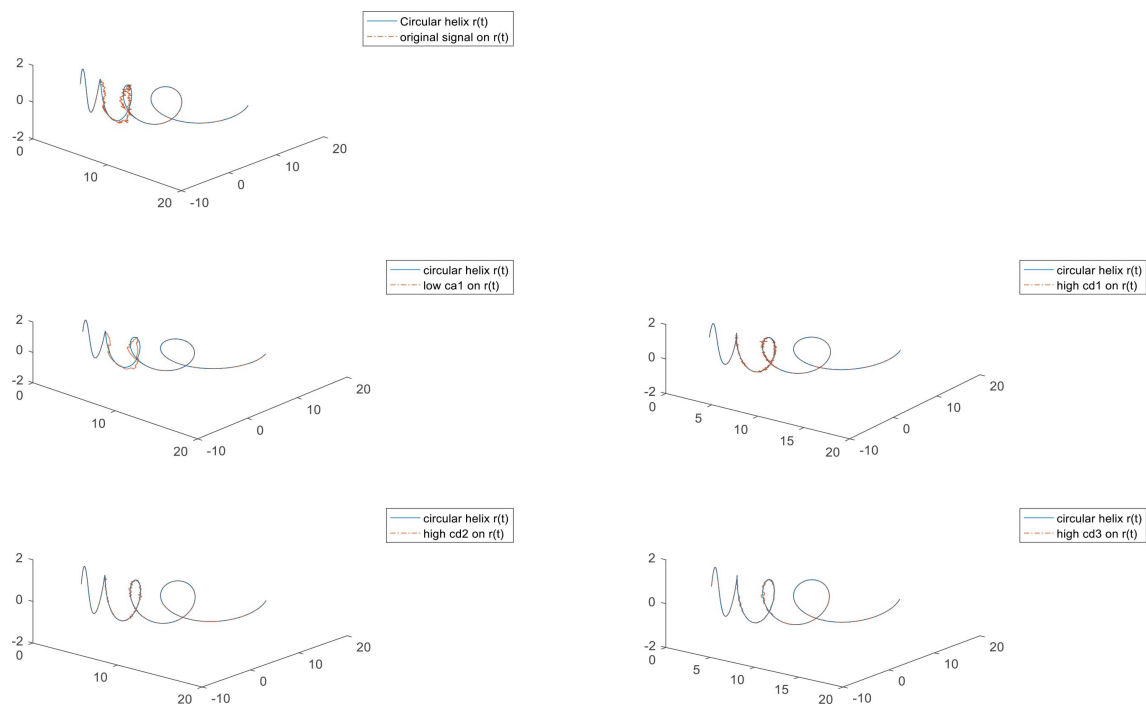


Figure 8. The original signal and its decomposition on a generalized helix curve

图 8. 广义螺旋线上的原始信号及其分解

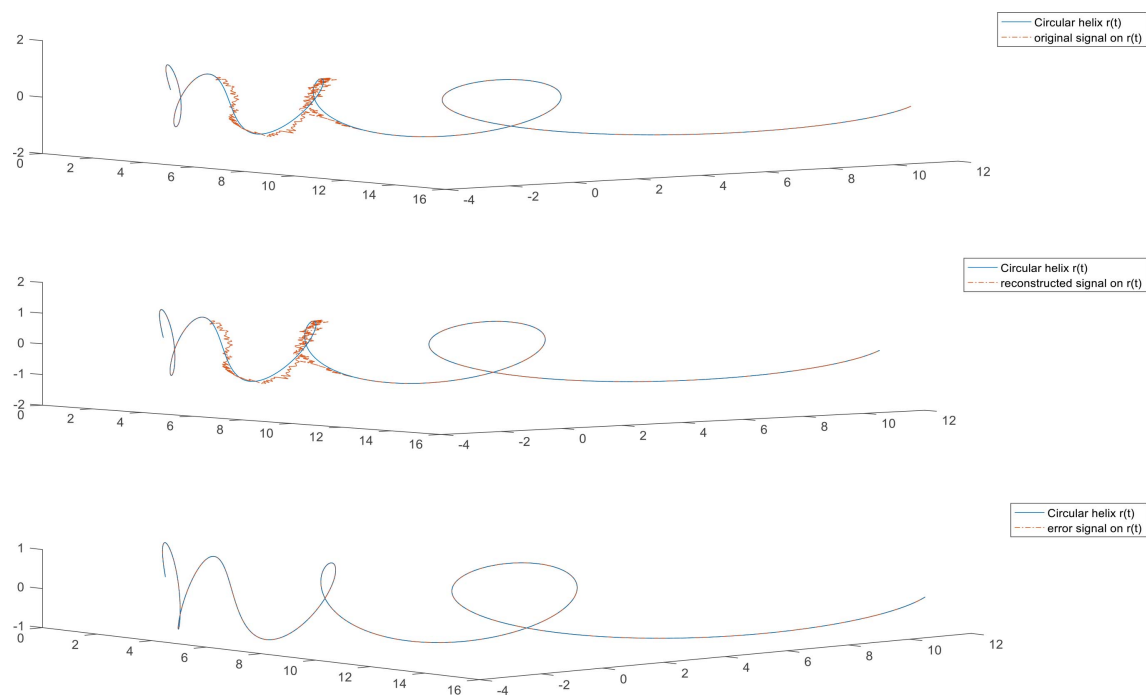


Figure 9. The original signal, reconstructed signal, and their error signal on a generalized helix curve

图 9. 广义螺旋曲线上原始信号, 重建的信号及其误差信号

5. 结论

本文探讨了 3 种螺旋空间曲线上的小波变换。基于保长投影的离散化处理和空间曲线上正交多分辨率分析, 将离散小波变换推广至螺旋空间曲线上, 例如圆螺旋曲线, 双曲螺旋形, 广义螺旋线。通过 3 个示例和图解展示了螺旋曲线上小波函数及离散小波变换的具体应用。最后给出数值示例, 演示了圆螺旋曲线、双曲螺旋线、广义螺旋线上信号分解与重构的实现过程。文中采用的欧拉离散化方案一阶方法, 为提高计算精度, 后期的研究中我们将考虑更高阶的积分方法(如龙格-库塔法)。另外, 文中讨论的方法也为后面研究这类流形上数据处理提供了参考, 如小波系数中包含了高频信息、噪声信息等细节要素, 这对于处理螺旋线上的信号去噪或特征点检测等应用研究提供了启示。我们将另文做详细地探讨。

致 谢

在本文的写作过程中得到导师王刚教授的大力支持和有益的建议, 再次表示感谢。

参考文献

- [1] Zhou, X. (2024) Wavelet Analysis on a Generalized Helix Space Curves and Its Examples. *EURASIP Journal on Advances in Signal Processing*, **2024**, Article No. 70. <https://doi.org/10.1186/s13634-024-01164-w>
- [2] Zhou, X.H. (2016) The Equation and Figures of a Class of Generalized Helicoid. *Journal of Suzhou University*, **31**, 93-95.
- [3] Zhou, X. (2020) Wavelet Transform on Regression Trend Curve and Its Application in Financial Data. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **18**, Article ID: 2050040. <https://doi.org/10.1142/s021969132050040x>
- [4] Zhou, X. and Wang, G. (2021) Biorthogonal Wavelet on a Logarithm Curve $\mathbb{C}$. *Journal of Mathematics*, **2021**, Article ID: 7985069. <https://doi.org/10.1155/2021/7985069>
- [5] Wang, B., Wang, G. and Zhou, X. (2013) Construction of the Multi-Wavelets on Some Smooth Plane Curves via Length-Preserving Projection. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **12**, Article ID: 1450005. <https://doi.org/10.1142/s0219691314500052>
- [6] Zhou, X. and Wang, B. (2018) Wavelet Analysis on Some Smooth Surface with Nonzero Constant Gaussian Curvature. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **16**, Article ID: 1850007. <https://doi.org/10.1142/s0219691318500078>
- [7] Rosca, D. (2011) Wavelet Analysis on Some Surfaces of Revolution via Area Preserving Projection. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, **30**, 262-272. <https://doi.org/10.1016/j.acha.2010.09.008>
- [8] Wang, B.Q., Wang, G., Zhou, X.H. and Su, Y. (2015) Wavelet Analysis on Developable Surface Base on Area Preserving Projection. *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing*, **13**, Article ID: 1550007. <https://doi.org/10.1142/s0219691315500071>
- [9] Daubechies, I. (1992) Ten Lectures on Wavelets. PASIAM Press. <https://doi.org/10.1137/1.9781611970104>