

阶数不超过12的非匹配型分配格的枚举

张诗晗, 王海艳, 姚海元*

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年10月5日; 录用日期: 2025年11月17日; 发布日期: 2025年11月24日

摘要

张和平等人在平面基本二部图的完美匹配集合上建立了一个分配格结构, 这样的分配格称为匹配型分配格; 而对于一个有限分配格, 若找不到与之对应的平面二部图, 使其同构于该图完美匹配集合上的分配格, 则称之为非匹配型分配格。本文中, 我们通过研究匹配型分配格的特定结构, 得到几个非匹配型分配格的判定方法, 作为以上工作的简单应用, 由此枚举了所有阶数不超过12的非匹配型分配格。

关键词

完美匹配, 匹配型分配格, 非匹配型分配格, 凸子格

Enumeration of Non-Matchable Distributive Lattices of Order Not Exceeding 12

Shihan Zhang, Haiyan Wang, Haiyuan Yao*

School of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: October 5, 2025; accepted: November 17, 2025; published: November 24, 2025

Abstract

Zhang Heping *et al.* established a distributive lattice structure on the set of perfect matchings of a plane elementary bipartite graph; such a distributive lattice is called a matchable distributive lattice. Conversely, for a finite distributive lattice, if no corresponding plane bipartite graph can be found such that the lattice is isomorphic to the distributive lattice formed by the set of perfect matchings of that graph, then it is referred to as a non-matchable distributive lattice. In this paper, by characterizing the specific structure of matchable distributive lattices, we derive several criteria for identifying non-matchable distributive lattices. As a straightforward application of the above work, we enumerate all non-matchable distributive lattices with up to 12 elements.

*通讯作者。

Keywords

Perfect Matching, Matchable Distributive Lattice, Non-Matchable Distributive Lattice, Convex Sublattice

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

1988 年, 张福基等人[1]引入了六角系统的完美匹配集合上的 Z -变换图(共振图)的概念。后来张和平等人[2]将此概念推广到了平面二部图上, 并通过区分两种不同的匹配交错圈, 给 Z -变换图进行了定向, 建立了有向 Z -变换图。对于平面弱基本二部图, Lam 和张和平等人[3]证明了有向 Z -变换图无(有向)圈, 以此建立了其完美匹配集合上的有限分配格结构, 并证明了每个连通的共振图都是 median 图, 因此可等距离嵌入到超立方体中。 Z -变换图的概念因其自然性也曾被 Gründler [4], Randić 和 Forunier [5]等人从不同角度独立提出。后来张和平等人[6]提出了非匹配型分配格的结论并研究了相关基本性质; Klavžar [7], 姚海元等人确定了斐波那契和卢卡斯立方体是否为匹配型的分配格; 2014 年, 姚海元[8]归纳了几类具有割元的非匹配型分配格并构造了两类匹配型分配格。2019 年, 姚海元、王旭[9]等在一类非匹配型分配格中, 通过引入基于平面基本二部图某个完美匹配的交不可约内环并给出其等价刻画, 得到了一类新的非匹配型分配格, 推广了一类没有割元的非匹配型分配格。尽管已得到不少有关非匹配型分配格的结论, 然而有关非匹配型分配格的枚举目前仍然是空白的。本文中主要枚举了一些低阶的非匹配型分配格。

本文中第二节我们主要回顾了一些有关偏序集、匹配、非匹配型分配格的基本概念及相关结论。第三节中我们通过刻画以几个特殊的分配格为凸子格的最小阶数的匹配型分配格, 从而得到了不能由割元定理判定的非匹配型分配格的几个判定方法; 将以上判定方法应用到所有阶数不超过 12 的分配格上后, 完成了对所有阶数不超过 12 的非匹配型分配格的枚举。

2. 预备知识

在本节中我们给出了一些有关分配格和匹配方面的概念和性质, 其余在本文中用到但未介绍的概念, 偏序和格方面的见[10] [11] [12], 图论方面的见[13] [14]。

偏序集 $P = (P, \leq)$ 由它的覆盖关系 “ $\prec$ ” 确定, 并通常由 Hasse 图来表示。本文中将 Hasse 图当作有向图。设 $x, y \in P$, 称 $z \in P$ 是 x 和 y 的一个下界, 如果有 $z \leq x$ 和 $z \leq y$; x 和 y 的一个下界 z 称为下确界, 如果 z 是 x 和 y 的所有下界中最大的一个。 x 和 y 的下确界(若存在)是唯一的, 记为 $x \wedge y$; 对偶地, 可以定义 x 和 y 的上界, 及上确界 $x \vee y$ 。设 Q 是 P 的一个子偏序集, 如果 $x, z \in Q$ 且 $x < y < z$ 时总可以得到 $y \in Q$ 的话, 则称 Q 是凸的。令 $x, z \in P$ 且 $x \leq y$, 定义由集合 $\{z \in P \mid x \leq z \leq y\}$ 导出的子偏序集为区间 $I[x, y]$ 。设 $(P, \leq)$ 是一个有限偏序集。称 P 的子集 Y 是 P 的(序)滤子, 如果 $x \in Y, x \leq y \Rightarrow y \in Y$ 。对偶地, 称 P 的子集 I 为 P 的(序)理想, 如果 $x \in I, z \leq x \Rightarrow z \in I$ 。特别地, 我们称由 P 中的一个元生成的滤子(理想)为主滤子(主理想)。

如果偏序集 L 中任意两个元素都有下确界和上确界, 则称 L 是一个格。此时 $\wedge, \vee$ 构成 L 上的两个二元运算, 因此格 L 也可以记为 $(L, \wedge, \vee)$ 。进一步, 如果格 L 中的两个二元运算 $\wedge$ 与 $\vee$ 互相满足分配律:

$$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z),$$

则称 L 是一个分配格。若一个分配格的子格满足凸性的定义, 则称其为凸子格, 我们记格 L 的最大元与最小元分别为 $\hat{0}_L$ 和 $\hat{1}_L$ 。

令 $J(P)$ 表示由 P 中的所有滤子按照反包含关系构成的分配格。易知 $\emptyset$ 和 P 是 $J(P)$ 的最大元与最小元。称格 L 的一个元素 x 为交不可约元, 若它恰被一个元素覆盖。记 $Mi(L)$ 为 L 的全体交不可约元导出的子偏序集。

定理 2.1. [10] (有限分配格基本定理) 设 L 是一个有限分配格。则存在(同构意义下)唯一的偏序集 P , 使得 $L \cong J(P)$ 。实际上 $P \cong Mi(L)$ 。

本文研究的图默认为简单、无向的平面二部图, 且其顶点用已用黑白两点进行了正常着色。在一般情况下, 我们用 G 代表这样的一个图。

G 的完美匹配是指关联 G 的所有顶点的独立边集合。令 $\mathcal{M}(G)$ 表示 G 的所有完美匹配构成的集合。称 G 的一条边是允许的, 若它属于某个完美匹配, 否则称为是禁止的; 对于 G 中的一个圈 C , 如果其边在 G 的完美匹配 M 和 $E(G)/M$ 中交替出现, 则称 C 为 M -交错圈。若图 G 的所有允许边构成一个连通图, 则该图是基本的; 若 G 的每个匹配交错圈及其内部构成的子图都是基本的, 则称 G 是弱基本的。

设 M 为 G 的一个完美匹配, 对 G 的一个 M -交错圈 C , 如果按 C 的顺时针方向匹配边都是从白点到黑点, 则称 M -交错圈 C 是一个正常的; 否则称为非正常的。设 $R = \{r_1, \dots, r_k\} (k \geq 1)$ 为 G 的两两不交的内面的集合, 若存在 G 的完美匹配 M , 使所有内面均为(正常) M -交错内面, 则称 R 为 G 的一个共振形, 并称其中的 k 个内面是相互共振的; 而当一个内面的集合中任意两个都构成 G 的一个共振形, 则称该集合中的内面是两两共振的。对任意正常 M -交错内面边界上的匹配边和非匹配边对换而得到另一个完美匹配 M' , 这样的操作称为对该面的一个 Z -变换或扭转。之后该内面成为非正常 M' -交错的。下面我们给出一般平面二部图的 Z -变换图的定义。

定义 2.1. 设 G 是有完美匹配的平面二部图, G 的有向 Z -变换图 $\vec{Z}(G)$: 顶点集为 $\mathcal{M}(G)$, 对 $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(G)$, 从 M_1 到 M_2 连一条弧当且仅当对某个 M_1 正常交错内面做一次 Z -变换得到 M_2 。忽略所有弧的方向后就得到通常的 Z -变换图 $Z(G)$ 。

有向 Z -变换图 $\vec{Z}(G)$ 中无有向圈[3]蕴涵二元关系“ $\leq$ ”是 $\mathcal{M}(G)$ 上的偏序关系。 $\mathcal{M}(G) := (\mathcal{M}(G), \leq)$, 对任意 $M_1, M_2 \in \mathcal{M}(G)$, $M_1 \leq M_2$ 当且仅当在 $\vec{Z}(G)$ 中有一条从 M_2 到 M_1 的有向路。

令 $G^\downarrow$ 表示将平面二部图 G 的两个色类交换(即将 G 中的顶点颜色黑白互换)之后得到的平面二部图, 则以下的结论是显然的:

命题 2.2. [8] $\mathcal{M}(G^\downarrow) \cong \mathcal{M}^*(G)$, 其中 $\mathcal{M}^*(G)$ 是偏序集 $\mathcal{M}(G)$ 的对偶。

命题 2.3. [8] 一个有限分配格 L 是匹配型分配格当且仅当其对偶 L^* 是匹配型分配格。等价地, 对非匹配型的情况仍适用。

定理 2.4. [3] 设 G 是平面(弱)基本二部图, 则 $\mathcal{M}(G)$ 是有限分配格, 且 $\vec{Z}(G)$ 是 $\mathcal{M}(G)$ 的 Hasse 图。

定义 2.2. [15] 称一个有限分配格 L 为匹配型的, 如果存在一个平面(弱基本)二部图 G 使得 $L \cong \mathcal{M}(G)$, 否则为非匹配型的。

只有一个元素的分配格称为是平凡的, 否则是非平凡的。

定义 2.3. [16] 称一个(非平凡)分配格是既约的, 如果它不能表示成两个非平凡分配格的直积。

定理 2.5. [16] 设 L 是一个有限分配格且有非平凡直积分解 $L = \prod_{i=1}^k L_i$, 则 L 是一个匹配型分配格当且仅当每一个因子 $L_i (1 \leq i \leq k)$ 都是匹配型分配格。

注: 若 L 是既约的匹配型分配格, 则一定存在一个平面基本二部图 G , 使 $L \cong \mathcal{M}(G)$ 。

定理 2.6. [8] [16] 设 G 是一个平面基本二部图, 则 $Z(G)$ 中的一个顶点, M_u 是 $Z(G)$ 的一个割点当且仅当 G 既有正常 M_u -交错环也有非正常 M_u -交错环, 并且每一个正常 M_u -交错环与每一个非正常 M_u -交错环都相交。

定义 2.4. [8] [16] 设 L 是一个有限分配格, L 中的一个元 u ($u \neq \hat{1}_L, \hat{0}_L$) 称为一个割元, 若 $\hat{0}_L$ 和 $\hat{1}_L$ 之间的所有极大链均包含 u 。称一个有限分配格 L 的割元是 (m, n) 型的, 若 L 中恰好有 m 个元素覆盖 u 和 n 个元素被 u 覆盖。易知, u 是 L 的一个 (m, n) 型割元当且仅当 u 是 L^* 的一个 (n, m) 型割元。

定理 2.7. [8] [16] 设 G 是一个平面基本二部图, 且 $M(G)$ 有一个 $(2, n)$ 型割元 M_u , 则 Π_n 是 $M(G)$ 的一个凸子格。

定理 2.8. [8] [16] (割元定理) 设 L 是一个有 $(2, n)$ ($n \geq 2$) 型割元 u 的有限分配格。若 L 不包含与 Π_n 同构的凸子格, 则 L 是一个非匹配型分配格。

由定理 2.8, 我们可以直接判定部分阶数不超过 12 的含有 $(2, 2)$ 、 $(2, 3)$ 型的分配格是非匹配型的。给定两个集合 A, B , 将 $A \oplus B$ 定义为两个集合的对称差。

设 G 是一个平面基本二部图, 若匹配型分配格 $M(G)$ 有 $(2, 2)$ 型割元 M_u , 则 G 有两个非正常的 M_u -交错圈分别设为 f_1, f_2 , 两个正常的 M_u -交错圈分别设为 g_1, g_2 。则在 $M(G)$ 中, M_u 上有一个四边形, 该四边形上的对边是由 G 中同一个面扭转出来的, 则 f_1, f_2 是 M_u -正常交错的, g_1, g_2 是 M_u -非正常交错的。则在 G 中 f_1, f_2 是共振的, g_1, g_2 也是共振的, 又因为 f_1, f_2 分别与 g_1, g_2 相交, 所以此时 $f_1 \oplus f_2 \oplus g_1 \oplus g_2$ 是两个不交圈的并, 我们记被以上四个圈围在内部的圈为 h 。则由定理 2.7、定理 2.8 ([8], 定理 4.3.6, 定理 4.3.8) 的证明过程可以得到以下引理。

引理 2.9. 在上述假定和符号下可知, h 及其内部构成子图中的所有环必须在 f_1, f_2 没扭转之前, 且在 g_1, g_2 都扭转之后都能分别扭转; 特别地, 若 h 本身是个环, 则 h 恰在 f_1, f_2 都没扭转之前, 和在 g_1, g_2 都扭转之后分别扭转一次。

设 P 和 Q 是两个不交的偏序集, 符号 $P \times Q$ 、 $P \cup Q$ 和 $P \sqcap Q$ 分别表示 P 和 Q 的直积(卡氏积)、序和与垂直和; $\hat{P} = \hat{1} \cup P \cup \hat{1}$, n 代表 n -长链; 本文中粗体字母 L 、 P 、 $J(P)$ 表示偏序集而通常的字母 L 、 P 、 $J(P)$ 表示相应偏序集中元素的集合。

3. 主要研究内容

在上文定理 2.8 中介绍了割元定理, 我们将所有可由割元定理判定的非匹配型分配格称为第一类; 而将无法用割元定理判定的非匹配型分配格, 称为第二类。本节我们给出几个判定第二类非匹配型分配格的判定方法。

引理 3.1. [8] [16] 下图 1 中的分配格(a)与(b)均是非匹配型分配格。

证明。(a) 反证法。不妨设存在平面基本二部图 G 使 $L \cong M(G)$ 。同引理 2.9, 记与 $M(G)$ 的割元 M_u 关联的两个非正常、两个正常 M_u -交错圈及其内部围出的圈分别为 f_1, f_2, g_1, g_2, h , 则 h 是在环 f_1, f_2 扭转之前, g_1, g_2 扭转之后扭转的, 所以 h 一定是 G 中的一个环。下面再来考虑 L 中最后扭转的面 h' , 因为它当且仅当在 h 扭转完之后才能扭转, 所以 $h \cap h' \neq \emptyset$ 。由此, h' 必在由 f_1, f_2 和 g_1, g_2 围成的圈内部(具体见图 1(c))。矛盾。

(b) 反证法。图中的一条路称为悬链, 如果其内点都是 2 度的, 且其两个端点的度大于等于 3。由图 1(a) 中的讨论知, h 和 h' 都在由 f_1, f_2 和 g_1, g_2 围成的圈内部且该圈内再无别的环。因此, 它们都分别在 f_1, f_2 扭转前和 g_1, g_2 扭转后各扭转一次, 且两次都是 h' 先于 h 扭转。 f_1, f_2 仅在 h 第一次扭转后才扭转, 则它们都与 h 相交。由此可知, 无论 h 和 h' 的位置关系如何(它们是由 C 被其一条仅端点在 C 上的悬链所分而得), h, h' 中至少有一个和 g_1, g_2 之一不交, 不妨设 h' 和 g_1 不交。易知, 此时 h' 和 g_1 是

共振的(具体见图 1(d))。

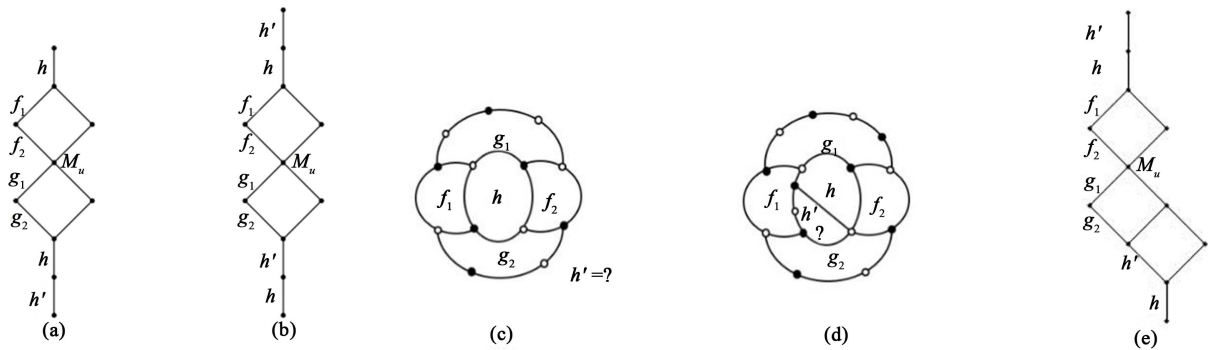


Figure 1. The non-matchable distributive lattice in Lemma 3.1, along with a schematic diagram of its proof
图 1. 引理 3.1 中的非匹配型分配格及其证明示意图

因此在 $M(G)$ 中即 h' 可在 g_1 扭转之前扭转, 即 $M(G)$ 中比格 L 多一个元素(具体见图 1(e))。矛盾。

推论 3.2。记下图 2 中(a)中的分配格为 N , 则 $\hat{N}$ 是以 N 为凸子格的最小阶数的匹配型分配格。

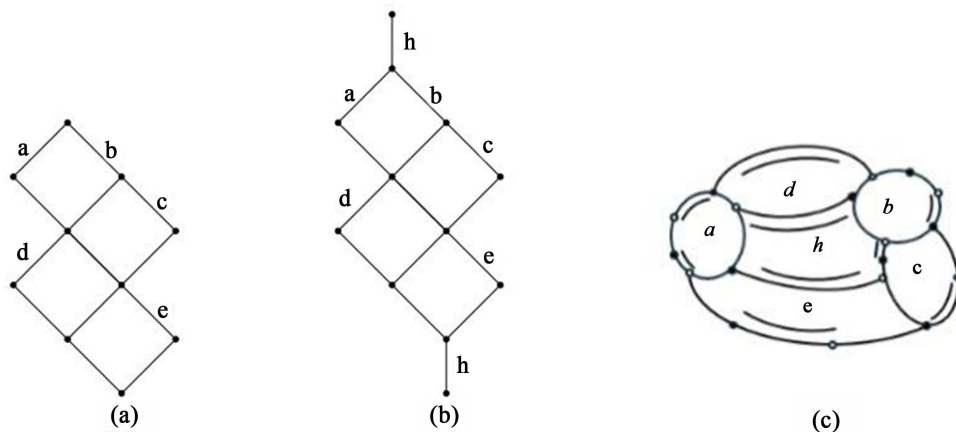


Figure 2. The posets N and $\hat{N}$ in Lemma 3.2 and their corresponding plane elementary bipartite graph G_0

图 2. 引理 3.2 中的 N 、 $\hat{N}$ 及其对应的平面基本二部图 G_0

证明。记图 2(c)中的平面二部图为 G_0 , 易知, $\hat{N} \cong M(G_0)$ 是匹配型分配格。接下来我们证明 $\hat{N}$ 是以 N 为凸子格的最小阶数的匹配型分配格。

设 L 是任意以 N 为凸子格的阶数尽可能小的匹配型分配格, 不妨设 L 也是既约的, 则存在平面基本二部图 G , 使得 $L \cong M(G)$ 。设在 L 中与 N 最大元对应的完美匹配是 M_1 , M_1 正常交错的两个环分别为 a, b , 记 $M_2 := M_1 \oplus b$, 则环 a 仍是正常 M_2 -交错的。记环 c 是除环 a 以外的另一正常 M_2 -交错环。记 $M_3 := M_2 \oplus a$, 则 c 也是正常 M_3 -交错的。记另一正常 M_3 -交错环为 d , $M_4 := M_3 \oplus c$, 则 d 也是正常 M_4 -交错的。再记另一正常 M_4 -交错环为 e 。由此易知环 a, b, c, d, e 互不相同且 c 与 b 共一段奇长路。因为 N 是 L 的一个区间, 所以 d 与 b 共一段奇长路(否则 d 是正常 $M_1 \oplus a$ 交错的, 则 $M'_1 := M_1 \oplus a \oplus d \in L$, 由区间的定义, M'_1 属于 N , 与凸子格定义矛盾)。同理 e 与 a 都共一段奇长路。又因为 d 与 a 共一段奇长路, e 与 c 共一段奇长路。因此在 G 的对偶图中环 a, b, c, d, e 围成一个圈, 且由 a, b 都是正常 M_1 -交错的知 a, b 共振, 同理 d, e 共振。

因此在此圈内部至少有一个 G 中的内面, 记为 h (具体见图 2(c))。由 G 的基本性知, 在生成 L 的过程中 h 必定出现, 再由引理 2.9 可知, 在生成 L 的过程中, h 一定会至少转两次, 即一次在 a, b 没转之前, 一次在 a, b, c, d, e 都转之后。则可得 $N \subseteq L$, 故 $\hat{N}$ 是以 N 为凸子格的最小阶数的匹配型分配格。

由以上引理我们可以得到以下推论:

推论 3.3. (i) N , $1 \cup N$ 与 $N \cup 1$ 均是非匹配型分配格。

(ii) 设 L 是任意有限分配格, 若 $\exists u \in L$, 使得 u 生成的主滤子(主理想)与 N (N^*)同构, 即 $I[u, 1_L] \cong N$, $I[0_L, u] \cong N^* = N$, 则 L 是非匹配型分配格(图 3)。

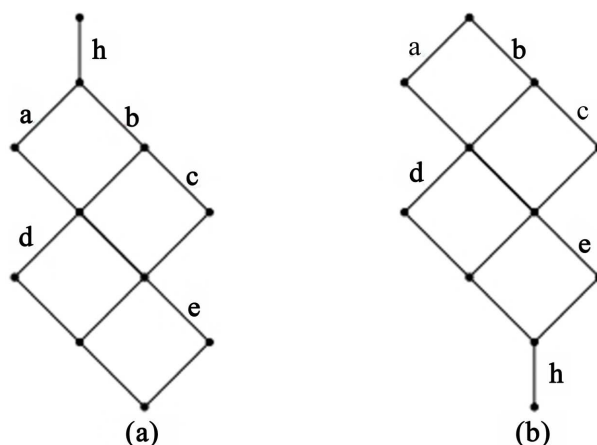


Figure 3. $N \cup 1$ and $1 \cup N$
图 3. $N \cup 1$ 与 $1 \cup N$

引理 3.4. 图 4 中的四个分配格都是非匹配型分配格。

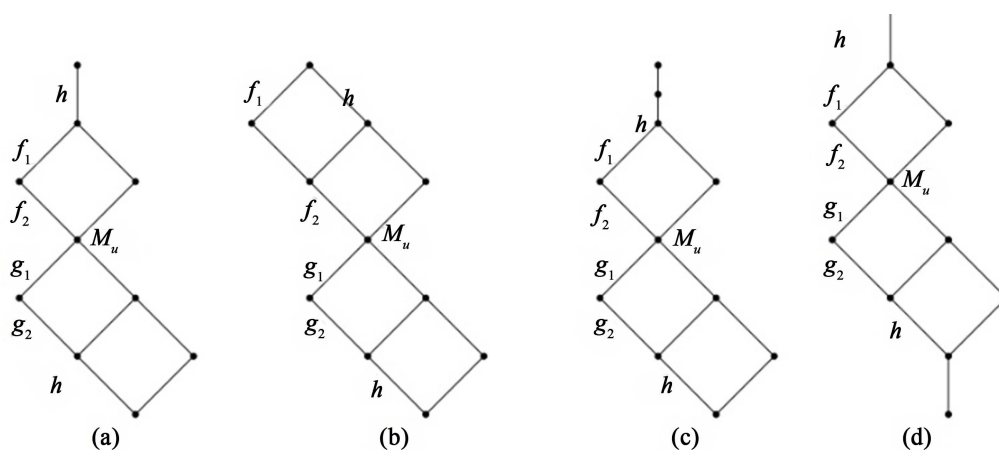


Figure 4. The non-matchable distributive lattice in Lemma 3.4
图 4. 引理 3.4 中的非匹配型分配格

证明。设 L 为其中一个给定的分配格。反证法, 不妨设存在平面基本二部图 G 使 $L \cong M(G)$ 。记与 $M(G)$ 的割元 M_u 关联的两个非正常和正常 M -交错环分别为 f_1 , f_2 和 g_1, g_2 。并记由这四个环围成的其内部的圈为 h 。由引理 2.9 知, h 中的所有环都在 f_1, f_2 之前且在 g_1, g_2 之后各扭转一次, 因为格(a)的

Hasse 图显示存在路径“ $g_2 \rightarrow h \rightarrow g_1$ ”，所以意味着 h 的扭转可以发生在 g_2 之后， g_1 之前。然而，根据引理 2.9， h 必须在在 g_1 ， g_2 都扭转之后才能扭转，矛盾。

如图所示的标记情况，由图 5(a)，我们可得出图 5 的(b)，(c)，(d)也是非匹配型的，其证明过程是完全一致的。

推论 3.5. 设 $n \geq 2$ ，则 $L: = (2 \times n) \sqcap (S_1 \sqcap 2)$ 是一个非匹配型分配格。 $n=2$ 与 $n=3$ 的情况如下图 5 中(a)、(b)所示。

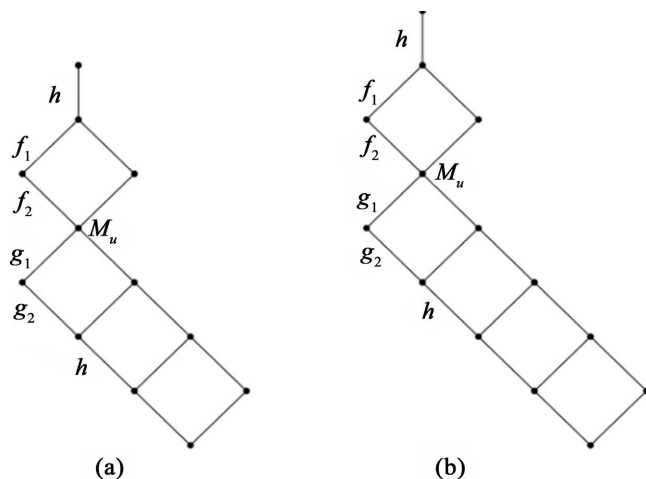


Figure 5. The cases of $n=2$ and $n=3$ in Corollary 3.5

图 5. 推论 3.5 中 $n=2$ 与 $n=3$ 的情况

证明。图 5 的(a)为 $n=2$ 的情况。不妨设存在平面基本二部图 G ，使 $L \cong M(G)$ ，易知 L 有且仅有一个 $(2, 2)$ 割点 M_u ，设与 M_u 关联的 2 个正常环与非正常环分别为 f_1, f_2, g_1, g_2 ，由定理 2.9 的证明过程知， f_1, f_2, g_1, g_2 围成一个圈，不妨设为 h ，易知 L 的 Hasse 图都显示存在路径“ $g_2 \rightarrow h \rightarrow g_1$ ”这意味着 h 的扭转可以发生在 g_2 之后， g_1 之前。然而，根据引理 2.9， h 必须在在 g_1 ， g_2 都扭转之后才能扭转，矛盾。

引理 3.6. 设下图 6 中的分配格(a) C 为，则 C' (见图 6(b))是以 C 为凸子格的最小阶数的匹配型分配格。

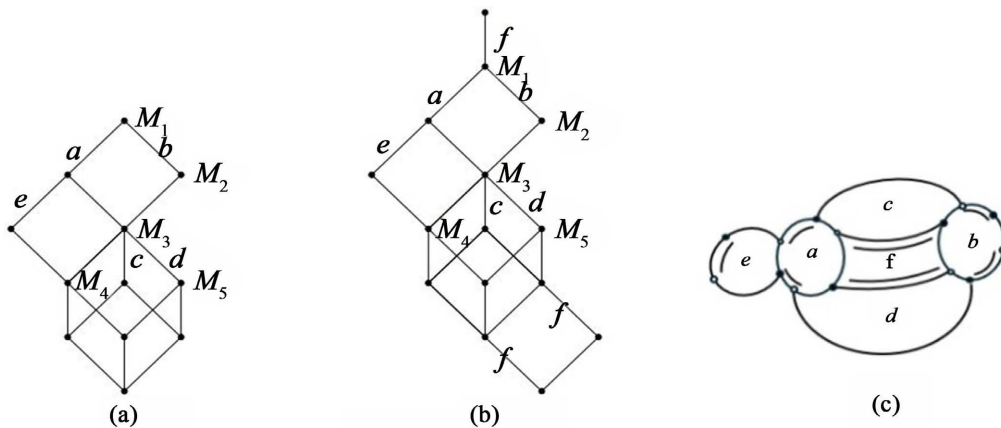


Figure 6. The posets C , C' , and the plane elementary bipartite graph G_1 corresponding to C' in Proposition 3.6

图 6. 命题 3.6 中的 C 、 C' 、以及 C' 对应的平面基本二部图 G_1

证明。记图 6(c) 中的平面二部图为 G_1 ，易知 $C' \cong M(G)$ ，所以 C' 是匹配型分配格。接下来我们证明 C' 是以 C 为子格的最小阶数的匹配型分配格。

设 L 是任意以 C 为凸子格的阶数尽可能小的匹配型分配格，不妨设 L 也是既约的，则存在平面基本二部图 G ，使得 $L \cong M(G)$ 。设在 L 中与 C 最大元对应的完美匹配是 M_1 。令 M_1 -交错圈为 a, b ， $M_2 := M_1 \oplus b$ ，则 a 仍是 M_1 -正常交错的；记 $M_3 := M_2 \oplus a$ ，设环 c, d 均为 M_3 -正常交错的；记 $M_4 := M_3 \oplus c$ ，则 d 仍是 M_4 -正常交错的。综上易知：环 a, b, c, d 互不相同且 b 与 c, d 共奇长路， a 与 d 共奇长路（否则 a 是正常 $M_2 \oplus d$ -交错的，则 $M'_2 = M_2 \oplus d \oplus a \in L$ ，由凸子格的定义可知， M'_2 属于 C ，矛盾）。又因为环 a, b 是 M_1 -正常交错的，所以 a, b 是共振的，同理 c, d 也是共振的，因此在 G 的对偶图中环 a, b, c, d 围成一个圈，在此圈内部至少有一个 G 中的内面，记为 f （具体见图 6(c)）。由 G 的基本性知，在生成 L 的过程中 f 必定出现。由 L 的结构知，还有另一个环的存在，不妨设其为 e ，若环 e 就是环 f ，则 e 与 c, d 都共奇长路，与独立性矛盾。如果环 e 不是环 f ，则由于 L 包含的环仅有 a, b, c, d, e ， L 缺元，矛盾。

再由引理 2.9 可知，在生成 L 的过程中， f 一定在环 a, b 没转之前， c, d 都转之后各转一次，即 C' ，其对应的平面二部图（具体见图 6(c)）。故 C' 是以 C 为凸子格的最小阶数的匹配型分配格。

注：推论 3.2、引理 3.6 中的凸子格不能改成子格，否则分别会有反例，具体见图 7，(00134) 是以 N 为子格的但阶数比 $\hat{N}$ 更小的匹配型分配格；同理 (00046) 是以 C 为子格，但阶数比 C' 更小的匹配型分配格（有限分配格的标号方法来自 [18]）。

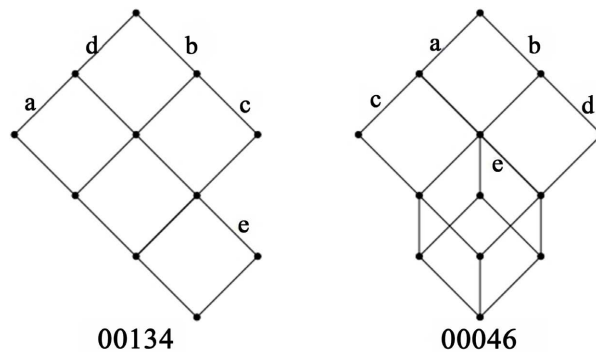


Figure 7. Counterexample graphs after weakening the convexity in Corollary 3.2 and Lemma 3.6

图 7. 减弱推论 3.2、引理 3.6 凸性后的反例图

类似推论 3.2，可得到以下推论。

推论 3.7.1) C ， $1 \cup C$ ， $C \cup 1$ 与 $\hat{C}$ 以及图 8 中的其余分配格均是以 C 为凸子格的非匹配型分配格。

2) 设 L 是任意有限分配格，若 $\exists u \in L$ ，使得 u 生成的主滤子（主理想）与 C 同构，即 $I[u, 1_L] \cong C$ ($I[0_L, u] \cong C^*$)，则 L 是非匹配型分配格。

3) 设 L 是任意有限分配格，若 L 以 $1 \cup C$ 为主理想，则 L 是非匹配型分配格（图 8）。

推论 3.8。设 L 是任意有限分配格，则：

- (1) T 为 $\widehat{S_2}$ (Π_2)、 $\widehat{S_3}$ 、 $\widehat{S_4}$ ，或
- (2) T 为推论 3.2 中的 (a)、推论 3.3 中任意一个分配格，或
- (3) T 为 $S_2 \cup 2$ ，或
- (4) T 为引理 3.4 中四个分配格中的任意一个，或
- (5) T 为引理 3.6 中 (a)、3.7 中两个分配格，

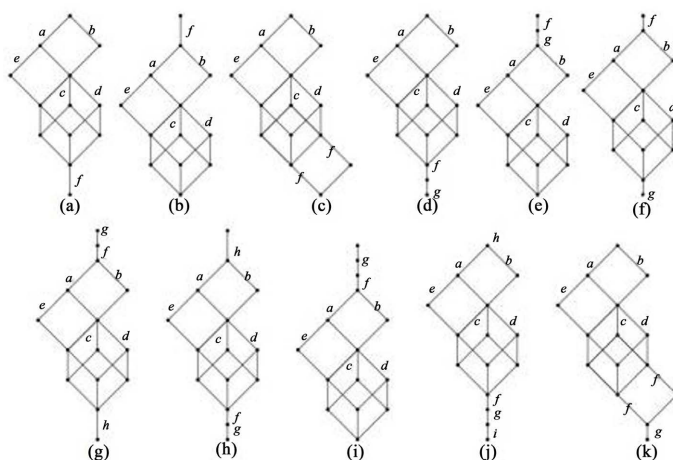


Figure 8. Some non-matchable distributive lattices with C as a convex sublattice

图 8. 以 C 为凸子格的一些非匹配型分配格

则 $L \sqcap T$ 和 $T^* \sqcap L$ 都是非匹配型分配格。

作为以上工作的简单应用, 我们可将阶数不超过 12 阶的非匹配型分配格进行枚举, 其中阶数不超过 11 的非匹配型分配格已经在[16]中给出。由以上结论可以把所有阶数不超过 12 的非匹配型分配格刻画出来。直接可得以下结论。

引理 3.9。以下 24 个分配格都是第一类非匹配型分配格(图 9)。

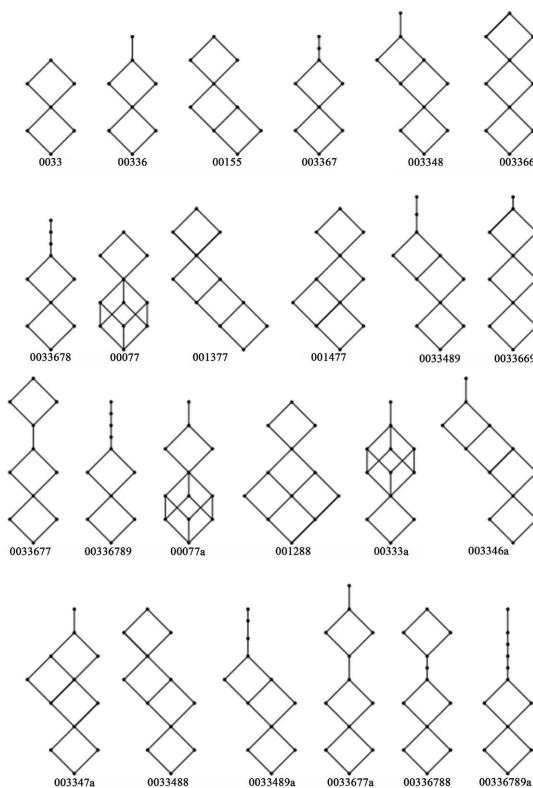


Figure 9. The first type of non-matchable distributive lattices

图 9. 第一类非匹配型分配格

本引理中给出了阶数不超过 12 的所有可以用割元定理证明的非匹配型分配格，共有 45 个，在此只列出 L 和 L^* 之一，因而只有 24 个，其中 3 个是自对偶的。

引理 3.10。以下 26 个分配格都是第二类非匹配型分配格(图 10)：

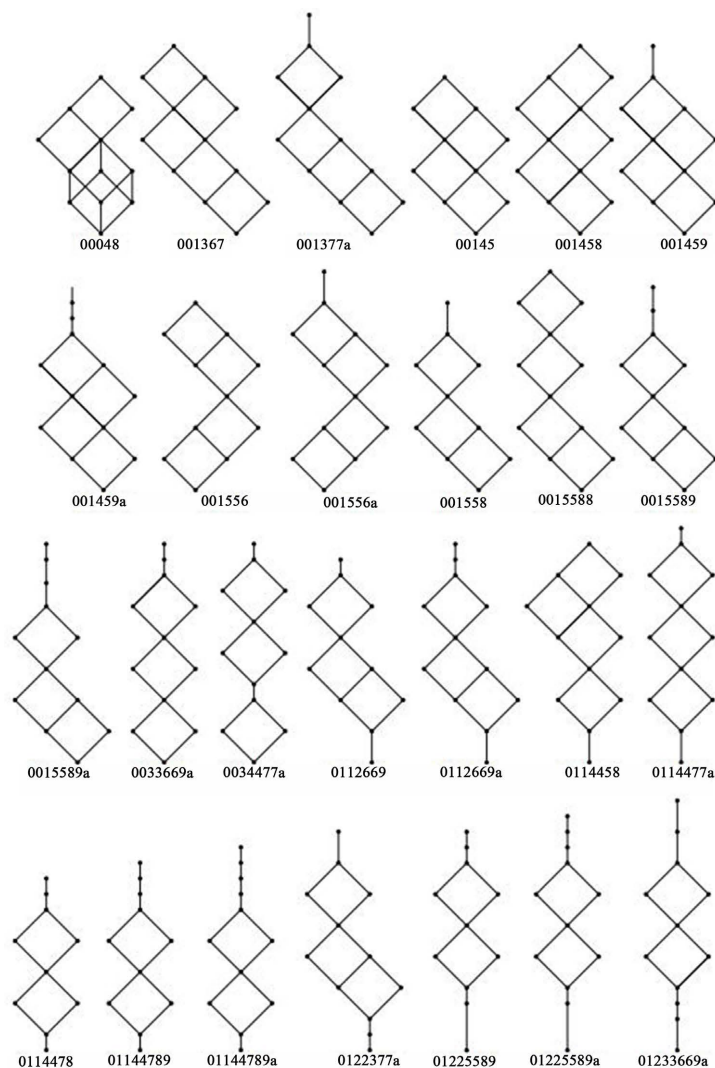


Figure 10. The second type of non-matchable distributive lattices

图 10. 第二类非匹配型分配格

本引理中给出了阶数不超过 12 的所有不能用割元定理判定的剩余的非匹配型分配格，共有 47 个，在此只列出 L 和 L^* 之一，因而只有 26 个，其中 5 个是自对偶的。

为验证格 L 是匹配型的，由匹配型分配格的基本定义，则需至少构造出一个弱平面二部图 G ，使之满足 $L \cong M(G)$ 。易知 L 的 Hasse 图上的点集是 G 的完美匹配集，边集为 G 的内面重集。也就是说 L 的 Hasse 图呈现了图 G 中可做 Z -变换的交错内面圈的扭转先后顺序以及内圈之间的共振关系，Hasse 图中四边形上的对边是由 G 中同一个面扭转出来的。我们的工作主要如下：1、根据 L 的 Hasse 图得到扭转顺序；2、根据 L 的 Hasse 图确定 G 中面的相邻情况及共振情况；3、画出 G 的内面，标出顶点的黑白着色。

下面给出一个根据 12 阶的匹配型分配格构造出与之对应的平面二部图的具体例子及构造过程。

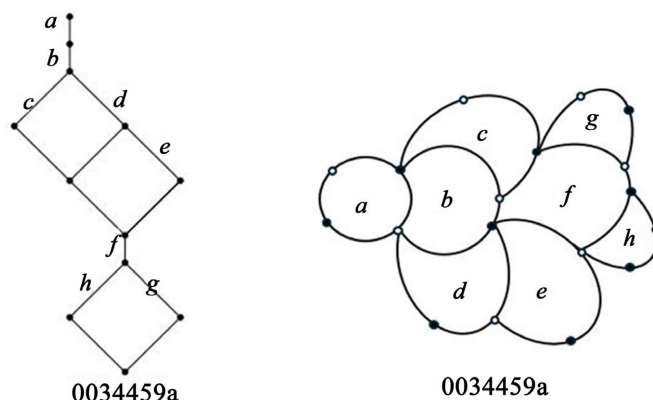


Figure 11. The Hasse diagram of 0034459a and its corresponding plane bipartite graph

图 11. 0034459a 的 Hasse 图及其对应的平面二部图

由图 11 中 0034459a 的 Hasse 图可得与其对应的平面二部图中交错内面的扭转顺序以及共振关系： a 是 M_1 -交错内圈， b 是 a 扭转之后才能扭转的内面，因此 b 与 a 必定共奇长路，且该奇长路按 a 顺时针来看，起点是黑点，终点是白点(下同)；在 b 扭转之后 c 和 d 都可以扭转，说明 b 与 c 、 d 分别交奇长路，也说明 b 与 c 是共振的，即 b 与 c 是两个不交的内面；因为 e 是在 d 扭转之后可以扭转的内面，所以 d 与 e 也交奇长路，通过观察 0034459a 的 Hasse 图可以发现 c 与 e 是 Hasse 图中一个四边形的邻边，则 c 与 e 也是共振的，所以 c 与 e 不交；且 f 是 c 与 e 均扭转之后才能扭转的内面，所以 f 与 c 、 e 均共奇长路；最后， h 与 g 都是 f 扭转后才能扭转的内面，因此 h 与 g 是共振的，所以 f 分别与 h 、 g 共奇长路。根据以上关系，我们可以画出图 11 右侧的平面基本二部图及其正常黑白着色(为保证其二部性并避免出现重边，需适当添加一些二度点)。

阶数不超过 12 阶的分配格共有 342 个[17]，除上述 92 个非匹配型分配格之外，针对剩余的 250 个分配格，我们证明了它们都是匹配型的(对这些匹配型分配格及其对应的平面二部图的构造与讨论，我们将会在另一篇文章中给出)。实际上，我们首先画出了每个分配格对应的至少一个平面二部图，以及构造了该平面二部图对应的以内面为集合、以内面扭转的先后次序为偏序关系的偏序，其中多次扭转的面我们在偏序集中用不同记号分别标出；最后验证了生成的分配格与原分配格是同构的。由此可得以下结论。

引理 3.11. 除了在引理 3.9、引理 3.10 中出现的分配格外，其余阶数不超过 12 的分配格均为匹配型分配格。

综上，我们找到了所有的阶数不超过 12 阶的非匹配型分配格。

定理 3.12. 图 9、图 10 及其对偶共 93 个分配格是所有阶数不超过 12 的非匹配型分配格。

基金项目

国家自然科学基金(编号：12161081)。

参考文献

- [1] Blair, C. (1984) Every Finite Distributive Lattice Is a Set of Stable Matchings. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, **37**, 353-356. [https://doi.org/10.1016/0097-3165\(84\)90056-6](https://doi.org/10.1016/0097-3165(84)90056-6)
- [2] Zhang, H. and Zhang, F. (2000) Plane Elementary Bipartite Graphs. *Discrete Applied Mathematics*, **105**, 291-311. [https://doi.org/10.1016/S0166-218X\(00\)00204-3](https://doi.org/10.1016/S0166-218X(00)00204-3)
- [3] Lam, P.C.B. and Zhang, H. (2003) A Distributive Lattice on the Set of Perfect Matchings of a Plane Bipartite Graph. *Order*, **20**, 13-29. <https://doi.org/10.1023/a:1024483217354>

-
- [4] Grüindler, W. (1982) Signifkante elektronenstrukturen für benzenoide kohlenwasserstoffe. *Wissenschaftliche Zeitschrift der Universität Halle*, **31**, 97-116.
 - [5] Fournier, J.C. (2003) Combinatorics of Perfect Matchings in Plane Bipartite Graphs and Application to Tilings. *Theoretical Computer Science*, **303**, 333-351. [https://doi.org/10.1016/s0304-3975\(02\)00496-6](https://doi.org/10.1016/s0304-3975(02)00496-6)
 - [6] Zhang, H., Yang, D. and Yao, H. (2014) Decomposition Theorem on Matchable Distributive Lattices. *Discrete Applied Mathematics*, **166**, 239-248. <https://doi.org/10.1016/j.dam.2013.09.008>
 - [7] Klavžar, S. and Žigert, P. (2005) Fibonacci Cubes Are the Resonance Graphs of Fibonaccenes. *The Fibonacci Quarterly*, **43**, 269-276. <https://doi.org/10.1080/00150517.2005.12428368>
 - [8] Yao, H. and Zhang, H. (2015) Non-Matchable Distributive Lattices. *Discrete Mathematics*, **338**, 122-132. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2014.10.020>
 - [9] 王旭. 几类匹配型和非匹配型分配格[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 西北师范大学, 2019.
 - [10] Birkhoff, G. (1979) Lattice Theory. 3rd Edition, American Mathematical Society.
 - [11] 黄天民, 徐扬, 赵海良. 格、序引论及其应用[M]. 成都: 西南交通大学出版社, 1998.
 - [12] Davey, B.A. (1990) Priestley. Introduction to Lattices and Order. Cambridge University Press.
 - [13] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1982) Graph Theory with Applications. Elsevier Science Publishing Co. Inc.
 - [14] (德)R.迪斯特尔. 图论(原书第五版) [M]. (加)于青林, 译. 北京: 科学出版社, 2020.
 - [15] Zhang, H. (2010) Direct Sum of Distributive Lattices on the Perfect Matchings of a Plane Bipartite Graph. *Order*, **27**, 101-113. <https://doi.org/10.1007/s11083-010-9139-3>
 - [16] 姚海元. 平面二部图的完美匹配和分配格结构[D]: [博士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2007.
 - [17] Ern , M., Heitzig, J. and Reinhold, J. (2002) On the Number of Distributive Lattices. *The Electronic Journal of Combinatorics*, **9**, 1-23. <https://doi.org/10.37236/1641>
 - [18] 杨德五. 匹配分配格的分解定理[D]: [硕士学位论文]. 兰州: 兰州大学, 2005.