Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(11), 233-238
Published Online November 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1511284

Hans汉斯

典型李代数自然表示及相关表示的满射问题

魏栢翔

天津师范大学数学科学学院，天津

收稿日期：2025年10月4日；录用日期：2025年11月13日；发布日期：2025年11月21日

摘 要

本文考虑典型李代数的自然表示及其对偶表示、直和表示及张量表示的满射问题，得到 A_l 在 $l=1$ 时以及 B_l, C_l, D_l 型李代数的张量表示不满，其余都是满表示。

关键词

典型李代数，自然表示，满射

Surjectivity about the Natural Representation and Related Representations of Classical Lie Algebras

Baixiang Wei

College of Mathematical Science, Tianjin Normal University, Tianjin

Received: October 4, 2025; accepted: November 13, 2025; published: November 21, 2025

Abstract

This paper investigates the surjectivity problem of natural representations, their dual representations, direct sum representations, and tensor representations of classical Lie algebras. It is concluded that the tensor representations of type A_l when $l=1$ and type B_l, C_l, D_l Lie algebras are not surjective, while all the others are surjective representations.

Keywords

Classical Lie Algebras, Natural Representations, Surjectivity

文章引用: 魏栢翔. 典型李代数自然表示及相关表示的满射问题[J]. 理论数学, 2025, 15(11): 233-238.
DOI: 10.12677/pm.2025.1511284

1. 引言

表示是李代数的一个重要研究课题，在量子群、理论物理等领域有重要的应用。称李代数的表示为满表示，是指表示所对应的模运算为满射。确定一个表示是否满，是表示的基本问题。目前表示是否满的研究主要在伴随表示和三维复单李代数的表示。注意到李代数的伴随表示满，实际上就是李括号运算满。文[1] [2]得到了复半单李代数的括号运算满的结论，文[3] [4]讨论了实李代数括号满的若干结果。

典型李代数的概念来自 H。Weyl，是一大类重要的线性单李代数，有大量的研究，可参考[5]-[9]。本论文考虑典型李代数的自然表示及对偶表示、直和表示和张量表示的满射问题，得到了

定理 1 在典型李代数的自然表示及对偶表示、直和表示和张量表示中，B_l, C_l, D_l 型李代数的张量表示不满，A_l 在 $l=1$ 时张量表示不满，其余都是满表示。

2. 预备知识

定义 1 设 (ρ, V) 为有限维复李代数 L 的一个复表示，若映射 $\rho: L\times V \to V$ 为满射，则称该表示为满表示。

显然有下面的结论：

命题 1 设 (ρ, V) 为有限维复李代数 L 的一个有限维复表示，则

1) 若存在 $x\in L$，使得 $\rho(x)$ 可逆，则 (ρ, V) 为满表示。

2) 设 $V = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_s$ 为表示的子表示直和分解，则 $\left(\rho|_{V_i}, V_i\right)$ 为满表示。

设 (ρ, V) 为有限维复李代数 L 的一个有限维复表示，则关于此表示有常见的表示构造：对偶表示 $\left(\rho^*, V^*\right)$，直和表示 $(\rho\oplus\rho, V\oplus V)$ 以及张量表示 $(\rho\otimes\rho, V\otimes V)$。定义分别如下：$\forall x\in L$，$v,u\in V$，有

$$\left(\rho^*(x)\varphi\right)(v) = -\varphi\left(\rho(x)v\right), \quad \varphi\in V^*,$$

$$\left((\rho\oplus\rho)(x)\right)(v,u) = \left(\rho(x)v, \rho(x)u\right),$$

$$\left((\rho\otimes\rho)(x)\right)(v\otimes u) = \rho(x)v\otimes u + v\otimes\rho(x)u .$$

取 V 的一组基，对任意 $x\in L$，设 $\rho(x)$ 的矩阵为 X，则在对应的基下 $\rho^*(x), (\rho\oplus\rho)(x), (\rho\otimes\rho)(x)$ 的矩阵分别为 $-X^{\mathrm{T}}, \mathrm{diag}(X, X), X\otimes I + I\otimes X$，其中 I 为单位矩阵。这里用到了矩阵 A 和 B 的张量积(Kronecker 积)：

$$A\otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}B & a_{n2}B & \cdots & a_{nn}B \end{pmatrix}, \quad A = \left(a_{ij}\right).$$

设 V 是复数域 C 上的有限维线性空间，一般线性李代数 $gl(V)$ 是 V 的线性变换全体关于运算 $[x, y] = xy - yx$ 构成的李代数。特殊线性李代数 $sl(V) = \left\{x\in gl(V) \mid tr(x) = 0\right\}$ 为 A_l 型李代数。矩阵

$s=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&I_l\\0&I_l&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&I_l\\-I_l&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&I_l\\I_l&0\end{pmatrix}$分别定义$V$上的非退化双线性型$f$，$gl(V)$中关于$f$反对称的元素全体，即$\{x\in gl(V)\mid f(x(u),v)+f(u,x(v))=0,\forall v,u\in V\}$，构成了$B_l$、$C_l$、$D_l$型李代数。空间中取了基后，写成矩阵形式，记作$sl(l+1,C)$，$so(2l+1,C)$，$sp(2l,C)$，$so(2l,C)$。这些称为典型李代数。

3. Kronecker 积的一些结论

引理 1 [11] 设$X\in C^{n\times n}$，则$\det(X\otimes I+I\otimes X)=\prod_{i,j}(\lambda_i+\lambda_j)$，其中$\lambda_i$为$X$的所有特征值。

引理 2 B_l、C_l、D_l型李代数自然表示的张量表示有平凡子表示。

证明 设$e_1,\cdots,e_{2l+1}$为C^{2l+1}的自然基，对任意$X=\begin{pmatrix}0&a&b\\-b^{\mathrm{T}}&m&p\\-a^{\mathrm{T}}&n&-m^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\in so(2l+1,C)$，其中$a=(a_2,\cdots,a_{l+1})$，$b=(b_{l+2},\cdots,b_{2l+1})$，$m=(m_{i+1,j+1})_{i,j=1}^{l}$，$n=(n_{1+l+i,1+j})_{i,j=1}^{l}$，$p=(p_{1+i,1+l+j})_{i,j=1}^{l}$，有

$$Xe_1=-\sum_{i=1}^{l}b_{1+l+i}e_{1+i}-\sum_{i=1}^{l}a_{1+i}e_{1+l+i},$$

$$Xe_{1+i}=a_{1+i}e_1+\sum_{j=1}^{l}m_{1+j,1+i}e_{1+j}+\sum_{j=1}^{l}n_{1+j+l,1+i}e_{1+j+l},\quad 1\le i\le l,$$

$$Xe_{1+l+i}=b_{1+i+l}e_1+\sum_{j=1}^{l}p_{1+j,1+l+i}e_{1+j}-\sum_{j=1}^{l}m_{1+i,1+j}e_{1+j+l},\quad 1\le i\le l.$$

令

$$\varepsilon=e_1\otimes e_1+\sum_{i=1}^{l}e_{1+i}\otimes e_{1+l+i}+\sum_{i=1}^{l}e_{1+l+i}\otimes e_{1+i},$$

计算

$$\begin{aligned}X\varepsilon=&-\sum_{i=1}^{l}b_{1+l+i}e_{1+i}\otimes e_1-\sum_{i=1}^{l}a_{1+i}e_{1+l+i}\otimes e_1-\sum_{i=1}^{l}b_{1+l+i}e_1\otimes e_{1+i}-\sum_{i=1}^{l}a_{1+i}e_1\otimes e_{1+l+i}\\&+\sum_{i=1}^{l}a_{1+i}e_1\otimes e_{1+l+i}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}m_{1+j,1+i}e_{1+j}\otimes e_{1+l+i}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}n_{1+j+l,1+i}e_{1+j+l}\otimes e_{1+l+i}\\&+\sum_{i=1}^{l}b_{1+i+l}e_{1+i}\otimes e_1+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}p_{1+j,1+l+i}e_{1+i}\otimes e_{1+j}-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}m_{1+i,1+j}e_{1+i}\otimes e_{1+j+l}\\&+\sum_{i=1}^{l}b_{1+l+i}e_1\otimes e_{1+i}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}p_{1+j,1+l+i}e_{1+j}\otimes e_{1+i}-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}m_{1+i,1+j}e_{1+j+l}\otimes e_{1+i}\\&+\sum_{i=1}^{l}a_{1+i}e_{1+i+l}\otimes e_1+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}m_{1+j,1+i}e_{1+l+i}\otimes e_{1+j}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}n_{1+j+l,1+i}e_{1+i+l}\otimes e_{1+j+l}.\end{aligned}$$

整理后得到

$$X\varepsilon=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}(n_{1+j+l,1+i}+n_{1+i+l,1+j})e_{1+j+l}\otimes e_{1+i+l}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}(p_{1+j,1+i+l}+p_{1+i,1+j+l})e_{1+j}\otimes e_{1+i}.$$

根据n,p为反对称矩阵，得到$X\varepsilon=0$。令$V_0=C\varepsilon$，则V_0为B_l的一维子表示，因而是平凡表示。

在 D_l 情形，设 $e_1,\cdots,e_{2l}$ 为 C^{2l} 的自然基，对任意 $X=\begin{pmatrix} m & n \\ p & -m^{\mathrm{T}} \end{pmatrix}\in so(2l,C)$，其中 $m=\left(m_{ij}\right)_{i,j=1}^{l}$，$n=\left(n_{i,l+j}\right)_{i,j=1}^{l}$，$p=\left(p_{l+i,j}\right)_{i,j=1}^{l}$，令

$$V_0=span_C\left\{\sum_{i=1}^{l}e_i\otimes e_{l+i}+\sum_{i=1}^{l}e_{l+i}\otimes e_i\right\},$$

计算

$$\begin{aligned}
&X\left(\sum_{i=1}^{l}e_i\otimes e_{l+i}+\sum_{i=1}^{l}e_{l+i}\otimes e_i\right)\\
&=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}m_{ji}e_j\otimes e_{i+l}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}p_{l+j,i}e_{j+l}\otimes e_{i+l}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}n_{j,i+l}e_i\otimes e_j-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}m_{ij}e_i\otimes e_{j+l}\\
&\quad+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}n_{j,i+l}e_j\otimes e_i-\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}m_{ij}e_{j+l}\otimes e_i+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}m_{ji}e_{i+l}\otimes e_j+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}p_{l+j,i}e_{i+l}\otimes e_{j+l}\\
&=\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\left(p_{l+j,i}+p_{l+i,j}\right)e_{j+l}\otimes e_{i+l}+\sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\left(n_{j,i+l}+n_{i,j+l}\right)e_i\otimes e_j.
\end{aligned}$$

根据 n,p 为反对称矩阵，得到 $X\varepsilon=0$。令 $V_0=C\varepsilon$，则 V_0 为 C_l 的一维子表示，因而是平凡表示。

类似地，在 C_l 情形，同理令

$$V_0=span_C\left\{\sum_{i=1}^{l}e_i\otimes e_{l+i}-\sum_{i=1}^{l}e_{l+i}\otimes e_i\right\},$$

计算过程同 D_l，易验证它们各自都是平凡子表示。证毕。

注 B_l 中 ε 的构造源于 C_1 情形的猜想。

4. 定理的证明

分别取 $X=\mathrm{diag}(1,1,\cdots,1,-l)\in sl(l+1,C)$，$\begin{pmatrix} I_l & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix}\in sp(2l,C)\cap so(2l,C)$，这些都是可逆阵，由命题 1 知 A_l、C_l、D_l 型李代数的自然表示及直和表示都满。考虑 A_l 的张量表示，当 $l>1$ 时，由引理 1，知

$$\det\left(X\otimes I+I\otimes X\right)=-2^{l^2+1}\left(l-1\right)^{2l}l\neq0,$$

此时张量表示满。当 $l=1$ 时，有 $\rho_{A_1}\otimes\rho_{A_1}=V(1)\otimes V(1)=V(2)\oplus V(0)$。这里 $V(n)$ 是 $sl(2,C)$ 的最高权为 n 的不可约表示空间(见[12])。这说明此张量表示有平凡子表示，因而不满。由引理 2，可得 B_l、C_l、D_l 型李代数的张量表示都不满。

下面考虑 $B_l=so(2l+1,C)$ 的自然表示：$\forall v=\left(\lambda,\beta_1,\beta_2\right)^{\mathrm{T}}\in C^{2l+1}$，其中 $\lambda\in C$，$\beta_1,\beta_2\in C^l$，取 $X=\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -b^{\mathrm{T}} & I_l & 0 \\ -a^{\mathrm{T}} & 0 & -I_l \end{pmatrix}\in so(2l+1,C)$，考虑线性方程组 $X\xi=v$ 是否有解。对增广矩阵 (X,v) 做初等行变换得到 $\left(\begin{array}{ccc:c} 0 & 0 & 0 & \lambda-a\beta_1+b\beta_2 \\ -b^{\mathrm{T}} & I_l & 0 & \beta_1 \\ -a^{\mathrm{T}} & 0 & -I_l & \beta_2 \end{array}\right)$，于是线性方程组有解当且仅当 $\lambda-a\beta_1+b\beta_2=0$。

显然当 β_1,β_2 不全为零时，存在 a,b 满足 $\lambda-a\beta_1+b\beta_2=0$，此时方程组 $X\xi=v$ 有解。

当 $\beta_1=\beta_2=0$ 时，另取 $X=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -a^{\mathrm{T}} & 0 & 0\end{pmatrix}\in so(2l+1,C)$，其中 $a\neq 0$，此时方程组 $X\xi=v$ 也有解，故 B_l 的自然表示为满表示。

再考虑 B_l 的直和表示：$\forall v=(\lambda_1,\beta_1,\beta_2,\lambda_2,\beta_3,\beta_4)^{\mathrm{T}}\in C^{4l+2}$，其中 $\lambda_1,\lambda_2\in C$，$\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4\in C^l$，取 $X=\begin{pmatrix}0 & a & b\\ -b^{\mathrm{T}} & I_l & 0\\ -a^{\mathrm{T}} & 0 & -I_l\end{pmatrix}\in so(2l+1,C)$。对增广矩阵 $\left(\begin{array}{cc:c}X & & \\ & X & v\end{array}\right)$ 进行初等行变换得到

$$\left(\begin{array}{cc:c}X & & \\ & X & v\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccccc:c}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_1-a\beta_1+b\beta_2\\ -b^{\mathrm{T}} & I_l & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta_1\\ -a^{\mathrm{T}} & 0 & -I_l & 0 & 0 & 0 & \beta_2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2-a\beta_3+b\,\beta_4\\ 0 & 0 & 0 & -b^{\mathrm{T}} & I_l & 0 & \beta_3\\ 0 & 0 & 0 & -a^{\mathrm{T}} & 0 & -I_l & \beta_4\end{array}\right)。$$

由此知，线性方程组 $\mathrm{diag}(X,X)\xi=v$ 有解当且仅当 $\begin{cases}\lambda_1-a\beta_1-b\beta_2=0\\ \lambda_2-a\beta_3-b\beta_4=0\end{cases}$，即

$$\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} & \beta_2^{\mathrm{T}}\\ \beta_3^{\mathrm{T}} & \beta_4^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a^{\mathrm{T}}\\ b^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{pmatrix}.$$

易见，若 $r\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} & \beta_2^{\mathrm{T}}\\ \beta_3^{\mathrm{T}} & \beta_4^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}=2$，则存在 a,b，使得上式成立。若 $r\begin{pmatrix}\beta_1^{\mathrm{T}} & \beta_2^{\mathrm{T}}\\ \beta_3^{\mathrm{T}} & \beta_4^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\neq 2$，当 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 全为零时，取 $X=\begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -a^{\mathrm{T}} & 0 & 0\end{pmatrix}$，其中 $a\neq 0$；当 $\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4$ 不全为零时，β_1,β_2 与 β_3,β_4 对称，不妨设 β_1,β_2 不全为零，取 $X=\begin{pmatrix}0 & \beta_2^{\mathrm{T}} & \beta_1^{\mathrm{T}}\\ -\beta_1 & 0 & 0\\ -\beta_2 & 0 & 0\end{pmatrix}$：此时均存在 $X\in so(2l+1,C)$，使得线性方程组

$$\mathrm{diag}(X,X)\xi=v$$

有解，故 B_l 的直和表示为满表示。

下面考虑对偶表示。设 L 为典型李代数的矩阵形式，即 L 为 $sl(l+1,C)$，$so(2l+1,C)$，$sp(2l,C)$，或 $so(2l,C)$，则 L 自然表示的矩阵表达为 $L\times C^n\to C^n,(X,v)\mapsto Xv$，其中 n 为表示的维数。于是其对偶表示的矩阵表达为 $\tilde{L}\times C^n\to C^n$，其中 $\tilde{L}=\{-X^{\mathrm{T}}\mid X\in L\}$。注意到关于典型李代数，我们有 $\tilde{L}=L$。因而 L 的自然表示与其对偶表示有相同的映射性质。由 L 的自然表示满，知其对偶表示也满。

综上，定理得证。

参考文献

[1] Brown, G. (1963) On Commutators in a Simple Lie Algebra. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **14**, 763-767. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1963-0153715-4

[2] Hirschbühl, R. (1990) Commutators in classical Lie Algebras. *Linear Algebra and its Applications*, **142**, 91-111. https://doi.org/10.1016/0024-3795(90)90258-e

[3] Doković, D.Ž. (1986) On Commutators in Real Semi-Simple Lie Groups. *Osaka Journal of Mathematics*, **23**, 223-228.

[4] Malkoun, J. and Nahlus, N. (2017) Commutators and Cartan Subalgebras in Lie Algebras of Compact Semi-Simple Lie Group. *Journal of Lie Theory*, **27**, 1027-1032.

[5] 靳全勤, 楼俊钢. 典型李代数 K 阶内自同构共轭类的矩阵表达式[J]. 河北大学学报(自然科学版), 2007(3): 225-228+231.

[6] 姜靖. 典型李代数的数量型广义 Verma 模的可约性与 Gelfand-Kirillov 维数公式[D]: [博士学位论文]. 苏州: 苏州大学, 2023.

[7] Cuypers, H. and Fleischmann, Y. (2017) A Geometric Characterization of the Classical Lie Algebras. *Journal of Algebra*, **502**, 1-23. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2017.11.030

[8] Tsurkov, A. (2020) Automorphic Equivalence in the Varieties of Representations of Lie Algebras. *Communications in Algebra*, **48**, 397-409. https://doi.org/10.1080/00927872.2019.1646270

[9] Augarten, T. (2020) Representation Growth of the Classical Lie Algebras. *Communications in Algebra*, **48**, 3099-3108. https://doi.org/10.1080/00927872.2020.1729364

[10] Hom, R.A. and Johnson, C.R. (1991) Topics in Matrix Analysis. Cambridge University Press.

[11] Humphreys, J.E. 李代数及其表示理论导引[M]. 北京: 世界图书出版公司, 2009.