

完全图删边后的Zagreb指数研究

李尚豫

青岛大学数学与统计学院, 山东 青岛

收稿日期: 2025年10月2日; 录用日期: 2025年10月29日; 发布日期: 2025年11月7日

摘 要

在分子图论中, 第一与第二Zagreb指数是Gutman与Trinajstić于1972年提出的重要拓扑指数。第一Zagreb指数 $M_1(G)$ 定义为所有顶点度数的平方和; 第二Zagreb指数 $M_2(G)$ 定义为所有相邻顶点对的度数乘积之和。这些指数是表征分子结构的重要工具。设 $\mathcal{K}_n^p$ 表示从完全图 K_n 中删去 p 条边所得到的所有图的集合, 其中 n, p 为正整数, 且 $n \geq 2p, p \geq 2$ 。本文为属于 $\mathcal{K}_n^p$ 的图的Zagreb指数给出了精确的上界与下界, 并刻画了达到这些界的极值图。由此, 我们确定了在 $\mathcal{K}_n^p$ 中与Zagreb指数相对应的极值图。

关键词

Zagreb指数, 极值图, 上下界

The Zagreb Indices of Complete Graphs Deleting Some Edges

Shangyu Li

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: October 2, 2025; accepted: October 29, 2025; published: November 7, 2025

Abstract

In molecular graph theory, the first and second Zagreb indices, $M_1(G)$ and $M_2(G)$, are prominent topological descriptors introduced by Gutman and Trinajstić in 1972. The first Zagreb index $M_1(G)$ is calculated by summing the squares of each vertex's degree, while the second Zagreb index $M_2(G)$ involves summing the products of the degrees of pairs of adjacent vertices. These indices serve as important tools in characterizing molecular structures. Let $\mathcal{K}_n^p$ be the set of graphs

obtained from the complete graph K_n by deleting p edges, where n, p are positive integers with $n \geq 2p$ and $p \geq 2$. This paper establishes precise upper and lower bounds for the Zagreb indices of graphs from $\mathcal{K}_n^p$, and identifies the extremal graphs where these bounds are achieved. As a result, we identify the extremal graph from $\mathcal{K}_n^p$ that corresponds to the Zagreb indices.

Keywords

Zagreb Indices, Extremal Graphs, Upper and Lower Bounds

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文只讨论有限无向简单图。设图 G 的顶点集为 $V(G)$, 边集为 $E(G)$ 。对任一顶点 $v \in V(G)$, 记 $N_G(v)$ 为 v 在 G 中的邻接顶点集合。顶点 v 的度记为 $d_G(v)$, 定义为与 v 相邻的顶点数。若 $W \subset V(G)$, 则记 $G - W$ 为从 G 中删去 W 中所有顶点及其所有关联边所得的子图。类似地, 若 $E' \subset E(G)$, 则记 $G - E'$ 为从 G 中删去 E' 中各边后的子图。特别地, 当 $W = \{v\}$, $E' = \{xy\}$ 时, 分别记为 $G - v$ 与 $G - xy$ 。 K_n 表示阶数为 n 的完全图。未在文中另行说明的符号与术语见文献[1]。

20 世纪 70 年代初, 化学图论作为研究分子结构的一种重要工具正在兴起, 研究人员希望通过量化分子图来预测化合物的化学性质和生物活性。图论中的拓扑指数逐渐成为量化化合物结构的重要工具, 特别是在预测分子行为和反应性方面发挥了关键作用。Zagreb 指数最初被提出用于描述基于顶点度数的分子图, 顶点的度数表示连接到一个原子(顶点)的键(边)的数量。

Zagreb 指数的研究由 Gutman 与 Trinajstić 于 1972 年提出, 现已成为化学图论和分子图结构分析中的基础课题。他们的开创性工作给出了第一与第二 Zagreb 指数的定义, 并将其用于分子结构分析, 为后续研究奠定了基础[2]。对于一个(分子)图 $V(G)$, 第一 Zagreb 指数 $M_1(G)$ 与第二 Zagreb 指数 $M_2(G)$ 分别定义为

$$M_1(G) = \sum_{v \in V(G)} d_G(v)^2, M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} d_G(u)d_G(v).$$

这些指数, 尤其是第一 Zagreb 指数 $M_1(G)$ 和第二 Zagreb 指数 $M_2(G)$, 由于在分子结构建模以及物理、化学性质预测中的作用而受到广泛研究。Miličević 等提出了若干等价重述, 进一步拓展了这些指数在分子结构分析中的适用性[3]。在此基础上, Xu 与 Hua 提出统一框架, 用以计算树、单圈图与双圈图的乘法型 Zagreb 指数的极值, 从而提供了研究极值图指数的通用方法[4]。Furtula 与 Gutman 对该指数族作了系统综述, 强调其历史演进及在分子性质建模中的应用[5]。Das 等人给出了第一与第二 Zagreb 指数的严格上下界, 突显了这些指标在图论中的重要性[6]。Réti 研究了两类指数之间的相互关系, 深化了对这些量的理论认识并推动了其实际应用[7]。Xu 刻画了团数给定时图的 Zagreb 指数的极值, 包括极大值和极小值[8]。Deng 针对特定图类, 如树、单圈图、双圈图, 给出了极值结果, 拓展了其应用范围[9]。Xu 等进一步在边数较大的二部图上考察了 Zagreb 指数, 确定了相应的极值并刻画了达到极值的结构[10]。同时, 关于不同图类上 Zagreb 指数极值性质的研究也相当丰富。近年来, 研究者们主要致力于确定图的这

两个拓扑指数的极值或界限, 并刻画相应的极值图[9] [11]-[18]。本文把从完全二部图中删去 p 条边的结果推广到从完全图中删去 p 条边的情形, 进而得到相应的极值与极值图。为了防止删边后出现孤立顶点使得图不连通, 要求完全图顶点数 $n \geq 2p$ 。

2. 预备知识

设 $m = \binom{a}{2} + b$, 其中 $0 \leq b < a$, 定义拟团图 K_n^m 如下: 从完全图 K_a 出发, 添加一个新的顶点, 使其与 K_a 中恰有 b 个顶点相邻; 再加入其余 $n-a-1$ 个孤立顶点。由此得到的 n 阶图记为 K_n^m 。

本文中 n 与 p 为正整数, 满足 $n \geq 2p, p \geq 2$ 。为便于叙述, 先给出若干记号。记 $\mathcal{K}_n^p$ 为从完全图 K_n 中删去 p 条边所得到的图的集合。我们将在 $\mathcal{K}_n^p$ 内给出 Zagreb 指数的精确上下界, 并刻画达到这些界的极值图。此外, 我们还将确定 $\mathcal{K}_n^p$ 中关于 Zagreb 指数的极值结构。

具体地, 记 $K_n^k(e_1, \dots, e_p) \in \mathcal{K}_n^p$ 为从 K_n 删去 p 条边 $e_1, \dots, e_p$ 所得的图, 其中 $\bigcap_{i=1}^p e_i = k$, 其中 k 取 0 或 1。显然, 在 $K_n^1(e_1, \dots, e_p)$ 中, $e_1, \dots, e_p$ 两两独立(任意两条边不相交); 在 $K_n^0(e_1, \dots, e_p)$ 中, $e_1, \dots, e_p$ 共有一个公共端点。当 $k=1$ 时, $K_n^1(e_1, \dots, e_p)$ 即为参数 $a=n-1$ 的拟团图。

引理 1 ([10]) 设 G 为图, $uv \in E(G)$, 令 $G' = G - uv$ 。则:

- 1) $M_1(G') = M_1(G) - 2 - 2(d_G(u) + d_G(v))$
- 2) $M_2(G') = M_2(G) - d_G(u)d_G(v) - \sum_{v_i \in N_G(u) \setminus \{v\}} d_G(v_i) - \sum_{v_j \in N_G(v) \setminus \{u\}} d_G(u_j)$

其中 $N_G(u)$ 记为 u 在 G 中的邻接点集。

3. 主要结果

定理 1 对任意 $G \in \mathcal{K}_n^p$, 有

$$n^3 - 2n^2 + (1-4p)n + 6p \leq M_1(G) \leq n^3 - 2n^2 + (1-4p)n + 5p + p^2 \quad (1)$$

且左端等号当且仅当 $G \cong K_n^0(e_1, e_2, \dots, e_p)$, 右端等号当且仅当 $G \cong K_n^1(e_1, e_2, \dots, e_p)$ 。

证明: 对从 K_n 中删除的边数 p 作归纳。先看 $p=2$, 此时 $\mathcal{K}_n^2 = \{K_n^0(e_1, e_2), K_n^1(e_1, e_2)\}$, 结论显然成立。设当 $p=k-1$ 时命题成立。现考虑 $p=k$ 。取 $G \in \mathcal{K}_n^k$, 并取 $u, v \in V(G)$ 使得 $uv \notin E(G)$ 。注意到存在对应的图 $G^* \in \mathcal{K}_n^{k-1}$ 使得 $G^* = G + uv$ 。

由引理 1, 得

$$M_1(G) = M_1(G^*) - 2(d_G(u) + d_G(v)) - 2. \quad (2)$$

由于 $G^* = G + uv$, 故 $d_G(u) = d_{G^*}(u) - 1$ 且 $d_G(v) = d_{G^*}(v) - 1$ 。设在图 G 中, 与顶点 u 和 v 相邻的边分有 k_1 条和 k_2 条从 K_n 中被删除其中 $0 \leq k_1 + k_2 \leq k-1$ 。

因此有

$$d_G(u) + d_G(v) = 2n - 4 - (k_1 + k_2). \quad (3)$$

由式(2)与式(3)可得

$$M_1(G) = M_1(G^*) - 4n + 2(k_1 + k_2) + 6.$$

根据归纳假设并注意到 $k_1 + k_2 \geq 0$, 可得

$$\begin{aligned}
M_1(G) &= M_1(G^*) - 4n + 6 + 2(k_1 + k_2) \\
&\geq n^3 - 2n^2 + (1 - 4(k - 1))n + 6(k - 1) - 4n + 6 \\
&\geq n^3 - 2n^2 + (1 - 4k)n + 6k \\
&= M_1(K_n^0(e_1, e_2, \dots, e_k))
\end{aligned}$$

当且仅当 $G^* \cong K_n^0(e_1, e_2, \dots, e_{k-1})$ 且 $k_1 = k_2 = 0$ 时, 以上等式取等。

即, $G \cong K_n^0(e_1, e_2, \dots, e_k)$, 其中 $e_k = uv$ 。

由归纳假设以及 $k_1 + k_2 \leq k - 1$, 可得

$$\begin{aligned}
M_1(G) &= M_1(G^*) - 4n + 6 + 2(k_1 + k_2) \\
&\geq n^3 - 2n^2 + (1 - 4(k - 1))n + 5(k - 1) + (k - 1)^2 - 4n + 6 + 2(k - 1) \\
&\geq n^3 - 2n^2 + (1 - 4k)n + 5k + k^2 = M_1(K_n^1(e_1, e_2, \dots, e_k))
\end{aligned}$$

当且仅当 $G^* \cong K_n^1(e_1, e_2, \dots, e_{k-1})$ 且 $k_1 + k_2 = k - 1$, 即 $k_1 = k - 1, k_2 = 0$ 或 $k_1 = 0, k_2 = k - 1$ 时, 上述等号成立。亦即, 当且仅当 $G \cong K_n^1(e_1, e_2, \dots, e_k)$, 其中 $e_k = uv$ 时, 等式取等。

在证明定理 2 之前, 为使叙述更清晰简洁, 我们定义如下两个函数:

$$\begin{aligned}
F_1(n, p) &= \frac{1}{2} [n^4 - 3n^3 - (6p - 3)n^2 + (16p - 1)n + 4p^2 - 14p] \\
F_2(n, p) &= \frac{1}{2} [n^4 - 3n^3 - (6p - 3)n^2 + (2p^2 + 14p - 1)n - p^2 - 9p].
\end{aligned}$$

定理 2 对任意 $G \in \mathcal{K}_n^p$, 有

$$F_1(n, p) \leq M_2(G) \leq F_2(n, p) \quad (4)$$

当且仅当 $G \cong K_n^0(e_1, e_2, \dots, e_p)$ 时, 左端等号成立; 当且仅当 $G \cong K_n^1(e_1, e_2, \dots, e_p)$ 时, 右端等号成立。

证明: 我们将对从 K_n 中删除的边数 p 进行归纳。当 $p = 2$ 时, $\mathcal{K}_n^2 = \{K_n^0(e_1, e_2), K_n^1(e_1, e_2)\}$ 。

根据第二 Zagreb 指数的定义, 有

$$\begin{aligned}
F_1(n, 2) &= M_2(K_n^0(e_1, e_2)) = \frac{1}{2} (n^4 - 3n^3 - 9n^2 + 31n - 12) \\
F_2(n, 2) &= M_2(K_n^1(e_1, e_2)) = \frac{1}{2} (n^4 - 3n^3 - 9n^2 + 35n - 22).
\end{aligned}$$

容易验证, $M_2(K_n^1(e_1, e_2)) > M_2(K_n^0(e_1, e_2))$, 因此在 $p = 2$ 的情形下结论成立。

设当 $p = k - 1$ 时命题成立。现考虑 $p = k$ 的情形。取 $G \in \mathcal{K}_n^k$, 并设 $u, v \in V(G)$, 且 $uv \notin E(G)$ 。注意到必存在一个图 $G^* \in \mathcal{K}_n^{k-1}$, 使得通过在 G 中添加边 uv 可以得到 G^* 。

由引理 1 可得

$$M_2(G) = M_2(G^*) - d_{G^*}(u)d_{G^*}(v) - \sum_{v_i \in N_{G^*}(u) \setminus \{v\}} d_{G^*}(v_i) - \sum_{u_j \in N_{G^*}(v) \setminus \{u\}} d_{G^*}(u_j). \quad (5)$$

其中 $N_{G^*}(u)$ 表示顶点 u 在图 G^* 中的邻点集合。设在顶点 u 与 v 处分别从完全图 K_n 删除的边数为 k_1, k_2 , 其中 $0 \leq k_1 + k_2 \leq k - 1$ 。因此有 $d_{G^*}(u) = n - 1 - k_1$, $d_{G^*}(v) = n - 1 - k_2$ 。

为了计算顶点 u 与 v 在 G^* 中的邻点度数, 现引入以下记号。

设 $X_1 = N_{G^*}(u) \setminus \{v\}$, $X_2 = N_{G^*}(v) \setminus \{u\}$, $X_3 = N_{K_n}(u) \setminus N_{G^*}(u)$, $X_4 = N_{K_n}(v) \setminus N_{G^*}(v)$ 。

显然, $|X_3| = k_1$, $|X_4| = k_2$ 。记 $X_5 = X_1 \cap X_2$, $X_6 = X_3 \cap X_4$ 。这样划分顶点集是为了方便描述后续删边时, 顶点在不同点集里的边删去后对顶点 u 与 v 造成的度数的影响(图 1)。

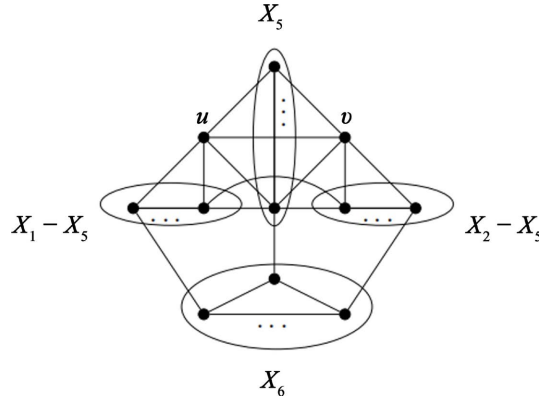


Figure 1. Structure of the constructed graph

图 1. 构造图的结构

设 $F(G^*)$ 为从完全图 K_n 中删除的边集。定义

$$\begin{aligned} F_1 &= \{e = \{x, y\} \mid e \in F(G^*), x \in X_1 \setminus X_5, y \in X_2 \setminus X_5\}; \\ F_2 &= \{e = \{x, y\} \mid e \in F(G^*), x, y \in X_1 \setminus X_5\}; \\ F_3 &= \{e = \{x, y\} \mid e \in F(G^*), x, y \in X_2 \setminus X_5\}; \\ F_4 &= \{e = \{x, y\} \mid e \in F(G^*), x, y \in X_5\}; \\ F_5 &= \{e = \{x, y\} \mid e \in F(G^*), x, y \in X_6\}; \\ F_6 &= \{e = \{x, y\} \mid e \in F(G^*), x \in X_1 \setminus X_5, y \in X_6\}; \\ F_7 &= \{e = \{x, y\} \mid e \in F(G^*), x \in X_2 \setminus X_5, y \in X_6\}; \\ F_8 &= \{e = \{x, y\} \mid e \in F(G^*), x \in X_1 \setminus X_5, y \in X_5\}; \\ F_9 &= \{e = \{x, y\} \mid e \in F(G^*), x \in X_2 \setminus X_5, y \in X_5\}; \\ F_{10} &= \{e = \{x, y\} \mid e \in F(G^*), x \in X_5, y \in X_6\}. \end{aligned}$$

显然,

$$\sum_{i=1}^{10} F_i = k - 1 - k_1 - k_2. \quad (6)$$

从 G^* 变到 G 只需要删除一条边。在删边过程中, 从集合 F_2 、 F_3 、 F_4 中删除一条边, 将导致顶点 u 与 v 的邻接顶点的度减少 4; 从集合 F_8 、 F_9 中删除一条边, 将使顶点 u 与 v 的邻接顶点的度减少 3。同样地, 从集合 F_1 、 F_{10} 中删除一条边, 将使顶点 u 与 v 的邻接顶点的度减少 2; 而从集合 F_6 、 F_7 中删除一条边, 则会使顶点 u 与 v 的邻接顶点的度减少 1。

令 $m_{G^*}(u)$ 表示图 G^* 中顶点 u 的所有邻接点的平均度, 即

$$\sum_{v_i \in N_{G^*}(u)} d_{G^*}(v_i) = d_{G^*}(v) + \sum_{v_i \in N_{G^*}(u) \setminus \{v\}} d_{G^*}(v_i) = d_{G^*}(u) m_{G^*}(u).$$

此外, 我们有

$$\begin{aligned} (n-1-k_1) m_{G^*}(u) &= (n-1-k_1)(n-1)-k_2-(k_2-|X_6|) \\ &\quad -(|F_1|+2|F_2|+2|F_4|+|F_{10}|+|F_6|+2|F_8|+|F_9|). \end{aligned}$$

同理,

$$\begin{aligned} (n-1-k_2) m_{G^*}(v) &= (n-1-k_2)(n-1)-k_1-(k_1-|X_6|) \\ &\quad -(|F_1|+2|F_3|+2|F_4|+|F_{10}|+|F_7|+|F_8|+2|F_9|). \end{aligned}$$

结合以上三式与式(5), 可得

$$\begin{aligned} M_2(G) &= M_2(G^*) - d_{G^*}(u) d_{G^*}(v) - \sum_{v_i \in N_{G^*}(u) \setminus \{v\}} d_{G^*}(v_i) - \sum_{u_j \in N_{G^*}(v) \setminus \{u\}} d_{G^*}(u_j) \\ &= M_2(G^*) - d_{G^*}(u) d_{G^*}(v) - (d_{G^*}(u) m_{G^*}(u) - d_{G^*}(v)) - (d_{G^*}(v) m_{G^*}(v) - d_{G^*}(u)) \\ &= M_2(G^*) - 3n^2 + 8n + (2n-1)(k_1+k_2) - k_1 k_2 - 5 - 2|X_6| + 4(|F_2|+|F_3|+|F_4|) \\ &\quad + 2(|F_1|+|F_{10}|+|F_6|+|F_7|+3(|F_8|+|F_9|)). \end{aligned}$$

可以容易验证, 当 $k_1 = k_2 = 0$ 时, 项 $(2n-1)(k_1+k_2) - k_1 k_2$ 取得最小值 0, 此时 $X_1 = X_2 = X_5$ 且 $X_3 = X_4 = X_6 = \emptyset$ 。此外, 除 F_4 外所有集合 F_i 均为空集, 故 $|F_i| = 0$, 而 $|F_4| = k-1$ 。

由归纳假设可得

$$\begin{aligned} M_2(G) &\geq M_2(G^*) - 3n^2 + 8n - 5 + 4(k-1) \\ &\geq \frac{1}{2} [n^4 - 3n^3 - (6(k-1)-3)n^2 + (16(k-1)-1)n + 4(k-1)^2 - 14(k-1)] - 3n^2 + 8n + 4k - 9 \\ &= \frac{1}{2} [n^4 - 3n^3 - (6k-3)n^2 + (16k-1)n + 4k^2 - 14k] \\ &= M_2(K_n^0(e_1, e_2, \dots, e_k)) \end{aligned}$$

因此, 当且仅当 $G^* \cong K_n^0(e_1, e_2, \dots, e_{k-1})$ 且 $k_1 = k_2 = 0$ 时, 上述等式取等。亦即, 当且仅当 $G \cong K_n^0(e_1, e_2, \dots, e_k)$ 时, 等号成立。其中 $e_k = uv$, 且它与 $\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$ 中任意一条边相互独立。同理, 可以验证当 $k_1 = k-1, k_2 = 0$ 或 $k_1 = 0, k_2 = k-1$ 时, 项 $(2n-1)(k_1+k_2) - k_1 k_2$ 取最大值。

由式(6)可得 $\sum_{i=1}^{10} |F_i| = 0$, 即所有 $|F_i| = 0$ 。再由归纳假设可得

$$\begin{aligned} M_2(G) &\leq M_2(G^*) - 3n^2 + 8n + (2n-1)(k-1) - 5 \\ &\leq \frac{1}{2} [n^4 - 3n^3 - (6(k-1)-3)n^2 + (2(k-1)^2 + 14(k-1)-1)n - (k-1)^2 - 9(k-1)] \\ &\quad - 3n^2 + 8n + (2n-1)(k-1) - 5 \\ &= \frac{1}{2} [n^4 - 3n^3 - (6k-3)n^2 + (2k^2 + 14k-1)n - k^2 - 9k] \\ &= M_2(K_n^1(e_1, e_2, \dots, e_k)) \end{aligned}$$

因此, 上述等号当且仅当 $G^* \cong K_n^1(e_1, e_2, \dots, e_{k-1})$ 且 $k_1 = k-1, k_2 = 0$ 或 $k_1 = 0, k_2 = k-1$ 时成立。即当且仅

当 $G \cong K_n^1(e_1, e_2, \dots, e_k)$, 其中 $e_k = uv$, 且 uv 与 $\{e_1, e_2, \dots, e_{k-1}\}$ 共享一个公共端点。

4. 结论与展望

本文系统研究了从完全图中删除若干条边后所得图的 Zagreb 指数特性。通过建立边删除操作与顶点度变化之间的数学关系, 本研究获得了 Zagreb 指数在给定删边数条件下的极值及其对应的极值图结构。结果不仅推广了二部图情形下的结论, 也为完全图类的 Zagreb 指数研究提供了系统的理论框架。研究表明, 随着边的逐步删除, 图中顶点度分布的均衡性被打破, 从而导致 Zagreb 指数呈现出可预测的递减趋势, 这一发现为理解图的不均质性对 Zagreb 指数的影响提供了新的视角。从化学图论的角度看, 完全图可视为理想化的高连通分子模型, 其中每个顶点代表一个原子、每条边对应一个可能的原子间相互作用。Zagreb 指数在该框架下反映了分子结构的连通度与分支复杂性, 其变化趋势可关联于能量分布、化学稳定性以及分子反应性的差异。因此, 本文的研究结果对分析分子拓扑特征、预测化学性质及优化结构模型具有潜在意义。未来可推广至高阶 Zagreb 指数(例如三阶、四阶推广形式), 研究其在完全图及相关子图中的极值性质。

参考文献

- [1] Bondy, J.A. and Murty, U.S.R. (1976) Graph Theory with Applications. Macmillan.
- [2] Gutman, I. and Trinajstić, N. (1972) Graph Theory and Molecular Orbitals. Total Φ -Electron Energy of Alternant Hydrocarbons. *Chemical Physics Letters*, **17**, 535-538. [https://doi.org/10.1016/0009-2614\(72\)85099-1](https://doi.org/10.1016/0009-2614(72)85099-1)
- [3] Wit, E. and McClure, J. (2004) Statistics for Microarrays: Design, Analysis, and Inference. 5th Edition, John Wiley & Sons Ltd., 5-18.
- [4] Xu, K.X. and Hua, H.B. (2012) A Unified Approach to Extremal Multiplicative Zagreb Indices for Trees, Unicyclic, and Bicyclic Graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **68**, 241-256.
- [5] Furtula, B. and Gutman, I. (2015) A Forgotten Topological Index. *Journal of Mathematical Chemistry*, **53**, 1184-1190. <https://doi.org/10.1007/s10910-015-0480-z>
- [6] Das, K.C., Xu, K.X. and Nam, J.K. (2015) Zagreb Indices of Graphs. *Frontiers of Mathematics in China*, **10**, 567-582. <https://doi.org/10.1007/s11464-015-0431-9>
- [7] Réti, T. (2012) On the Relationships between the First and Second Zagreb Indices. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **68**, 169-188.
- [8] Xu, K. (2011) The Zagreb Indices of Graphs with a Given Clique Number. *Applied Mathematics Letters*, **24**, 1026-1030. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2011.01.034>
- [9] Deng, H.Y. (2007) A Unified Approach to the Extremal Zagreb Indices for Trees, Unicyclic Graphs and Bicyclic Graphs. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **57**, 597-616.
- [10] Xu, K., Tang, K., Liu, H. and Wang, J. (2015) The Zagreb Indices of Bipartite Graphs with More Edges. *Journal of Applied Mathematics & Informatics*, **33**, 365-377. <https://doi.org/10.14317/jami.2015.365>
- [11] Liu, B. and You, Z. (2011) A Survey on Comparing Zagreb Indices. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **65**, 581-593.
- [12] Behtoei, A., Jannesari, M. and Taeri, B. (2009) Maximum Zagreb Index, Minimum Hyper-Wiener Index and Graph Connectivity. *Applied Mathematics Letters*, **22**, 1571-1576. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.05.001>
- [13] Das, K.C. (2004) Maximizing the Sum of the Squares of the Degrees of a Graph. *Discrete Mathematics*, **285**, 57-66. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2004.04.007>
- [14] Das, K. and Gutman, C.I. (2004) Some Properties of the Second Zagreb Index. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **52**, 103-112.
- [15] Li, S. and Zhou, H. (2010) On the Maximum and Minimum Zagreb Indices of Graphs with Connectivity at Most K. *Applied Mathematics Letters*, **23**, 128-132. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2009.08.015>
- [16] Zhou, B. (2004) Zagreb Indices. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **52**, 113-118.
- [17] Zhou, B. (2007) Remarks on Zagreb Indices. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*,

57, 591-596.

- [18] Zhou, B. and Gutman, I. (2005) Further Properties of Zagreb Indices. *MATCH Communications in Mathematical and in Computer Chemistry*, **54**, 233-239.