

基于预测信息的参数优化迭代学习控制

胡珍珍, 杨 静

西安工程大学理学院, 陕西 西安

收稿日期: 2025年9月26日; 录用日期: 2025年10月28日; 发布日期: 2025年11月6日

摘 要

针对一类单输入单输出离散线性时不变系统, 本文提出一种预测参数优化迭代学习控制算法。该算法不仅利用历史信息, 还结合预测信息进行学习, 构建了性能指标函数。研究表明, 通过引入未来预测信息, 所设计的迭代学习控制器能够突破传统迭代学习控制算法仅依赖历史数据的局限性, 加入预测信息, 可获得更优越的控制性能。该方法在收敛速度方面有了一定程度的提高。最后, 通过数值仿真验证了所提出方法的有效性。

关键词

迭代学习控制, 预测参数优化, 预测信息

Parameter-Optimal Iterative Learning Control Based on Predictive Information

Zhenzhen Hu, Jing Yang

School of Science, Xi'an Polytechnic University, Xi'an Shaanxi

Received: September 26, 2025; accepted: October 28, 2025; published: November 6, 2025

Abstract

For a class of single-input single-output discrete linear time-invariant systems, this paper proposes a predictive parameter optimized iterative learning control algorithm. The algorithm not only utilizes historical information but also incorporates predictive information for learning, thereby constructing a performance index function. Research demonstrates that by introducing future predictive information, the designed iterative learning controller can overcome the limitation of traditional iterative learning control algorithms that rely solely on historical data. The inclusion of predictive information leads to superior control performance. This method achieves a certain degree of improvement in convergence speed. Finally, the effectiveness of the proposed approach is verified

文章引用: 胡珍珍, 杨静. 基于预测信息的参数优化迭代学习控制[J]. 理论数学, 2025, 15(11): 64-75.

DOI: 10.12677/pm.2025.1511269

through numerical simulations.

Keywords

Iterative Learning Control, Predictive Parameter Optimization, Predictive Information

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

迭代学习控制(Iterative Learning Control, ILC)最早由日本学者 Uchiyama 于 1978 年以日语论文形式提出,但当时并未引起广泛关注。直至 1984 年, Arimoto 等人[1]以英文系统总结并发表了 ILC 的相关研究成果,该领域才逐渐受到学术界的重视。在过去的三十年中, ILC 在理论基础与应用实践两方面均取得了重大进展[2]-[4]。ILC 是一种针对重复运行任务设计的控制方法,其核心在于历史学习信息设计系统输入更新律,使得系统输出序列能够在给定的有限时间间隔内沿着迭代轴跟踪给定的期望轨迹。与传统控制方法不同, ILC 对受控对象的先验知识依赖较低,能够通过反复学习逐步修正控制输入,最终实现在固定时间区间内对给定参考信号的准确跟踪。在实际应用中,人们主要关注的是 ILC 过程的暂态跟踪性能和收敛速度。由于其优异的学习性能和工程适用性, ILC 已在多个实际领域得到广泛应用,例如地铁[5][6]、高铁[7]、外骨骼康复设备[8][9]、多旋翼无人机平台[10]以及永磁线性电机[11]等。

当前,大多数 ILC 研究集中于利用最近一次迭代的信息更新控制输入;在高阶 ILC 方案中,虽可引入多于一次历史信息[12][13],但利用系统模型与历史试验数据对未来试验信息进行预测的研究仍相对匮乏。直观上,通过引入对未来试验的预测, ILC 控制器可减少误差,有望获得更优的控制性能。在已有研究中,文献[14]-[16]提出了沿此方向的初步构想,采用范数最优 ILC 算法对未来试验信息进行预测。然而,这些方法的预测机制本质上仅依赖于系统模型的单步前向预测,未能充分挖掘多次迭代中蕴含的动态规律。因此,其有限的预测能力导致算法无法充分利用未来试验信息来设计控制更新律,从而限制了收敛速度的进一步提升潜力。

随着 ILC 技术的持续发展,理论研究主要聚焦于通过优化迭代学习律以提升系统的跟踪性能。范数优化迭代学习控制(NOILC)最初由 Amann 提出,此后众多学者在此基础上不断进行完善与创新。例如,针对离散系统,文献[17]提出了一种基于范数性能指标的 PID 型快速 NOILC 算法,显著提高了学习效率;面向连续线性时不变系统,文献[18]设计了一种基于插值点的 NOILC 算法,并证明了误差范数具有几何收敛性。文献[19]则针对离散系统的终端跟踪控制问题,提出了一种数据驱动的优化 ILC 算法。文献[20]针对线性时变系统提出了一种计算高效的无提升系统 NOILC 方法,称为非提升 NOILC,进一步提升了计算效率。与范数优化方法相比,参数优化迭代学习控制(POILC)在工程实现上更为简便。Owens 等人[21]基于 ILC 范数优化理论首次提出了参数优化理论,为该方向的研究奠定了基础。随后,众多学者致力于提升算法的跟踪性能,以应对各类实际应用问题。文献[22]针对离散线性时不变系统提出了一种 POILC 算法,有效改善了跟踪效果。为进一步提高性能,文献[23][24]提出了高阶 POILC 算法。文献[25]探讨了系统正定性与 POILC 算法性能之间的关系,而文献[26]-[29]则重点研究了参数优化迭代学习控制算法的鲁棒性。

受上述研究启发,将预测信息与参数优化迭代学习控制方法结合起来,本文提出一种预测参数优化

ILC 算法(PPOILC)。该算法在利用历史批次信息进行学习的基础上, 进一步结合被控对象的模型知识对未来批次进行预测, 以此更新控制输入。为提升学习过程的效率, 本文构建了参数优化性能指标函数, 优化关键参数。理论分析表明, 所提算法在保证跟踪误差单调收敛的同时, 具有更快的收敛速度。

本文的其余部分安排具体如下: 在第 1 节中给出了线性离散时不变系统的基础知识; 第 2 节提出了具有预测试验信息的迭代学习控制; 第 3 节主要基于预测试验信息的参数优化迭代学习控制方案的单调收敛性进行分析; 第 4 节是数值模拟; 最后一部分是对全文的总结。

2. 问题描述

2.1. 基础知识

考虑以下单输入单输出离散时间线性时不变系统:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_k(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_k(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_k(t), \\ \mathbf{y}_k(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_k(t). \end{cases} \quad (1)$$

其中, $T=[0, N-1]$ 为离散时间学习区间, $t \in T$ 为采样时刻, $k \in N^+$ 表示迭代次数, $\mathbf{u}_k(t)$ 、 $\mathbf{x}_k(t)$ 和 $\mathbf{y}_k(t)$ 分别代表第 k 次试验中系统的输入向量、状态向量和输出向量; $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 是适当维数的实数矩阵, 每次试验中, 控制目标是在有限时间区间 $t \in [0, N-1]$ 上尽可能准确地跟踪给定的参考信号 $\mathbf{y}_k(t)$, 该区间包含 N 个离散采样总点数。为简化分析, 假设系统具有单位相对度, 即满足一般性条件 $\mathbf{CB} \neq 0$ 。

引入马尔科夫矩阵

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \mathbf{CB} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & 0 & \cdots & 0 \\ \mathbf{CA}^2\mathbf{B} & \mathbf{CAB} & \mathbf{CB} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{CA}^{N-1}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N-2}\mathbf{B} & \mathbf{CA}^{N-3}\mathbf{B} & \cdots & \mathbf{CB} \end{pmatrix}.$$

线性离散时不变系统满足以下假设:

假设 1: 系统期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t)$ 已知。

假设 2: 每一次迭代的初始状态都相同, 且 $\mathbf{x}_k(0) = 0, k=1, 2, \dots$ 。

假设 3: 对于系统(1), 存在唯一的期望系统状态 $\mathbf{x}_d(t)$, 存在唯一的期望系统输入 $\mathbf{u}_d(t)$ 有:

$$\begin{cases} \mathbf{x}_d(t+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}_d(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}_d(t), \\ \mathbf{y}_d(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}_d(t). \end{cases}$$

为方便表达, 将提升的向量表示为:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_k(t) &= [\mathbf{u}_k(0), \mathbf{u}_k(1), \dots, \mathbf{u}_k(N-1)]^T, \\ \mathbf{y}_k(t) &= [\mathbf{y}_k(1), \mathbf{y}_k(2), \dots, \mathbf{y}_k(N)]^T. \end{aligned}$$

假设给定期望轨迹 $\mathbf{y}_d(t) = [\mathbf{y}_d(1), \mathbf{y}_d(2), \dots, \mathbf{y}_d(N)]^T$ 。则在第 $k+1$ 次运算时由 $\mathbf{u}_{k+1}$ 驱动的跟踪误差向量表示为 $\mathbf{e}_{k+1}(t) = \mathbf{y}_d(t) - \mathbf{y}_{k+1}(t) = [\mathbf{e}_{k+1}(1), \mathbf{e}_{k+1}(2), \dots, \mathbf{e}_{k+1}(N)]^T$ 。

系统(1)可写为

$$\mathbf{y}_k(t) = \mathbf{G}\mathbf{u}_k(t). \quad (2)$$

系统控制目标:

在迭代学习控制框架下, 给定任意初始控制输入 $\mathbf{u}_0$ 及其对应的初始跟踪误差 $\mathbf{e}_0$, 通过逐次迭代, 依次生成控制输入序列 $\mathbf{u}_k, k=1, 2, \dots, n$, 作为系统每一次运行的控制信号。系统控制的核心目标是在迭代过程中不断优化控制性能, 实现系统输出沿迭代轴渐近收敛至期望轨迹, 具体表现为跟踪误差与控制输入均实现收敛:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{e}_k = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{u}_k = \mathbf{u}^*,$$

其中, $\mathbf{u}^*$ 为理想控制输入, 即系统在无穷迭代次数后能够完全精确跟踪期望轨迹时所对应的控制信号。

2.2. 具有预测信息的迭代学习控制

在本部分中, 详细阐述了在迭代学习控制设计中引入预测信息, 并给出完整的理论推导过程。通过系统化地利用前瞻性实验数据, 增强了对系统动态特性的认知与建模精度, 从而提升控制器的学习效率与收敛性能。

预测信息

步骤 1: 在第 $k+1$ 次试验时, 利用以下公式预测未来 n 步试验的信息

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_{k+1,k+i} &= \mathbf{u}_{k+1,k+i-1} + \beta \mathbf{G}^T \mathbf{e}_{k+1,k+i}, \\ \mathbf{e}_{k+1,k+i} &= (\mathbf{I} - \beta \mathbf{G} \mathbf{G}^T) \mathbf{e}_{k+1,k+i-1} = \mathbf{P} \mathbf{e}_{k+1,k+i-1}. \end{aligned}$$

其中 $1 \leq i \leq n$, $0 < \beta < \frac{2}{\|\mathbf{G}\|^2}$ 。这里 $\beta \mathbf{G}^T$ 是学习增益矩阵, β 是调节因子; $\mathbf{u}_{k+1,k+i}$ 和 $\mathbf{e}_{k+1,k+i}$ 分别表示在第 $k+1$ 次试验时预测第 $k+i$ 步试验的输入和跟踪误差, 且初始条件为 $\mathbf{u}_{k+1,k} = \mathbf{u}_k$, $\mathbf{e}_{k+1,k} = \mathbf{e}_k$ 。

可以使用任何 ILC 算法来进行预测, 例如, 梯度 ILC 算法和范数最优 ILC 算法, 其唯一要求是误差演化算子满足

将未来控制增量记为

$$\Delta \mathbf{u}_{k+1,k+i} = \mathbf{u}_{k+1,k+i} - \mathbf{u}_k, i=1, \dots, n.$$

定义:

$$\Delta \mathbf{U}_k = [\Delta \mathbf{u}_{k+1,1}, \Delta \mathbf{u}_{k+1,2}, \dots, \Delta \mathbf{u}_{k+1,n}].$$

步骤 2: 第 $k+1$ 次迭代的输入由以下公式给出:

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + v_{k+1} \mathbf{e}_k + \omega_{k+1} (\gamma_{k,1} \Delta \mathbf{u}_{k+1,k+1} + \dots + \gamma_{k,n} \Delta \mathbf{u}_{k+1,k+n}), \quad (3)$$

其中, v_{k+1} , ω_{k+1} 为参数。 $\gamma_{k,i}, i=1, 2, \dots, n$ 为加权系数, 满足:

$$0 < \gamma_{k,i} < 1, \sum_{i=1}^n \gamma_{k,i} = 1.$$

为表达简洁, 可将加权系数向量记为:

$$\boldsymbol{\gamma}_k = [\gamma_{k,1}, \gamma_{k,2}, \dots, \gamma_{k,n}]^T.$$

该向量满足所有元素均为正数且和为 1, 从而保证控制增量在多个预测步长上的平滑融合与渐进调整。于是, 式(3)可写为

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + v_{k+1} \mathbf{e}_k + \omega_{k+1} \Delta \mathbf{U}_k \boldsymbol{\gamma}_k. \quad (4)$$

注 1: 在步骤 1 中, 我们采用 P 型 ILC 结构作为预测器, 因其结构简单, 仅依赖于当前误差和模型

信息, 易于实现和理解。其收敛条件明确, 便于分析与设计。此外, 作为 ILC 中基础且被广泛研究的形式之一, P 型 ILC 也便于与其他 ILC 算法(如参数优 ILC)结合使用。该预测步骤基于系统模型及先前的试验数据(即第 k 次试验的输入 $\mathbf{u}_k$ 与跟踪误差 $\mathbf{e}_k$), 对未来 n 步的迭代学习情况进行预测。预测步 n 的选择需考虑: 在模型精度高、系统动态明确的场景下, 可适当增大 n 以提升性能。在步骤 2 中, 算法将利用这些预测信息来设计第 $k+1$ 次试验的控制输入。通过将未来的预测信息纳入控制更新律, 所设计的 ILC 控制器可以有更好的跟踪效果。

3. 参数优化及收敛性分析

参数优化过程是为了确保每次迭代过程中的参数取最优值, 从而实现跟踪误差的快速单调收敛。在算法(4)中, 为了计算第 $k+1$ 次迭代的输入 $\mathbf{u}_{k+1}$, 参数 ν_{k+1} , ω_{k+1} 取如下二次型目标函数 J_{k+1} 的解, 即:

$$[\nu_{k+1}, \omega_{k+1}] = \arg \min \{J_{k+1}(\nu_{k+1}, \omega_{k+1})\}. \quad (5)$$

式(5)中的性能指标函数 J_{k+1} 为:

$$J_{k+1} = \|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 + \tau_1 \nu_{k+1}^2 + \tau_2 \omega_{k+1}^2, \quad (6)$$

其中 $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$ 。设 ν_{k+1}^* , ω_{k+1}^* 是最优参数。

定理 1: 设控制律应用到系统(1), 考虑性能指标函数(6), 得最优参数 ν_{k+1}^* 和 ω_{k+1}^* 为

$$[\nu_{k+1}^*, \omega_{k+1}^*]^T = \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{B}_k.$$

其中 $\mathbf{A}_k$ 是非奇异且正定的。这里 $\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \|\mathbf{G}\mathbf{e}_k\|^2 & \langle \mathbf{G}\mathbf{e}_k, \mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k \rangle \\ \langle \mathbf{G}\mathbf{e}_k, \mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k \rangle & \|\mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k\|^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\mathbf{e}_k \rangle \\ \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k \rangle \end{bmatrix}$ 。

证明: 将式(4)代入式(2), 并利用跟踪误差定义, 得

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{k+1} &= \mathbf{y}_d - \mathbf{y}_k + \mathbf{y}_k - \mathbf{y}_{k+1} \\ &= \mathbf{e}_k - \mathbf{G}(\mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{u}_k) \\ &= \mathbf{e}_k - \mathbf{G}(\nu_{k+1}\mathbf{e}_k + \omega_{k+1}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k) \\ &= \mathbf{e}_k - \nu_{k+1}\mathbf{G}\mathbf{e}_k - \omega_{k+1}\mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k. \end{aligned} \quad (7)$$

对式(7)两边同时取 2-范数可得

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 &= \|\mathbf{e}_k - \nu_{k+1}\mathbf{G}\mathbf{e}_k - \omega_{k+1}\mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k\|^2 \\ &= \|\mathbf{e}_k\|^2 + \nu_{k+1}^2 \|\mathbf{G}\mathbf{e}_k\|^2 + \omega_{k+1}^2 \|\mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k\|^2 - 2\nu_{k+1} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\mathbf{e}_k \rangle \\ &\quad - 2\omega_{k+1} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k \rangle + 2\nu_{k+1}\omega_{k+1} \langle \mathbf{G}\mathbf{e}_k, \mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k \rangle. \end{aligned} \quad (8)$$

令 $\frac{\partial J_{k+1}}{\partial \nu_{k+1}} = 0$, $\frac{\partial J_{k+1}}{\partial \omega_{k+1}} = 0$ 得

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{k+1}}{\partial \nu_{k+1}} &= 2\nu_{k+1}^* \|\mathbf{G}\mathbf{e}_k\|^2 - 2\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\mathbf{e}_k \rangle \\ &\quad + 2\omega_{k+1} \langle \mathbf{G}\mathbf{e}_k, \mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k \rangle + 2\tau_1 \nu_{k+1}^* = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial J_{k+1}}{\partial \omega_{k+1}} &= 2\omega_{k+1}^* \|\mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k\|^2 - 2\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k \rangle \\ &\quad + 2\nu_{k+1} \langle \mathbf{G}\mathbf{e}_k, \mathbf{G}\Delta\mathbf{U}_k\boldsymbol{\gamma}_k \rangle + 2\tau_2 \omega_{k+1}^* = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

联立式(9)式(10)可得

$$\begin{cases} 2\nu_{k+1}^* \|\mathbf{Ge}_k\|^2 - 2\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{Ge}_k \rangle + 2\omega_{k+1} \langle \mathbf{Ge}_k, \mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k \rangle + 2\tau_1 \nu_{k+1}^* = 0, \\ 2\omega_{k+1}^* \|\mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k\|^2 - 2\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k \rangle + 2\nu_{k+1} \langle \mathbf{Ge}_k, \mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k \rangle + 2\tau_2 \omega_{k+1}^* = 0. \end{cases} \quad (11)$$

将式(11)写成矩阵形式, 得

$$\begin{bmatrix} \|\mathbf{Ge}_k\|^2 & \langle \mathbf{Ge}_k, \mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k \rangle \\ \langle \mathbf{Ge}_k, \mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k \rangle & \|\mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k\|^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \nu_{k+1}^* \\ \omega_{k+1}^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{Ge}_k \rangle \\ \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k \rangle \end{bmatrix}. \quad (12)$$

令 $\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \|\mathbf{Ge}_k\|^2 & \langle \mathbf{Ge}_k, \mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k \rangle \\ \langle \mathbf{Ge}_k, \mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k \rangle & \|\mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k\|^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_1 & 0 \\ 0 & \tau_2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{B}_k = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{Ge}_k \rangle \\ \langle \mathbf{e}_k, \mathbf{G}\Delta \mathbf{U}_k \gamma_k \rangle \end{bmatrix}$ 。因为 $\tau_1 > 0, \tau_2 > 0$, 因此 $\mathbf{A}_k$ 是非奇异且正定的。根据式(12), 可得

$$\begin{bmatrix} \nu_{k+1}^* \\ \omega_{k+1}^* \end{bmatrix}^T = \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{B}_k. \quad (13)$$

为了凸显本文所提出的预测参数优化方法的优势, 我们将其与经典的参数优化迭代学习控制方法进行对比。在经典方法中, 控制更新律通常设计为

$$\mathbf{u}_{k+1} = \mathbf{u}_k + \lambda_{k+1} \mathbf{e}_k,$$

其中参数 λ_k 通过最小化如下性能指标得

$$[\lambda_{k+1}^*] = \arg \min \left\{ \|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 + \tau_1 \lambda_{k+1}^2 \right\},$$

其解析解为

$$\lambda_{k+1}^* = \frac{\langle \mathbf{e}_k, \mathbf{Ge}_k \rangle}{(\|\mathbf{Ge}_k\|^2 + \tau_1)}.$$

与本文提出的预测参数优化方法(式(5), (6))相比, 经典方法存在以下局限:

仅利用当前误差信息, 未引入对未来迭代的预测, 收敛速度受限; 参数无法在早期迭代中有效抑制未来误差; 对模型误差和初始条件的适应性较弱。本文所提出的方法通过引入多步预测信息, 显著提升了收敛性能, 尤其在初始阶段表现出更快的误差下降速度, 如第4节仿真结果所示。

注2: 可以看出, 系统参数 ν_{k+1}^* 和 ω_{k+1}^* 的估计值依赖于每次迭代过程中所获得的数据, 即马尔科夫矩阵 $\mathbf{G}$ 与误差信号 $\mathbf{e}_k$, 控制输入变化量 $\Delta \mathbf{u}_k$ 与加权系数 γ_k 的内积等信息。在实际应用中, 即便系统模型存在一定的不确定性或偏差, 只要迭代过程中能够持续获取可靠的运行数据, 参数仍可依据实际响应进行自我调整, 从而逐步逼近真实值。因此, 该方法具有较强的鲁棒性和适应性, 尤其适用于模型难以精确建立或存在动态变化的复杂控制场景。

定理2: 若将算法(4)应用到系统(1), 则对任意的 $k > 0$ 有 $\|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 < \|\mathbf{e}_k\|^2$, 且

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{k+1}^* = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{k+1}^* = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_k\| = 0.$$

证明: 首先, 证明跟踪误差 2-范数意义下单调递减。

由性能指标函数 J_{k+1} 的定义及其最优性可知, 对于最优参数 ν_{k+1}^* , ω_{k+1}^* , 下式成立

$$J_{k+1}(\nu_{k+1}^*, \omega_{k+1}^*) \leq J_{k+1}(\nu_{k+1}, \omega_{k+1}), \forall \nu_{k+1}, \omega_{k+1} \in \mathbb{R}. \quad (14)$$

特别地, 取非最优参数 $\nu_{k+1} = 0, \omega_{k+1} = 0$, 代入式(14)

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 + \tau_1 (\nu_{k+1}^*)^2 + \tau_2 (\omega_{k+1}^*)^2 = J_{k+1}(\nu_{k+1}^*, \omega_{k+1}^*) \leq J_{k+1}(0, 0) = \|\mathbf{e}_k\|^2. \quad (15)$$

由于 $\tau_1 > 0$, $\tau_2 > 0$ 且 $(\nu_{k+1}^*)^2$ 和 $(\omega_{k+1}^*)^2$ 非负, 可得

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 \leq \|\mathbf{e}_k\|^2 - \left(\tau_1 (\nu_{k+1}^*)^2 + \tau_2 (\omega_{k+1}^*)^2 \right) \leq \|\mathbf{e}_k\|^2. \quad (16)$$

又因为 $\tau_1 (\nu_{k+1}^*)^2 + \tau_2 (\omega_{k+1}^*)^2 \geq 0$, 当且仅当 $\nu_{k+1}^* = \omega_{k+1}^* = 0$ 时等号成立, 故有

$$\|\mathbf{e}_{k+1}\|^2 < \|\mathbf{e}_k\|^2. \quad (17)$$

至此, 我们证明了跟踪误差范数随迭代次数增加而单调递减。

其次, 证明参数序列收敛于零。

对不等式(16)进行变换, 可得

$$\left(\tau_1 (\nu_{k+1}^*)^2 + \tau_2 (\omega_{k+1}^*)^2 \right) \leq \|\mathbf{e}_k\|^2 - \|\mathbf{e}_{k+1}\|^2. \quad (18)$$

对不等式(18)从 $k=0$ 到 $k=n-1$ 求和

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\tau_1 (\nu_{k+1}^*)^2 + \tau_2 (\omega_{k+1}^*)^2 \right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} (\|\mathbf{e}_k\|^2 - \|\mathbf{e}_{k+1}\|^2) = \|\mathbf{e}_0\|^2 - \|\mathbf{e}_n\|^2 \leq \|\mathbf{e}_0\|^2. \quad (19)$$

不等式(19)的左边是正项级数的部分和, 该部分和序列单调递增并由常数 $\|\mathbf{e}_0\|^2$ 所界定。根据单调有界收敛定理, 该正项级数收敛

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\tau_1 (\nu_{k+1}^*)^2 + \tau_2 (\omega_{k+1}^*)^2 \right) < \infty. \quad (20)$$

根据级数收敛的必要条件, 其通项趋于零

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\tau_1 (\nu_{k+1}^*)^2 + \tau_2 (\omega_{k+1}^*)^2 \right) = 0. \quad (21)$$

由于 $\tau_1 > 0$ 和 $\tau_2 > 0$, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{k+1}^* = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{k+1}^* = 0. \quad (22)$$

最后, 证明跟踪误差收敛于零。

由公式(13)可知, 参数 $\nu_{k+1}^*, \omega_{k+1}^*$ 由向量 $\mathbf{B}_k$ 决定。已知可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{B}_k = \mathbf{0}. \quad (23)$$

由 $\mathbf{B}_k$ 的定义, 可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_k\|^2 = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} \|\mathbf{e}_k\| = 0. \quad (24)$$

综上, 定理 2 得证。

4. 仿真

考虑一个离散线性系统, 其系统结构如式(1)系统矩阵如下:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 \\ 0.1 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 0.3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0.5 \end{pmatrix}^T.$$

系统的运行区间设定为 $\mathbf{T} = \{0, 1, \dots, 49\}$, 初始控制信号为 $[\mathbf{x}_1(0), \mathbf{x}_2(0)]^T = \mathbf{0}$, 期望轨迹线为 $\mathbf{y}_d(t) = 0.5 \sin(0.3i) e^{(-0.01i)}$, $t \in \mathbf{T}$ 。经计算 $\mathbf{CB} \neq \mathbf{0}$ 满足系统要求。

利用 MATLAB 求解

$$G = \begin{pmatrix} 1.050\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0.675\ 0 & 1.050\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0.433\ 5 & 0.675\ 0 & 1.050\ 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 3.7447 \times 10^{-10} & 5.8381 \times 10^{-10} & 9.1018 \times 10^{-10} & \cdots & 1.050\ 0 \end{pmatrix}.$$

仿真结果如下:

图 1 展示了最优参数 ν_{k+1}^* 随迭代次数的变化曲线。可以观察到, ν_{k+1}^* 的值在最初的几次迭代中先上升后快速下降, 随后逐渐趋近于零。这一现象与定理 1 中 $\lim_{k \rightarrow \infty} \nu_{k+1}^* = 0$ 的结论完全一致。同样地, 图 2 展示了最优参数 ω_{k+1}^* 的收敛过程。在最初的几次迭代中快速下降, 随后逐渐趋近于零。满足了 $\lim_{k \rightarrow \infty} \omega_{k+1}^* = 0$ 的理论预期。

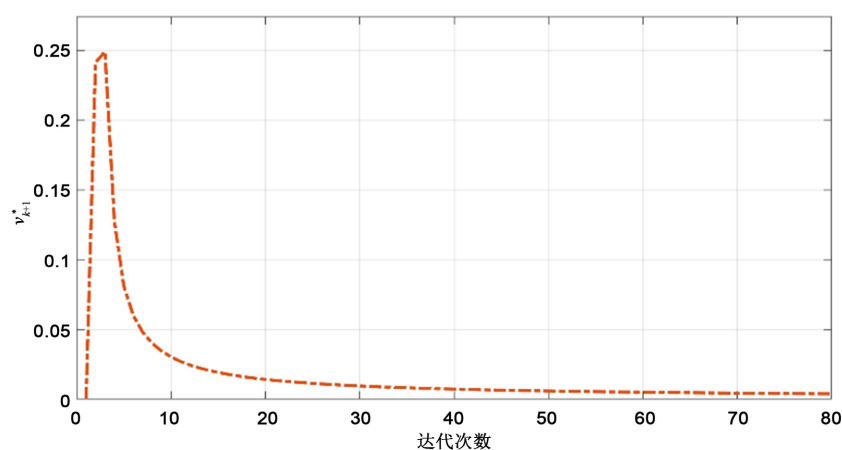


Figure 1. The convergence of parameter ν_{k+1}^* over 80 iterations

图 1. 迭代 80 次参数 ν_{k+1}^* 的收敛性

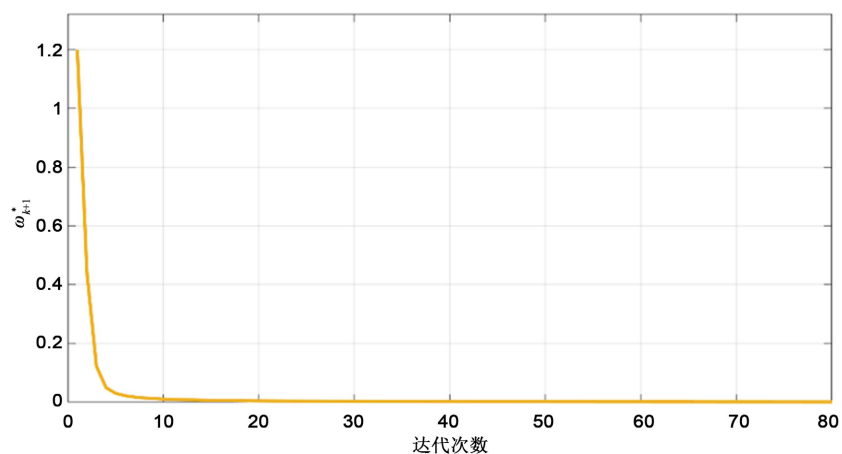


Figure 2. The convergence of parameter ω_{k+1}^* over 80 iterations

图 2. 迭代 80 次参数 ω_{k+1}^* 的收敛性

图 3 展示了在第 80 次迭代时, 系统输出的跟踪效果。从图中可以直观地看出, 经过 80 次的学习,

两条曲线几乎完全重合, 仅在极少数时间点存在肉眼难以分辨的微小偏差。这表明经过 80 次迭代学习, 所提 POILC 算法在实际应用层面实现了高精度跟踪。

图 4 展示了 PPOILC 方法中跟踪误差范数的收敛特性。从图中可以看出, 随着迭代次数的增加, 跟踪误差的范数呈现出明显的单调递减趋势。在迭代 80 次时跟踪误差的范数到 10^{-3} 量级, 一直处于单调递减的状态。当迭代次数趋于无穷时跟踪误差的范数最终会满足定理 1 结论, 即 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|e_k\| = 0$ 。

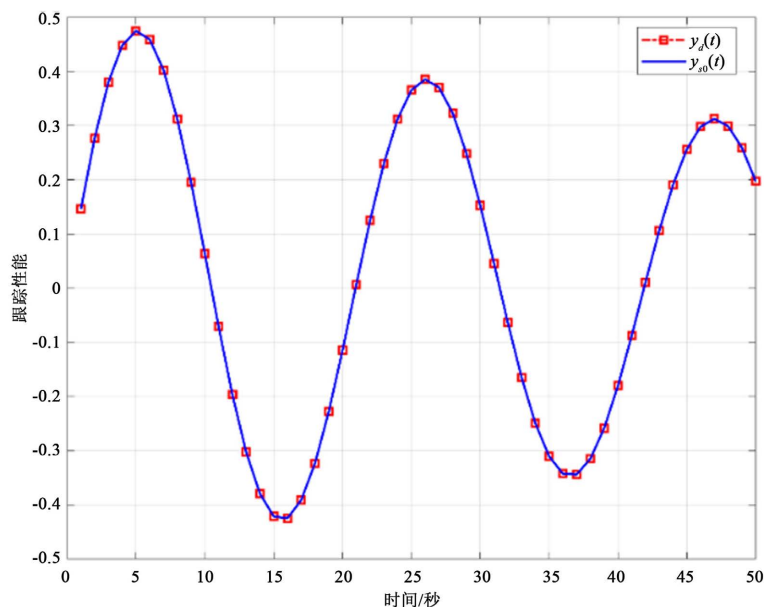


Figure 3. Tracking the effect of the system after 80 iterations

图 3. 迭代 80 次系统跟踪效果

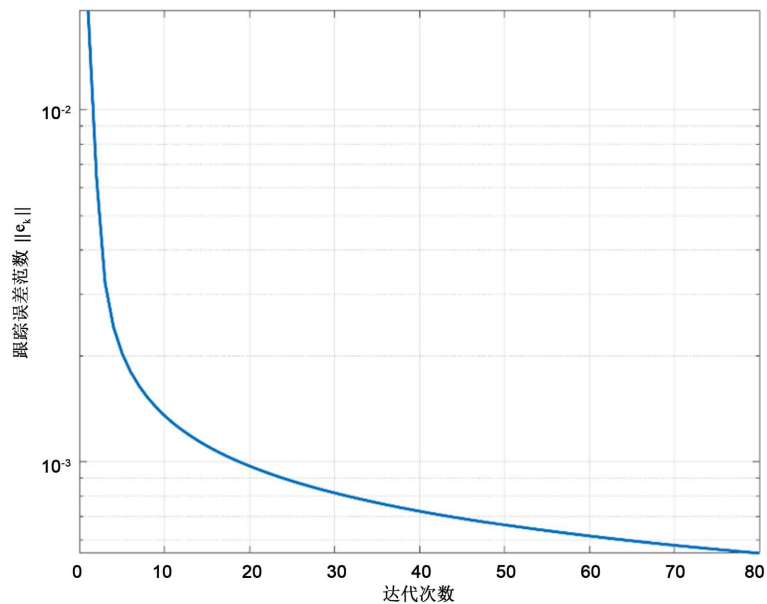


Figure 4. Convergence of the tracking error norm for PPOILC

图 4. PPOILC 跟踪误差范数收敛性

图5对比了 POILC 算法与本文所提 PPOILC 算法的跟踪误差范数收敛性能。本文提出的 PPOILC 算法表现出极其迅速的收敛特性。其误差范数在前 5 次迭代内就急剧下降了数个数量级。相比之下, POILC 算法的收敛速度则缓慢得多。

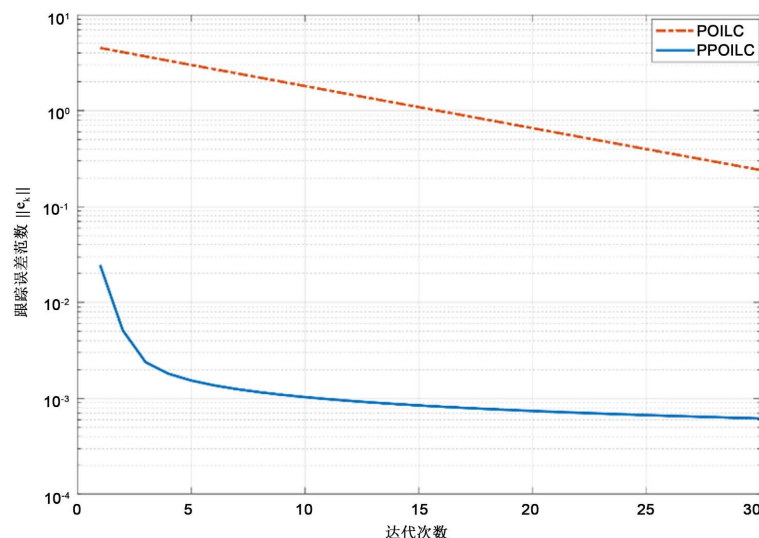


Figure 5. Comparison of tracking errors among different learning strategies

图 5. 不同学习策略的跟踪误差范数对比

5. 总结

该算法在迭代学习控制框架下, 充分利用历史批次的运行信息和预测信息设计控制律, 以实现对未来批次系统行为的有效预测。通过该预测机制, 控制器能够前瞻性地更新控制输入, 从而提升系统的跟踪性能与收敛速度。此外, 本文建立了基于参数优化的性能指标函数, 为控制器的设计提供了明确的优化目标, 进一步增强了算法的综合性能。理论分析和仿真结果一致表明, PPOILC 算法能够以更少的迭代次数达到更高的跟踪精度, 即收敛速度明显优于 POILC 算法。这验证了所引入的预测更新机制与参数优化策略的有效性, 表明该算法在处理重复操作任务时, 能够更快地学习并逼近期望轨迹, 从而为高性能迭代学习控制提供了一种新的有效解决方案。

参考文献

- [1] Arimoto, S., Kawamura, S. and Miyazaki, F. (1984) Bettering Operation of Robots by Learning. *Journal of Robotic Systems*, **1**, 123-140. <https://doi.org/10.1002/rob.4620010203>
- [2] Bristow, D.A., Tharayil, M. and Alleyne, A.G. (2006) A Survey of Iterative Learning Control. *IEEE Control Systems*, **26**, 96-114.
- [3] Shen, D. and Wang, Y. (2014) Survey on Stochastic Iterative Learning Control. *Journal of Process Control*, **24**, 64-77. <https://doi.org/10.1016/j.jprocont.2014.04.013>
- [4] Shen, D. and Li, X. (2019) A Survey on Iterative Learning Control with Randomly Varying Trial Lengths: Model, Synthesis, and Convergence Analysis. *Annual Reviews in Control*, **48**, 89-102. <https://doi.org/10.1016/j.arcontrol.2019.10.003>
- [5] Zheng, J. and Hou, Z. (2023) Data-Driven Spatial Adaptive Terminal Iterative Learning Predictive Control for Automatic Stop Control of Subway Train with Actuator Saturation. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, **24**, 11453-11465. <https://doi.org/10.1109/tits.2023.3275205>
- [6] Zheng, J. and Hou, Z. (2023) ESO-Based Model-Free Adaptive Iterative Learning Energy-Efficient Control for Subway Train with Disturbances and Over-Speed Protection. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, **24**, 8136-

8148. <https://doi.org/10.1109/tits.2023.3264503>
- [7] Huang, D., He, Y., Yu, W., Qin, N., Wang, Q. and Sun, P. (2023) Spatial Adaptive Iterative Learning Tracking Control for High-Speed Trains Considering Passing through Neutral Sections. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, **53**, 6157-6168. <https://doi.org/10.1109/tsmc.2023.3279782>
 - [8] Molazadeh, V., Zhang, Q., Bao, X. and Sharma, N. (2022) An Iterative Learning Controller for a Switched Cooperative Allocation Strategy during Sit-to-Stand Tasks with a Hybrid Exoskeleton. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **30**, 1021-1036. <https://doi.org/10.1109/tcst.2021.3089885>
 - [9] Liu, L., Illian, M., Leonhardt, S. and Misgeld, B.J.E. (2023) Iterative Learning Control for Cascaded Impedance-Controlled Compliant Exoskeleton with Adaptive Reaction to Spasticity. *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, **72**, 1-11. <https://doi.org/10.1109/tim.2023.3286004>
 - [10] Yu, P., Su, Y., Ruan, L. and Tsao, T. (2023) Compensating Aerodynamics of Over-Actuated Multi-Rotor Aerial Platform with Data-Driven Iterative Learning Control. *IEEE Robotics and Automation Letters*, **8**, 6187-6194. <https://doi.org/10.1109/lra.2023.3304539>
 - [11] Lin, N., Li, H., Chi, R., Hou, Z. and Huang, B. (2023) Data-Driven Virtual Reference Set-Point Learning of PD Control and Applications to Permanent Magnet Linear Motors. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, **53**, 4142-4154. <https://doi.org/10.1109/tsmc.2023.3240182>
 - [12] Gunnarsson, S. and Norrlöf, M. (2006) On the Disturbance Properties of High Order Iterative Learning Control Algorithms. *Automatica*, **42**, 2031-2034. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2006.06.010>
 - [13] Hättönen, J., Owens, D.H. and Feng, K. (2006) Basis Functions and Parameter Optimisation in High-Order Iterative Learning Control. *Automatica*, **42**, 287-294. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2005.05.025>
 - [14] Amann, N., Owens, D.H. and Rogers, E. (1998) Predictive Optimal Iterative Learning Control. *International Journal of Control*, **69**, 203-226. <https://doi.org/10.1080/002071798222794>
 - [15] Chu, B. and Owens, D.H. (2011) Accelerated Predictive Norm-Optimal Iterative Learning Control. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part I: Journal of Systems and Control Engineering*, **225**, 744-759. <https://doi.org/10.1177/0959651811399541>
 - [16] Hättönen, J. and Owens, D.H. (2004) Convex Modifications to an Iterative Learning Control Law. *Automatica*, **40**, 1213-1220. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2004.02.005>
 - [17] Li, H. and Hao, X. (2010) A Fast PID Type Parameter Optimal Iterative Learning Control Algorithm for Non-Positive Plants. *Proceedings of the 29th Chinese Control Conference*, Beijing, 29-31 July 2010, 2091-2096.
 - [18] Owens, D.H., Freeman, C.T. and Chu, B. (2015) Generalized Norm Optimal Iterative Learning Control with Intermediate Point and Sub-Interval Tracking. *International Journal of Automation and Computing*, **12**, 243-253. <https://doi.org/10.1007/s11633-015-0888-8>
 - [19] Chi, R., Wang, D., Hou, Z. and Jin, S. (2012) Data-driven Optimal Terminal Iterative Learning Control. *Journal of Process Control*, **22**, 2026-2037. <https://doi.org/10.1016/j.procont.2012.08.001>
 - [20] Sun, H. and Alleyne, A.G. (2014) A Computationally Efficient Norm Optimal Iterative Learning Control Approach for LTV Systems. *Automatica*, **50**, 141-148. <https://doi.org/10.1016/j.automatica.2013.09.009>
 - [21] Owens, D.H. and Hatonen, J. (2005) Parameter Optimal Iterative Learning Control: A Unifying Formulation and Analysis. *The Fourth International Workshop on Multidimensional Systems*, Wuppertal, 10-13 July 2005, 129-135. <https://doi.org/10.1109/nds.2005.195342>
 - [22] Owens, D.H. and Feng, K. (2003) Parameter Optimization in Iterative Learning Control. *International Journal of Control*, **76**, 1059-1069. <https://doi.org/10.1080/0020717031000121410>
 - [23] Li, H., Hao, X. and Xu, W. (2008) A Fast Parameter Optimal Iterative Learning Control Algorithm. 2008 *International Conference on Embedded Software and Systems Symposia*, Chengdu, 29-31 July 2008, 375-379. <https://doi.org/10.1109/icess.symposia.2008.36>
 - [24] Bo, P. and Cheng, S. (2015) High-Order Parameter-Optimization Iterative Learning Control Algorithm. *Control Theory and Application*, **32**, 561-567.
 - [25] Hatonen, J.J., Feng, K. and Owens, D.H. (2003) New Connections between Positivity and Parameter-Optimal Iterative Learning Control. *Proceedings of the 2003 IEEE International Symposium on Intelligent Control ISIC-03*, Houston, 8-8 October 2003, 69-74. <https://doi.org/10.1109/isic.2003.1253916>
 - [26] Songjun, M. (2015) Parameter Optimal Iterative Learning Control with Application to a Robot Arm. *Universal Journal of Control and Automation*, **3**, 28-32. <https://doi.org/10.13189/ujca.2015.030202>
 - [27] Chu, B., Owens, D.H. and Freeman, C.T. (2016) Iterative Learning Control with Predictive Trial Information: Convergence, Robustness, and Experimental Verification. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, **24**, 1101-1108. <https://doi.org/10.1109/tcst.2015.2476779>

-
- [28] Pang, B. and Shao, C. (2014) A Robust Iterative Learning Control with Parameter-Optimization for Discrete Nonlinear Systems. *Control & Decision*, **29**, 449-454.
 - [29] Bo, P. and Cheng, S. (2014) PID-Type Parameter Optimal Iterative Learning Control Algorithm Based on Singular Value Decomposition. *Information and Control*, **43**, 483-489.