

一类三维Jerk系统的余维二Bautin分岔分析

陈玉明

赣南师范大学, 数学与计算机科学学院, 江西 赣州

收稿日期: 2025年9月30日; 录用日期: 2025年10月29日; 发布日期: 2025年11月6日

摘 要

针对一类具有三次项的三维Jerk系统, 本文致力于分析该系统的余维二Bautin分岔行为。首先, 基于Hopf分岔理论, 给出了Hopf分岔发生的适当参数条件, 并计算了相对应的第一Lyapunov系数; 其次, 研究了Hopf分岔发生退化后的余维二Bautin分岔行为, 给出了对应的分岔参数条件, 并计算了第二Lyapunov系数; 最后, 通过数值仿真, 对Bautin分岔平衡点进行了适当的参数扰动, 获得了分岔后的不同动力学行为。

关键词

Hopf分岔, Bautin分岔, Jerk系统

Research on Codimensional-2 Bautin Bifurcation of a Three-Dimensional Jerk System

Yuming Chen

Department of Mathematics and Computer Science, Gannan Normal University, Ganzhou Jiangxi

Received: September 30, 2025; accepted: October 29, 2025; published: November 6, 2025

Abstract

This paper is devoted to analyzing the codimension-2 Bautin bifurcations of a generalized three-dimensional (3D) jerk system which is jerk function with some cubic terms. First, some adequate parameter conditions for guaranteeing the occurrence of Hopf bifurcation of this jerk system are given, and the first Lyapunov coefficient is obtained. Second, some adequate parameter conditions for guaranteeing the occurrence of Bautin bifurcation of this jerk system are given, and the second Lyapunov coefficient is obtained. Finally, according to the theoretical analyses and numerical

文章引用: 陈玉明. 一类三维 Jerk 系统的余维二 Bautin 分岔分析[J]. 理论数学, 2025, 15(11): 76-84.

DOI: 10.12677/pm.2025.1511270

simulation, under some certain parameter conditions, the above theoretical analyses are verified.

Keywords

Hopf Bifurcation, Bautin Bifurcation, Jerk System

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

混沌系统的研究往往需要用到分岔及动力系统等理论, 研究其平衡点的稳定性、周期解的稳定性及产生与消失、混沌控制及同步的条件、平衡点的高余维分岔、周期及同宿轨道的分岔、混沌吸引子的产生与毁灭等[1]-[5]。

Hopf 分岔定理已成为应用数学中研究微分方程平衡点附近周期解产生与消失的标准工具, 而 Bautin 分岔则可能引起 Hopf 平衡点附近产生多个周期解的共存行为[1] [6] [7], 这与 Hilbert 十六问题[8]的第二部分紧密相关, 该部分主要考虑二维多项式系统中极限环的个数及稳定性情况。很多复杂的动力系统, 从气候、生态到股票市场及应用工程系统等[9] [10], 都存在很多的吸引子共存现象。这类动力系统吸引子共存现象被称之为多稳定性, 这类性质常常伴随着不可预测吸引子的产生, 此类吸引子也被称之为隐藏吸引子[11] [12]。

在经典力学中, 如下的三阶微分方程被称之为 Jerk 系统, 用来描述位置 $x(t)$ 随时间变化的演变规律,

$$\ddot{x} = J(x, \dot{x}, \ddot{x}, t).$$

Jerk 函数 J 描述了运动加速度的变化率, $x(t)$ 上方的点表示对时间 t 的导数。Jerk 系统在工程中具有大量的应用, 尤其是在力学与声学的某些应用中[13]。

令 $\dot{x} = y, \ddot{x} = z$, 则上述三阶微分方程可以转化成如下的三维 Jerk 系统

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = z, \quad \dot{z} = J(x, y, z, t),$$

这个系统形式简单, 但是却呈现出非常复杂的分岔及动力学行为。针对多种不同类型的特殊 Jerk 系统, 不同类型的分岔行为已被研究[4] [5], 并且一些新的混沌 Jerk 系统也被仔细的研究。

很多研究者们感兴趣于研究三维 Jerk 系统的余维二 Zero-Hopf 分岔行为[4] [5], 但是很少文献研究 Jerk 系统的其它余维二分岔行为, 如 Bagdanov-Takens 分岔及 Bautin 分岔。

在本文中, Jerk 函数被考虑为具有线性项及两个三次项, 具体的三维 Jerk 系统如下

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = z, \\ \dot{z} = b_1x + b_2y + b_3z + c_1x^3 + c_2xyz, \end{cases} \quad (1.1)$$

该系统始终具有一个原点平衡点 $O(0,0,0)$ 。

本文主要致力于研究 Jerk 系统(1.1)的 Hopf 分岔及余维二 Bautin 分岔。在第 2 节中, 为了研究的完整性, 我们给出了一般的 Hopf 分岔定理, 并且给出了保证 Hopf 分岔发生的一些参数条件。在第 3 节中, 给出了 Jerk 系统(1.1)在平衡点 $O(0,0,0)$ 处的 Bautin 分岔研究, 并通过数值仿真方法对理论研究结果进行

了验证。最后,在第4节中对本文的工作进行了总结。

2. Hopf 分岔分析

为了研究 Jerk 系统(1.1)在平衡点 O 处的 Hopf 分岔及其退化行为,我们将文献[1]中的投影方法总结如下,主要用于计算分别对应于 Hopf 分岔及 Bautin 分岔的第一及第二 Lyapunov 系数,即 l_1 及 l_2 。

考虑如下微分方程

$$\dot{X} = f(X, \eta), \quad (2.1)$$

其中 $X \in \mathfrak{R}^n$ 及 $\eta \in \mathfrak{R}^m$ 分别为空间向量及参数向量, $f(X, \eta)$ 为 $\mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}^m$ 空间中的 C^∞ 类向量函数。假设系统(2.1)在参数 $\eta = \eta_0$ 时具有平衡点 $X = X_0$, 将变量 $X - X_0$ 重新记为 X , 并且将向量 $F(X) = f(X, \eta_0)$ 记为

$$F(X) = AX + \frac{1}{2}B(X, X) + \frac{1}{6}C(X, X, X) + \frac{1}{24}D(X, X, X, X) + \frac{1}{120}E(X, X, X, X, X) + O(\|X\|^6),$$

其中 $A = f_x(0, \eta_0)$ 及

$$B_i(x, y) = \sum_{j,k=1}^n \frac{\partial^2 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k} \Big|_{\xi=0} x_j y_k, \quad C_i(x, y, z) = \sum_{j,k,l=1}^n \frac{\partial^3 F_i(\xi)}{\partial \xi_j \partial \xi_k \partial \xi_l} \Big|_{\xi=0} x_j y_k z_l, \quad (2.2)$$

$D_i, E_i, i=1, \dots, n$ 也具有类似的结构, 其中 $y \in \mathfrak{R}^n$ 及 $z \in \mathfrak{R}^n$ 。

假设上述 Jacobian 矩阵 A 具有一对纯虚特征值 $\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i, \omega_0 > 0$, 并且其它的特征值均具有非零实部。令 $p, q \in C^n$ 为使得如下条件满足的向量

$$Aq = i\omega_0 q, A^T p = -i\omega_0 p, \langle p, q \rangle = \sum_{i=1}^n \bar{p}_i q_i = 1, \quad (2.3)$$

其中 A^T 为矩阵 A 的转置。

令 T^C 为矩阵 A 对应于特征值 $\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i, \omega_0 > 0$ 的广义特征空间, 任意向量 $y \in T^C$ 都可以被表示成 $y = wq + \bar{w}\bar{q}$, 其中 $w = \langle p, y \rangle$ 为复数。与特征值 $\lambda_{1,2}$ 相对应的二维中心流形可以通过 w 及 $\bar{w}$ 进行参数化, 即具有如下这种形式的表达

$$X = wq + \bar{w}\bar{q} + \sum_{2 \leq j+k \leq 5} \frac{1}{j!k!} h_{jk} w^j \bar{w}^k + O(\|w\|^6), \quad (2.4)$$

其中 $h_{jk} \in C^n$ 及 $h_{jk} = \bar{h}_{kj}$ 。将表达式(2.4)代入系统(2.1)中, 并且求解其中的待定复向量 h_{jk} , 于是可得如下关于 w 的方程,

$$\dot{w} = i\omega_0 w + \frac{1}{2}G_{21}w|w|^2 + \frac{1}{12}G_{32}w|w|^4 + O(\|w\|^6), \quad (2.5)$$

其中

$$G_{21} = \langle p, C(q, q, \bar{q}) + B(\bar{q}, h_{20}) + 2B(q, h_{11}) \rangle \quad (2.6)$$

$$G_{32} = \langle p, H_{32} \rangle \quad (2.7)$$

及

$$\begin{aligned}
H_{32} = & B(h_{02}, h_{30}) + 6B(h_{11}, h_{21}) + 3B(h_{12}, h_{20}) + 3B(q, h_{22}) + 2B(\bar{q}, h_{31}) \\
& + 3C(q, h_{02}, h_{20}) + 6C(q, h_{11}, h_{11}) + 3C(q, q, h_{12}) + 6C(q, \bar{q}, h_{20}) \\
& + 6C(\bar{q}, h_{11}, h_{20}) + C(\bar{q}, \bar{q}, h_{30}) + D(q, q, q, h_{02}) + 6D(q, q, \bar{q}, h_{11}) \\
& + 3D(q, \bar{q}, \bar{q}, h_{20}) + E(q, q, q, \bar{q}, \bar{q}) - 6G_{21}h_{21} - 3\bar{G}_{21}h_{21}.
\end{aligned} \quad (2.8)$$

第一 Lyapunov 系数 l_1 被定义为 $l_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} G_{21}$ ，而第二 Lyapunov 系数 l_2 被定义为 $l_2 = \frac{1}{12} \operatorname{Re} G_{32}$ 。基于对第一 Lyapunov 系数 l_1 的计算，可得如下关于系统(1.1)在平衡点 O 处的 Hopf 分岔定理：

定理 2.1: 假设 $b_2 < 0$ 及 $b_3 \neq 0$ 成立，当参数 b_1 穿过临界参数 $b_1 = -b_2 b_3 \triangleq b_{10}$ 时，系统(1.1)在平衡点 O 处发生 Hopf 分岔，并且有如下结论成立：

- 1) 如果 $3c_1 + b_2 b_3 c_2 > 0$ ，在平衡点 O 处发生的 Hopf 分岔为超临界分岔，并且当 $b_1 < b_{10}$ 时存在一个稳定周期解；
- 2) 如果 $3c_1 + b_2 b_3 c_2 < 0$ ，在平衡点 O 处发生的 Hopf 分岔为亚临界分岔，并且当 $b_1 > b_{10}$ 时存在一个不稳定周期解。

证明: 令 $X = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ， $\eta = (b_1, b_2, b_3, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^5$ 及

$$f(X, \eta) = (y, z, b_1 x + b_2 y + b_3 z + c_1 x^3 + c_2 xyz),$$

则系统(1.1)被改写成了系统(2.1)的形式。

系统(1.1)在平衡点 O 处的特征方程为

$$P(\lambda) = |\lambda I - A| = \lambda^3 - b_3 \lambda^2 - b_2 \lambda - b_1 = 0, \quad (2.9)$$

假设方程(2.9)具有一对纯虚特征根 $\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i, \omega_0 > 0$ ，则方程(2.9)即可变成

$$-b_1 \pm i b_2 \omega_0 + b_3 \omega_0^2 \pm i \omega_0^3 = 0,$$

也即意味着

$$\omega_0^3 + b_2 \omega_0 = 0, b_3 \omega_0^2 - b_1 = 0,$$

求解可得

$$b_1 = -b_2 b_3, \omega_0 = \sqrt{-b_2} > 0.$$

从而可得，系统(1.1)的平衡点 O 在如下参数集 Γ_1 上将具有一对纯虚特征根及另一个非零实部的特征根，

$$\Gamma_1 = \{(b_1, b_2, b_3, c_1, c_2) \in \mathbb{R}^5 \mid b_2 < 0, b_3 \neq 0, b_1 = -b_2 b_3\}.$$

在参数条件 Γ_1 下，向量场 f 在平衡点 O 处的 Jacobian 矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b_2 b_3 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

对应的特征值为 $\lambda_{1,2} = \pm \omega_0 i$ 及 $\lambda_3 = b_3$ 。

通过计算，选取向量

$$q = (1, i\omega_0, b_2)^T, p = (i\omega_0 b_3, -i\omega_0 - b_3, 1)^T, \quad (2.11)$$

它们可以使得条件(2.3)成立。

由(2.2)可得

$$\begin{aligned} B(x, y) &= (0, 0, 0)^T, \\ C(x, y, z) &= (0, 0, 6c_1x_1y_1z_1 + c_2(x_1y_2z_3 + x_1y_3z_2 + x_2y_1z_3 + x_2y_3z_1 + x_3y_1z_2 + x_3y_2z_1))^T. \end{aligned} \quad (2.12)$$

基于(2.10), (2.11)及(2.12), 可计算得

$$h_{11} = h_{20} = h_{02} = (0, 0, 0)^T.$$

进一步使用(2.6), 可计算得第一 Lyapunov 系数 l_1 为

$$l_1 = \frac{1}{2} \operatorname{Re} G_{21} = \frac{3c_1 + b_2b_3c_2}{2b_2 - 2b_3^2}. \quad (2.13)$$

当 $b_2 < 0$ 时, l_1 的分母 $2b_2 - 2b_3^2$ 显然为负数, 因此第一 Lyapunov 系数 l_1 的符号完全由分子 $3c_1 + b_2b_3c_2$ 决定. 如果 $3c_1 + b_2b_3c_2 < 0$, 可得 $l_1|_{r_1} > 0$, 从而发生在 O 处的 Hopf 分岔为亚临界分岔. 否则, 如果 $3c_1 + b_2b_3c_2 > 0$, 可得 $l_1|_{r_1} < 0$, 从而发生在 O 处的 Hopf 分岔为超临界分岔.

由于 $l_1|_{r_1} \neq 0$ 只是在 O 处发生 Hopf 分岔的非退化条件, 为了验证该 Hopf 分岔的横截条件, 考虑方程 (2.9) 中复特征值 $\lambda_{1,2} = \mu(b_1) \pm \omega(b_1)i$ 的实部 $\mu(b_1)$, 它满足

$$(\mu(b_1) + i\omega(b_1))^3 - b_3(\mu(b_1) + i\omega(b_1))^2 - b_2(\mu(b_1) + i\omega(b_1)) - b_1 = 0,$$

即

$$\begin{aligned} -b_1 - b_2\mu(b_1) - b_3\mu(b_1)^2 + \mu(b_1)^3 + b_3\omega(b_1)^2 - 3\mu(b_1)\omega(b_1)^2 &= 0, \\ b_2\omega(b_1) + 2b_3\mu(b_1)\omega(b_1) - 3\mu(b_1)^2\omega(b_1) + \omega(b_1)^3 &= 0. \end{aligned}$$

在临界参数条件 $b_1 = b_{10}$ 下, 可得 $\mu(b_{10}) = 0$ 及 $\omega(b_{10}) = \sqrt{-b_2}$, 从而有

$$\left. \frac{\partial \mu(b_1)}{\partial b_1} \right|_{b_1=b_{10}} = - \left. \frac{b_2 + 2b_3\mu(b_1) - 3\mu(b_1)^2 + 3\omega(b_1)^2}{\xi(b_1)} \right|_{b_1=b_{10}} = \frac{1}{2(b_2 - b_3^2)} < 0,$$

其中

$$\begin{aligned} \xi(b_1) &= b_2^2 + b_2(4b_3\mu(b_1) - 6\mu(b_1)^2 + 6\omega(b_1)^2) \\ &\quad + (\mu(b_1)^2 + \omega(b_1)^2)(4b_3^2 - 12b_3\mu(b_1) + 9(\mu(b_1)^2 + \omega(b_1)^2)). \end{aligned}$$

因此, 发生在 O 处 Hopf 分岔的横截条件成立, 并且在对应的二维中心流形上, 当 $b_1 > b_{10}$ 时 O 为稳定平衡点, 当 $b_1 < b_{10}$ 时 O 为不稳定平衡点. 从而, 当把系统(1.1)限制在平衡点 O 的相应二维中心流形上时, 具有如下的动力学行为:

- 1) 如果 $3c_1 + b_2b_3c_2 > 0$, 在平衡点 O 处发生的 Hopf 分岔为超临界分岔, 并且当 $b_1 < b_{10}$ 时存在一个稳定周期解;
- 2) 如果 $3c_1 + b_2b_3c_2 < 0$, 在平衡点 O 处发生的 Hopf 分岔为亚临界分岔, 并且当 $b_1 > b_{10}$ 时存在一个不稳定周期解。

3. Bautin 分岔及数值仿真

由公式(2.13)可知, 当且仅当参数条件 $c_1 = -\frac{1}{3}b_2b_3c_2$ 成立时, 才有第一 Lyapunov 系数 $l_1 = 0$ 。在本节

中,我们将通过计算第二 Lyapunov 系统 l_2 , 来研究系统(1.1)在平衡点 O 处的余维二 Bautin 分岔, 为此特引入记号

$$\Gamma_2 = \left\{ (b_1, b_2, b_3, c_1, c_2) \in \mathfrak{R}^5 \mid b_2 < 0, b_3 \neq 0, b_1 = -b_2 b_3, c_1 = -\frac{1}{3} b_2 b_3 c_2 \right\}.$$

定理 3.1. 当系统(1.1)的参数落于参数集 Γ_2 时, 该系统在平衡点 O 处的第二 Lyapunov 系数为

$$l_2|_{\Gamma_2} = \frac{b_2 b_3 c_2^2}{3(b_2 - b_3^2)}.$$

由于 $b_2 c_2^2 < 0$, $b_2 - b_3^2 < 0$ 及 $b_3 \neq 0$, 因此系统(1.1)当参数满足 Γ_2 时, 具有一个横截 Hopf 分岔平衡点 O 。如果 $b_3 > 0$, 则有 $l_2 > 0$, 从而 Hopf 分岔平衡点 O 为不稳定的, 而若 $b_3 < 0$, 则有 $l_2 < 0$, 从而 Hopf 分岔平衡点 O 为稳定的。

证明: 针对系统(1.1), 当参数满足 Γ_2 时, 可得在平衡点 O 处的 Jacobian 矩阵及向量 q, p 分别如定理 2.1 中的(2.10)及(2.11)所示, 并且向量 $h_{11} = h_{20} = h_{02} = (0, 0, 0)^T$, $G_{21} = 0$ 及 $l_1 = 0$ 。

通过一系列直接而繁琐的计算, 可得

$$\begin{aligned} h_{30} &= \left(\frac{c_2}{4}, \frac{b_2(9i\omega_0 - 3b_3)c_2}{12b_2 - 4i\omega_0 b_3}, \frac{9b_2 c_2}{4} \right)^T, \\ h_{21} &= \left(\frac{b_2(3\omega_0 b_2 + 7ib_2 b_3 + 5\omega_0 b_3^2 + ib_3^3)c_2}{2(\omega_0 + ib_3)(ib_2 + \omega_0 b_3)^2}, \frac{b_2(b_2 - b_3^2)c_2}{2i\omega_0^3 + 4b_2 b_3 - 2i\omega_0 b_3^2}, \right. \\ &\quad \left. - \frac{b_2^2(b_2(\omega_0 + 5ib_3) + (7\omega_0 + 3ib_3)b_3^2)c_2}{2(\omega_0 + ib_3)(ib_2 + \omega_0 b_3)^2} \right)^T, \\ h_{03} &= \bar{h}_{30}, \quad h_{21} = \bar{h}_{12} \text{ 及 } h_{22} = h_{31} = h_{13} = (0, 0, 0)^T. \end{aligned}$$

根据公式(2.7)及(2.8), 可计算得

$$\begin{aligned} H_{32} &= \left(\frac{3ib_2^2(3\omega_0 b_2 + 7ib_2 b_3 + 5\omega_0 b_3^2 + ib_3^3)c_2^2}{2(b_2 - i\omega_0 b_3)^3}, \frac{3b_2(\omega_0 + ib_3)(b_2 - b_3^2)c_2^2}{2\omega_0 b_2 + 6ib_2 b_3 + 6\omega_0 b_3^2 + 2ib_3^3}, \right. \\ &\quad \left. \frac{b_2^2(b_2 - b_3^2)^2(48i\omega_0^7 + 25b_2^3 b_3 + 153i\omega_0^5 b_3^2 + 26b_2^2 b_3^3 + 62i\omega_0^3 b_3^4 - 3b_2 b_3^5 + 5i\omega_0 b_3^6)c_2^2}{2(b_2 - i\omega_0 b_3)^3(b_2 + i\omega_0 b_3)^2(3b_2^2 - b_3^4 + 2b_2 b_3(4i\omega_0 + 3b_3))} \right)^T, \end{aligned}$$

及

$$\begin{aligned} G_{32} &= \langle p, H_{32} \rangle \\ &= \frac{b_2^3(b_2 - b_3^2)^4(39ib_2^3 + b_2^2(139\omega_0 + 162ib_3)b_3 + b_2(58\omega_0 - 9ib_3)b_3^3 - 5\omega_0 b_3^5)c_2^2}{4(b_2 - i\omega_0 b_3)^4(b_2 + i\omega_0 b_3)^2(b_2(\omega_0 + 3ib_3) + (3\omega_0 + ib_3)b_3^2)(3b_2^2 - b_3^4 + 2b_2 b_3(4i\omega_0 + 3b_3))}, \end{aligned}$$

从而可计算第二 Lyapunov 系数 l_2 为

$$l_2|_{\Gamma_2} = \frac{b_2 b_3 c_2^2}{3(b_2 - b_3^2)}.$$

通过简单而直接的计算可以发现, 参数平面 $b_1 = -b_2b_3$ 及 $c_1 = -\frac{1}{3}b_2b_3c_2$ 的法向量沿着参数集 Γ_2 是线性无关的, 这意味着 Bautin 分岔的横截性条件满足。

当参数属于参数集 Γ_2 时, 系统(1.1)在平衡点 O 附近的动力学行为类似于文献[1]中的图 8.7。

为了验证上述理论结果, 通过数值仿真方法, 系统(1.1)在平衡点 O 处经过 Bautin 分岔所产生的稳定及不稳定周期解将在本段呈现出来。初始条件选在系统(1.1) Bautin 分岔平衡点的中心流形附近, 数值积分则选择 Matlab 软件中的“ode113”命令。

选取系统(1.1)的参数 $b_2 = -1$, $b_3 = -1$, $c_2 = 1$ 及 $b_1 = -b_2b_3 + 0.01$ 为固定参数, 而选取参数 $c_1 = -\frac{1}{3}b_2b_3c_2 + \varepsilon$ ($|\varepsilon| \ll 1$) 为变化参数。当 $\varepsilon > 0$ 时, 由定理 2.1 的结论(1)可知, 系统(1.1)在平衡点 O 处发生超临界 Hopf 分岔, 并且在当 $b_1 > b_{10}$ 时 O 为稳定平衡点, 附近没有分岔出的周期解; 当 $\varepsilon < 0$ 时, 由定理 2.1 的结论(2)可知, 系统(1.1)在平衡点 O 处发生亚临界 Hopf 分岔, 并且在当 $b_1 > b_{10}$ 时 O 为稳定平衡点, 附近存在一个 Hopf 分岔产生的不稳定周期解, 除此之外, 由于参数选取在 Bautin 分岔附近, 在更外侧还存在着一个由 Bautin 分岔产生的稳定周期解。

当 $\varepsilon = 0.01 > 0$ 时, 系统(1.1)的平衡点 O 为稳定平衡点, 选取平衡点 O 附近的初始条件 $(0.2955, 0.0045, -0.3045)$, 所对应的轨线趋向于系统(1.1)的平衡点 O , 如图 1 所示。

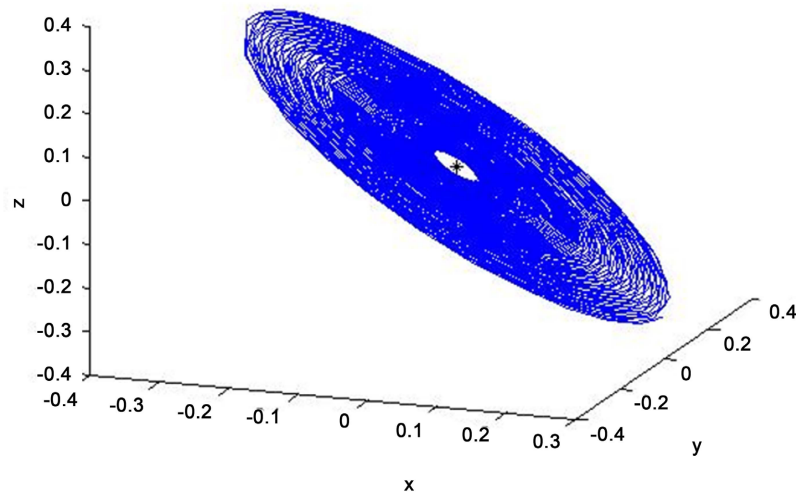


Figure 1. The phase diagram of system (1.1): $b_2 = -1$, $b_3 = -1$, $c_2 = 1$, $b_1 = -0.99$ and $c_1 = -0.3233$

图 1. 系统(1.1)的相图: $b_2 = -1$, $b_3 = -1$, $c_2 = 1$, $b_1 = -0.99$ 及 $c_1 = -0.3233$

当 $\varepsilon = -0.06 < 0$ 时, 系统(1.1)的平衡点 O 依然为稳定平衡点, 此时在 Bautin 平衡点 O 附近存在一条不稳定周期解 Ω_1 及一条稳定周期解 Ω_2 , 如图 2(a)所示。当选取初始条件 $P_1 = (0.5656, 0.0364, -0.6384)$ 时, 对应的轨线 $\varphi_t(P_1)$ (蓝色)远离系统(1.1)的不稳定周期解 Ω_1 而趋向于稳定平衡点 O ; 而当选取初始条件 $P_2 = (0.5689, 0.0371, -0.6431)$ 时, 对应的轨线 $\varphi_t(P_2)$ (红色)远离系统(1.1)的不稳定周期解 Ω_1 而趋向于稳定周期解 Ω_2 , 由此数值仿真可见, 轨线 $\varphi_t(P_1)$ 及 $\varphi_t(P_2)$ 具有相同的 α 极限集 Ω_1 , 即 $\alpha(\varphi_t(P_1)) = \alpha(\varphi_t(P_2)) = \Omega_1$, 如图 2(b)所示。当选取初始条件 $Q_1 = (0.7147, 0.0853, -0.8853)$ 及 $Q_2 = (0.8333, 0.1667, -1.1667)$ 时, 对应的轨线 $\varphi_t(Q_1)$ 及 $\varphi_t(Q_2)$ 分别从不同的方向趋向于系统(1.1)的稳定周期解 Ω_2 , 由此数值仿真可见, 轨线 $\varphi_t(Q_1)$ 及 $\varphi_t(Q_2)$ 具有相同的 ω 极限集 Ω_2 , 即

$\omega(\varphi_t(Q_1)) = \omega(\varphi_t(Q_2)) = \Omega_2$, 如图 2(c)所示。

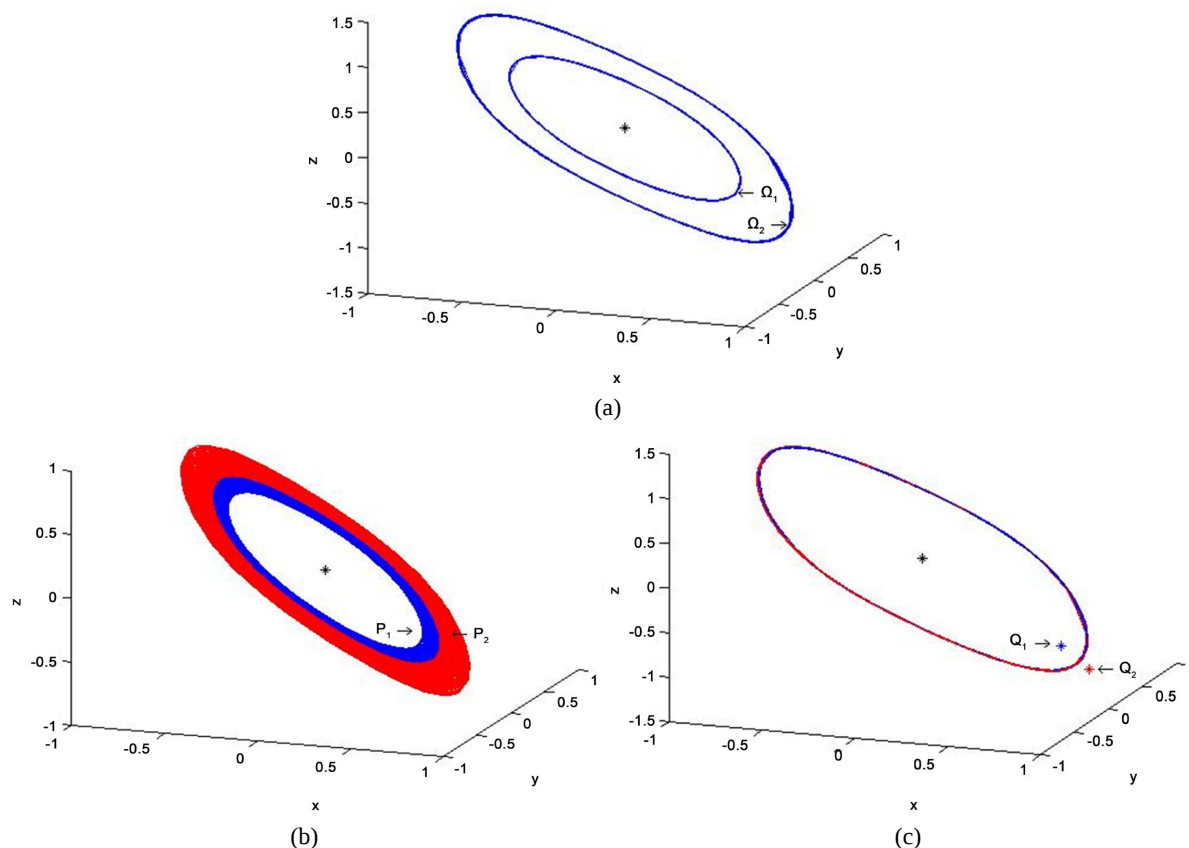


Figure 2. The phase diagram of system (1.1): $b_2 = -1$, $b_3 = -1$, $c_2 = 1$, $b_1 = -0.99$ and $c_1 = -0.3933$

图 2. 系统(1.1)的相图: $b_2 = -1$, $b_3 = -1$, $c_2 = 1$, $b_1 = -0.99$ 及 $c_1 = -0.3933$

4. 总结

经典力学中 Jerk 系统, 起源于描述位置随时间变化的演变规律, 在工程中具有大量的应用, 尤其是在力学与声学的某些应用中。本文针对一类具有两个三次项的三维 Jerk 系统, 致力于分析该系统的余维二 Bautin 分岔行为。首先, 基于 Hopf 分岔及退化 Hopf 分岔的相关理论知识, 给出了 Hopf 分岔及其退化后的余维二 Bautin 分岔发生的适当参数条件, 并分别计算了相对应的第一 Lyapunov 系数及第二 Lyapunov 系数; 然后, 通过数值仿真, 对 Bautin 分岔平衡点进行了适当的参数扰动, 获得了分岔后的不同动力学行为, 发现其中一侧, 系统(1.1)在平衡点处发生超临界 Hopf 分岔; 另一侧则为系统(1.1)在平衡点处发生亚临界 Hopf 分岔, 并且在附近存在一个 Hopf 分岔产生的不稳定周期解, 除此之外, 由于参数选取在 Bautin 分岔附近, 在更外侧还存在着一个由 Bautin 分岔产生的稳定周期解。

基金项目

国家自然科学基金(12261005), 广东省自然科学基金(2021A1515010043)。

参考文献

- [1] Kuznetsov, Y A. (2004) Elements of Applied Bifurcation Theory. 3rd Edition, Springer.

-
- [2] Leonov, G.A. and Kuznetsov, N.V. (2015) On Differences and Similarities in the Analysis of Lorenz, Chen, and Lu Systems. *Applied Mathematics and Computation*, **256**, 334-343. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2014.12.132>
 - [3] Chen, Y. and Liang, H. (2016) Zero-Zero-Hopf Bifurcation and Ultimate Bound Estimation of a Generalized Lorenz-Stenflo Hyperchaotic System. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **40**, 3424-3432. <https://doi.org/10.1002/mma.4236>
 - [4] Sang, B. and Huang, B. (2020) Zero-Hopf Bifurcations of 3D Quadratic Jerk System. *Mathematics*, **8**, Article 1454. <https://doi.org/10.3390/math8091454>
 - [5] Braun, F. and Mereu, A.C. (2021) Zero-Hopf Bifurcation in a 3D Jerk System. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **59**, Article ID: 103245. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2020.103245>
 - [6] Mello, L.F., Messias, M. and Braga, D.C. (2008) Bifurcation Analysis of a New Lorenz-Like Chaotic System. *Chaos, Solitons & Fractals*, **37**, 1244-1255. <https://doi.org/10.1016/j.chaos.2007.11.008>
 - [7] Mello, L.F. and Coelho, S.F. (2009) Degenerate Hopf Bifurcations in the Lü System. *Physics Letters A*, **373**, 1116-1120. <https://doi.org/10.1016/j.physleta.2009.01.049>
 - [8] Ilyashenko, Y. (2002) Centennial History of Hilbert's 16th Problem. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **39**, 301-355. <https://doi.org/10.1090/s0273-0979-02-00946-1>
 - [9] Kambhu, J., Weidman, S. and Krishnam, N. (2007) New Directions for Understanding Systemic Risk: A Report on a Conference Cosponsored by the Federal Reserve Bank of New York and the National Academy of Sciences. The National Academies Press.
 - [10] Menck, P.J., Heitzig, J., Kurths, J. and Joachim Schellnhuber, H. (2014) How Dead Ends Undermine Power Grid Stability. *Nature Communications*, **5**, Article No. 3969. <https://doi.org/10.1038/ncomms4969>
 - [11] Chudzik, A., Perlikowski, P., Stefanski, A. and Kapitaniak, T. (2011) Multistability and Rare Attractors in Van Der Pol-Duffing Oscillator. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **21**, 1907-1912. <https://doi.org/10.1142/s0218127411029513>
 - [12] Leonov, G.A. and Kuznetsov, N.V. (2013) Hidden Attractors in Dynamical Systems. From Hidden Oscillations in Hilbert-Kolmogorov, Aizerman, and Kalman Problems to Hidden Chaotic Attractor in Chua Circuits. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **23**, Article ID: 1330002. <https://doi.org/10.1142/s0218127413300024>
 - [13] Schot, S.H. (1978) Jerk: The Time Rate of Change of Acceleration. *American Journal of Physics*, **46**, 1090-1094. <https://doi.org/10.1119/1.11504>