Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(11), 85-91
Published Online November 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1511271

函数的D导数及其应用

张传芳，杨春玲

广东石油化工学院理学院，广东 茂名

收稿日期：2025年9月26日；录用日期：2025年10月28日；发布日期：2025年11月7日

摘 要

本文研究D导数与连续的关系及D导数与传统导数的关系，结果表明：D可导与连续之间互不蕴含；D可导是可导的必要非充分条件，但若函数是连续的，则D可导与可导等价。最后，列举两个实例说明D导数的应用。

关键词

D导数，连续，可导

The D-Derivative of a Function and Its Applications

Chuanfang Zhang, Chunling Yang

School of Science, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong

Received: September 26, 2025; accepted: October 28, 2025; published: November 7, 2025

Abstract

In this paper, we investigate the relationship between the D-derivative and continuity, as well as the D-derivative and the derivative. The results show that D-differentiability and continuity do not imply each other; the D-differentiability is a necessary condition for differentiability. However, if a function is continuous, then D-differentiability is equivalent to differentiability. Finally, two examples are provided to illustrate the applications of the D-derivative.

Keywords

D-Derivative, Continuity, Differentiability

文章引用: 张传芳, 杨春玲. 函数的 D 导数及其应用[J]. 理论数学, 2025, 15(11): 85-91.
DOI: 10.12677/pm.2025.1511271

1. 引言

无论是数学分析[1] [2]亦或是高等数学[3]中，导数都是微分学中最基本的概念，导数的重要性不言而喻。但传统的导数定义有一定的局限性，主要表现在一些简单的函数在某些点处不存在导数。例如绝对值函数在原点处不可导、Dirichlet 函数和 Riemann 函数均是处处不可导[4] [5]等。为了使得这些常见的函数在某些点处能够存在某种意义下的导数，很多学者尝试推广导数的定义，如文献[6] [7]讨论了对称导数，使得绝对值函数在原点处存在对称导数；文献[8]给出了一种积分形式定义的导数，并在文献[9]中称这种导数为 D 导数，在此意义下，Dirichlet 函数和 Riemann 函数均在无理点处存在 D 导数。以文献[8] [9]为基础，本文继续讨论 D 导数与连续、传统导数等概念之间的关系，并给出 D 导数的一些应用。

2. D 导数

定义 2.1 [9]设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 内可积，若

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left[f(t)-f(x_0)\right]\mathrm{d}t}{\Delta x^2}$$

存在，则称此极限为 $f(x)$ 在点 x_0 的 D 导数。记作：$\dfrac{Df(x_0)}{Dx}$ 或 $f^D(x_0)$，此时也称函数 $f(x)$ 在 x_0 点 D 可导。

显然，当 $f(x)$ 为连续可导时，此定义与原有的导数定义等效。但当 $f(x)$ 仅为可积，甚至仅仅 Lebesgue 可积时，此定义包含了更多的内容[8]。

注：本文讨论的积分除特别说明外均指黎曼(Riemann)积分。

3. 主要结论

3.1. D 导数与连续的关系

函数 $f(x)$ 在 x_0 点 D 导数存在，得不出函数在 x_0 点连续。如

例 3.1 Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当}x\text{为}[0,1]\text{内有理数时}\\ 0, & \text{当}x\text{为}[0,1]\text{内无理数时}.\end{cases}$$

Dirichlet 函数在 $[0,1]$ 区间内的任何点处均不连续[1]，但该函数在 $[0,1]$ 区间内的无理点处存在 D 导数[8]。因为函数 $D(x)$ 在 $[0,1]$ 上 Lebesgue 可积且积分为零，所以，当 x_0 为 $[0,1]$ 区间内的无理点时有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left[D(t)-D(x_0)\right]\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}D(t)\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=0,$$

故 $D(x)$ 在点 x_0 的 D 导数存在且为 0。但当 x_0 为 $[0,1]$ 区间内的有理点时，有 $D(x_0)=1$。不妨设 $\Delta x>0$ ($\Delta x<0$ 类似可证)，由 Dirichlet 函数的非负性有

$$0\le\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}D(t)\mathrm{d}t\le\int_0^1 D(t)\mathrm{d}t=0$$

即

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} D(t)\mathrm{d}t = 0$$

从而有极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left[D(t)-D(x_0)\right]\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}D(t)\mathrm{d}t-2\Delta x}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2}{\Delta x}$$

显然，上述极限不存在，故 D 导数不存在。

反之，函数在 x_0 点处连续，也得不出函数在 x_0 点处存在 D 导数。如

例 3.2 函数 $f(x)=|x|, x\in[-1,1]$。

显然该函数在 $x_0=0$ 点连续，但

$$\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2\int_0^{\Delta x}\left[f(t)-f(0)\right]\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{2\int_0^{\Delta x}\left[|t|-0\right]\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta x^2}{\Delta x^2}=1$$

$$\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2\int_0^{\Delta x}\left[f(t)-f(0)\right]\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{2\int_0^{\Delta x}\left[|t|-0\right]\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0^{+-}}\frac{-\Delta x^2}{\Delta x^2}=-1$$

故绝对值函数在 $x_0=0$ 点处的 D 导数 $f^D(0)$ 不存在。

综上可知，函数在一点处存在 D 导数是函数在该点连续的既非充分又非必要条件。

3.2. D 导数与导数的关系

定理 3.1 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上可积且在点 $x_0\in(a,b)$ 可导，则 $f(x)$ 在点 x_0 的 D 导数存在且 $f^D(x_0)=f'(x_0)$。

证明 因函数 $f(x)$ 在点 x_0 可导，由导数的定义 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $|t-x_0|<\delta$ 时，有

$$\left|\frac{f(t)-f(x_0)}{t-x_0}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$$

故当 $t-x_0>0$ 时，有

$$\left(f'(x_0)-\varepsilon\right)(t-x_0)<f(t)-f(x_0)<\left(f'(x_0)+\varepsilon\right)(t-x_0)$$

取 $0<\Delta x<\delta$，积分可得

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left(f'(x_0)-\varepsilon\right)(t-x_0)\mathrm{d}t<\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)-f(x_0)\mathrm{d}t<\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left(f'(x_0)+\varepsilon\right)(t-x_0)\mathrm{d}t$$

从而有

$$\left|\frac{2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}f(t)-f(x_0)\mathrm{d}t}{\Delta x^2}-f'(x_0)\right|<\varepsilon$$

类似地，当 $t-x_0<0$ 时，也可得上式成立。故函数 $f(x)$ 在点 x_0 的 D 导数存在，且

$$f^D(x_0)=f'(x_0).$$

反之，函数的 D 可导不能保证可导，如

例 3.3 Riemann 函数

$$R(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & \text{当}x=\dfrac{p}{q}\left(p\text{、}q\text{为正整数},\dfrac{p}{q}\text{为既约分数}\right)\text{时}\\ 0, & \text{当}x=0,\ 1\text{及}(0,1)\text{内无理数时}.\end{cases}$$

Riemann 函数在 $(0,1)$ 区间上任何无理点处连续，任何有理点处不连续[1]。在传统导数意义下它在区间 $[0,1]$ 上处处不可导[4] [5]。然而，Riemann 函数在 $[0,1]$ 上的无理点处存在 D 导数[8]。这是因为函数 $R(x)$ 在 $[0,1]$ 上可积且积分为 0，又因 $R(x)$ 是非负函数，故

$$\int_x^{x+\Delta x} R(t)\mathrm{d}t=0\quad\left(x,x+\Delta x\in(0,1)\right)$$

所以，当 x_0 为 $[0,1]$ 内的无理点时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left[R(t)-R(x_0)\right]\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}R(t)\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=0$$

故 $R(x)$ 在点 x_0 的 D 导数存在且为 0，即 $R^D(x_0)=0$。但当 x_0 为 $[0,1]$ 区间内的有理点时，因极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\left[R(t)-R(x_0)\right]\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}R(t)\mathrm{d}t-\frac{2}{q}\Delta x}{\Delta x^2}=\frac{-2}{q}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}$$

不存在，故在该点的 D 导数不存在。

显然 Dirichlet 函数也能说明 D 可导不能保证可导。但对于连续函数来说，则 D 可导蕴含可导。

定理 3.2 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续且存在 D 导数，则函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导且 $f'(x)=f^D(x)$，$x\in[a,b]$。

证明 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，故变上限积分函数是可导的[1]-[3]。$\forall x\in[a,b]$，显然有

$$2\int_x^{x+\Delta x}\left[f(t)-f(x)\right]\mathrm{d}t=2\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-2\Delta x\cdot f(x)\to 0\left(\Delta x\to 0\right),$$

再对 Δx 求导有

$$\left(2\int_x^{x+\Delta x}f(t)\mathrm{d}t-2\Delta x\cdot f(x)\right)'=2f(x+\Delta x)-2f(x)$$

故由洛必达法则有

$$f^D(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\int_x^{x+\Delta x}\left[f(t)-f(x)\right]\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2f(x+\Delta x)-2f(x)}{2\Delta x}=f'(x).$$

推论 3.1 若 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，则 D 导数存在的充分必要条件是(传统)导数存在且 $f'(x)=f^D(x)$。

4. D 导数的应用

4.1. 降低求导与极限可交换的条件

一般地，在交换求导与极限运算的顺序时，要求函数列的导函数列具有一致收敛性，这个条件要求较高而且证明较繁琐，然而利用 D 导数处理此类问题时大大的减弱了条件，如下的定理 4.1 中不要求导函数列的一致收敛性就可以使求导与极限运算可交换。

定理 4.1 [8]设函数列 $\{f_n(x)\}$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且它的每一项均有连续的导数 $f_n'(x)$，如果

1) $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$；

2) $f_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛于 $p(x)$，

则 $f^D(x)=p(x)$ 成立的充分必要条件是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\int_x^{x+\Delta x}\left[f_n'(t)-f_n'(x)\right](x+\Delta x-t)\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=0\text{。}$$

注：在导函数列具有一致收敛性的条件下定理 4.1 的结论自然成立[9]。

例 4.1 考虑函数列 $f_n(x)=\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-nx^2}\right)$，$x\in[0,1]$。

由于

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n(x)-\frac{1}{2}\right|=-\lim_{n\to\infty}\mathrm{e}^{-n}=0$$

故 $f_n(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上一致收敛于 $f(x)\equiv\frac{1}{2}$。又因为 $f_n'(x)=nx\mathrm{e}^{-nx^2}$ 且

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}\left|f_n'(x)\right|=\lim_{n\to\infty}\left|f_n'\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{n}{2}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}=\infty\text{。}$$

故 $f_n'(x)$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛，甚至也不是内闭一致收敛的，在 $[0,1]$ 上只有

$$f_n'(x)\to p(x)\equiv 0(n\to\infty)$$

成立，因此，无法按照传统的方法讨论积分与求导运算交换的问题。对于 $x,x+\Delta x\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}&\frac{\int_x^{x+\Delta x}f_n'(t)(x+\Delta x-t)\mathrm{d}t}{\Delta x^2}\\&=\frac{-1}{2\Delta x^2}(x+\Delta x)\int_x^{x+\Delta x}\mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}\left(-nt^2\right)+\frac{1}{2\Delta x^2}\int_x^{x+\Delta x}t\mathrm{d}\mathrm{e}^{-nt^2}\\&=\frac{-(x+\Delta x)}{2\Delta x^2}\mathrm{e}^{-nt^2}\Big|_x^{x+\Delta x}+\frac{t\mathrm{e}^{-nt^2}}{2\Delta x^2}\Bigg|_x^{x+\Delta x}-\frac{1}{2\Delta x^2}\int_x^{x+\Delta x}\mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t\\&=\frac{-(x+\Delta x)}{2\Delta x^2}\left[\mathrm{e}^{-n(x+\Delta x)^2}-\mathrm{e}^{-nx^2}\right]+\frac{1}{2\Delta x^2}\left[(x+\Delta x)\mathrm{e}^{-n(x+\Delta x)^2}-x\mathrm{e}^{-nx^2}\right]-\frac{1}{2\Delta x^2}\int_x^{x+\Delta x}\mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t\end{aligned}$$

显然对于固定的 $x,x+\Delta x\in[0,1]$，有

$$\frac{-(x+\Delta x)}{2\Delta x^2}\left[\mathrm{e}^{-n(x+\Delta x)^2}-\mathrm{e}^{-nx^2}\right]\to 0(n\to\infty),$$

$$\frac{1}{2\Delta x^2}\left[(x+\Delta x)\mathrm{e}^{-n(x+\Delta x)^2}-x\mathrm{e}^{-nx^2}\right]\to 0(n\to\infty)$$

及

$$\frac{1}{2\Delta x^2}\left|\int_x^{x+\Delta x}\mathrm{e}^{-nt^2}\mathrm{d}t\right|\le\frac{1}{2\Delta x}\max\left\{\mathrm{e}^{-n(x+\Delta x)^2},\mathrm{e}^{-nx^2}\right\}\to 0(n\to\infty).$$

再结合 $f_n'(x)\to 0(n\to\infty)$，故

$$\lim_{\Delta x\to 0}\lim_{n\to\infty}\frac{\int_x^{x+\Delta x}\left[f_n'(t)-f_n'(x)\right](x+\Delta x-t)\mathrm{d}t}{\Delta x^2}=0$$

根据文献[8]的讨论可知常函数的 D 导数等于零，再结合定理 4.1 可得

$$f^D(x)=p(x).$$

4.2. 降低求导与积分可交换的条件

含参变量的积分求导时往往都要求二元函数及其偏导数在矩形区域上具有连续性，然后借助一致连续性得出相应的结论，但利用 D 导数处理此类问题时可以弱化条件，使得更多的函数能够满足对参变量求导的条件。

设 $f(x,y)$ 是定义在矩形 $[a,b]\times[c,d]$ 上的函数，当 x 取 $[a,b]$ 上某定值时，$f(x,y)$ 是定义在 $[c,d]$ 上的一元函数，若 $f(x,y)$ 在 $[c,d]$ 上可积，则其积分

$$I(x)=\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y,\quad x\in[a,b]$$

是一个定义在 $[a,b]$ 上的函数，称它为含参变量积分，x 为参变量。

定理 4.2 [10]设函数 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上可积，且

1) 任给 $x_0\in[a,b]$，$f(x_0,y),f_x(x_0,y)$ 均在 $[c,d]$ 上可积；

2) 任给 $y_0\in[c,d]$，$f(x,y_0)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

则 $I^D(x_0)=\int_c^d f_x(x_0,y)\mathrm{d}y$ 成立的充分必要条件是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\int_c^d\left[2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\frac{f(t,y)-f(x_0,y)}{\Delta x^2}\mathrm{d}t-f_x(x_0,y)\right]\mathrm{d}y=0$$

例 4.2 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2y^2\cos\dfrac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases},\quad (x,y)\in[-1,1]\times[-1,1].$$

显然，$f(x,y)$ 满足定理 4.2 的条件，又易得

$$f_x(x,y)=\begin{cases}2xy^2\cos\dfrac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases},\quad f_y(x,y)=\begin{cases}2x^2y\cos\dfrac{1}{y}+x^2\sin\dfrac{1}{y}, & y\neq 0\\ 0, & y=0\end{cases}$$

易见 $f_y(x,y)$ 在 x 轴上除原点外的任意一点都不连续，故不满足通常的偏导数连续的条件。但当 $y=0$ 时，有

$$\lim_{\Delta x\to 0}\int_{-1}^1\left[2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\frac{f(t,0)-f(x_0,0)}{\Delta x^2}\mathrm{d}t-f_x(x_0,0)\right]\mathrm{d}y=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{-1}^1\left[2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\frac{0-0}{\Delta x^2}\mathrm{d}t-0\right]\mathrm{d}y=0\text{；}$$

当 $y\neq 0$ 时，亦有

$$\begin{aligned}&\lim_{\Delta x\to 0}\int_{-1}^1\left[2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\frac{f(t,y)-f(x_0,y)}{\Delta x^2}\mathrm{d}t-f_x(x_0,y)\right]\mathrm{d}y\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\int_{-1}^1\left[2\int_{x_0}^{x_0+\Delta x}\frac{t^2y^2\cos\dfrac{1}{y}-{x_0}^2y^2\cos\dfrac{1}{y}}{\Delta x^2}\mathrm{d}t-2x_0y^2\cos\frac{1}{y}\right]\mathrm{d}y\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2}{3}\Delta x\cdot\int_{-1}^1 y^2\cos\frac{1}{y}\mathrm{d}y=0,\end{aligned}$$

故由定理 4.2 可得

$$I^D(x_0)=\int_{-1}^{1} f_x(x_0,y)\mathrm{d}y, \forall x_0\in[-1,1].$$

5. 结束语

本文首先引入了一元函数的 D 导数的概念，然后讨论了 D 导数与连续、可导等概念之间的关系，最后介绍了 D 导数的一些应用。作为导数概念的一种推广，D 导数对于研究一些不可导函数具有一定的应用价值，因为利用积分定义的 D 导数平滑了函数的局部振荡，为不可导函数提供了“可导”的可能。如 Dirichlet 函数和 Riemann 函数在无理点处存在 D 导数。本文的讨论丰富了一元函数微分学的内容，开阔学生视野的同时，对于数学分析的理解和学习都大有裨益。

利用 D 导数解决问题时虽然可以降低条件，但由于 D 导数的定义形式比较复杂，这就使得应用它求解各类问题时不是特别方便。显然 D 导数定义中的积分形式求极限不如传统导数定义中函数值的差求极限来的简单，这是 D 导数的局限性之一。另外，并不是所有函数都存在 D 导数，例如绝对值函数在原点处不存在 D 导数，Dirichlet 函数和 Riemann 函数在有理点处也不存在 D 导数，这也是 D 导数的不足之处。众所周知，任何一种推广都不一定能够完美解决所有问题，这就促使人们不断探索，这恰是推动科学技术进步的重要动力。对于 D 导数，可以进一步讨论类似定理 4.2 中当矩形区域无界时 D 导数和积分可交换问题，或者将 D 导数推广到多元函数，例如讨论 D 偏导数及其应用等问题，这些都是值得深入探讨的问题。

致　谢

在此对参考文献给予的启发与思考以及审稿人提出的宝贵意见表示衷心感谢！

基金项目

1) 国家自然基金项目编号：11961037。
2) 广东石油化工学院科研基金人才引进项目，项目编号：2019rc101。

参考文献

[1] 华东师范大学数学系. 数学分析: 上册[M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010: 6.
[2] 张筑生, 数学分析新讲(重排本) (第二册) [M]. 第 2 版. 北京: 北京大学出版社, 2021: 8.
[3] 同济大学数学科学学院. 高等数学: 上册[M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023: 6.
[4] 闫现杰, 宋延乐. 黎曼函数的性质及其应用[J]. 齐齐哈尔大学学报(自然科学版), 2018, 34(5): 73-77.
[5] 何越. 狄利克雷函数与黎曼函数的性质[J]. 河南教育学院学报(自然科学版), 2013, 22(4): 25-27.
[6] 李雍. 导数与对称导数的关系[J]. 无锡教育学院学报, 1999(4): 79-82.
[7] 高静华, 梁波. 对称导数在研究函数上的应用[J]. 长春大学学报, 2012, 22(12): 1488-1489, 1494.
[8] 吕冠国. 导数的一个新定义及其应用[J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 1999(1): 58-60
[9] 吕冠国. 导数的一个新定义及其应用(续 1) [J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 1999(2): 55-59
[10] 吕冠国. 导数的一个新定义及其应用(续 2) [J]. 云南师范大学学报(自然科学版), 1999(5): 61-66.