

西格尔域上的Radon变换

吴星宇

天津师范大学数学科学学院, 天津

收稿日期: 2025年10月3日; 录用日期: 2025年11月7日; 发布日期: 2025年11月17日

摘要

本文基于Cayley变换, 将单位球面上的Radon变换推广到Siegel域, 建立了适用于全纯函数的新型Radon变换。通过变量代换, 成功将球面上的核函数映射为Siegel域上的Radon核, 证明了该变换可表示为Hardy空间到由复平面波张成的闭子空间上的正交投影, 并给出了显式的积分核函数表达式。进一步推导了该变换的级数展开形式、对偶变换表达式以及函数重构公式, 建立了完整的理论框架。

关键词

Radon变换, Siegel域, Cayley变换

Radon Transform on the Siegel Domain

Xingyu Wu

College of Mathematical Science, Tianjin Normal University, Tianjin

Received: October 3, 2025; accepted: November 7, 2025; published: November 17, 2025

Abstract

Based on the Cayley transform, this paper generalizes the Radon transform from the unit sphere to the Siegel domain, establishing a novel Radon transform tailored for holomorphic functions. Through a change of variables, the kernel function on the sphere is successfully mapped to the Radon kernel on the Siegel domain. It is proven that this transform can be represented as an orthogonal projection from the Hardy space onto a closed subspace spanned by complex plane waves, with its explicit integral kernel provided. Furthermore, we derive the series expansion of the transform, the expression of its dual transform, and the corresponding function reconstruction formula, thereby constructing a comprehensive theoretical framework.

Keywords

Radon Transform, Siegel Domain, Cayley Transform



1. 引言

本文旨在研究 Siegel 域上的 Radon 变换理论, 通过 Cayley 变换将经典 Radon 变换从球面推广到更一般的 Siegel 域结构上。自 1917 年奥地利-匈牙利数学家 J. Radon 在[1]中提出 Radon 变换理论以来, 该理论不仅在[2]中计算机断层成像(CT)技术中奠定了数学基础, 而且在信号处理和图像重建等领域发挥了重要作用。随着 Clifford 分析的发展, F. Sommen 在[3]-[6]将 Radon 变换推广到高维复平面, 建立了 Clifford-Radon 变换理论, 为函数边值表示和 Paley-Wiener-Schwartz 型定理的研究提供了新途径。

本文基于[7]中对全纯函数域上 Radon 变换的研究成果, 重点探讨 Siegel 域这一重要复几何结构上的 Radon 变换理论。我们通过引入[8]中的 Cayley 变换, 将单位球面上的核函数映射到 Siegel 域, 建立相应的 Radon 核函数表达式。研究内容包括: 首先建立 Siegel 域上的 Hardy 空间理论, 定义复平面波函数和 Radon 变换的投影算子形式; 其次推导 Radon 变换的显式积分表达式和级数展开形式; 最后证明变换的对偶性和反转公式, 建立完整的理论框架。

本文研究的 Siegel 域作为典型域的自然推广, 是复几何与多复变函数论的核心研究对象。探索 Siegel 域上的全纯函数 Radon 变换, 旨在建立积分几何方法与复分析的深刻联系。该研究不仅为理解函数空间的边界性质与插值问题提供新工具, 更在表示论和复几何的交叉领域具有潜在应用价值, 是连接分析与几何的重要桥梁。

本文的研究不仅拓展了经典 Radon 变换的理论范畴, 而且为复几何空间中的函数分析提供了新的数学工具, 在多元复变函数理论和调和分析领域具有重要的理论意义和应用价值。

2. 预备知识

设 $\mathbb{R}^n$ 为 n 维欧氏空间。现在, 我们考虑空间由 $\mathbb{R}^n$ 上的复值多项式组成的空间 $\mathcal{P}$ 。使用多重指标记号, $\mathcal{P}$ 中的任意函数都可以表示为

$$P(x) = \sum_{|\alpha|} c_\alpha x^\alpha = \sum_{|\alpha|} c_\alpha x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}, \quad c_\alpha \in \mathbb{C},$$

其中, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ 是一个长度为 $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n$ 的向量。

令 $\mathbb{E} = \sum_{i=1}^n x_i \partial_{x_i}$ 表示为作用在空间 $\mathcal{P}$ 上的欧拉算子。如果多项式 $P(x)$ 是欧拉算子的对应于特征值 k 的特征函数, 那么多项式 $P(x)$ 被称为 k 次齐次的。

将本文常用的符号记作以下记号。若 $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$, 其中 $z_j = x_j + ix_{n+j}$ ($j=1, \dots, n$), 并且给出它的复共轭 $\bar{z}_j = x_j - ix_{n+j}$ 。然后令 $z' = (z_2, z_3, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n-1}$, 因此 $z = (z_1, z')$ 。除此之外, 对于 $z, u \in \mathbb{C}^n$, 我们有

$$\langle z, u \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \bar{u}_k, \quad |z| = \langle z, z \rangle^{1/2}.$$

复导数经常被定义为

$$\partial_{z_j} := \frac{1}{2}(\partial_{x_j} - i\partial_{x_{n+j}}) \quad \partial_{\bar{z}_j} := \frac{1}{2}(\partial_{x_j} + i\partial_{x_{n+j}}).$$

现在, 我们将欧拉算子 $\mathbb{E}$ 分解为两个复欧拉算子,

$$\mathbb{E}_z := \sum_{j=1}^n z_j \partial_{z_j} \quad \mathbb{E}_{\bar{z}} := \sum_{j=1}^n \bar{z}_j \partial_{\bar{z}_j},$$

很容易得出 $\mathbb{E} = \mathbb{E}_z + \mathbb{E}_{\bar{z}}$ 。这使我们能够细化 k 次齐次多项式的概念。更精确地说, k 次齐次多项式的空间定义为

$$\mathcal{P}_k := \{P(z, \bar{z}) : \mathbb{E}_z P(z, \bar{z}) = kP(z, \bar{z})\}.$$

为简便起见, 当不会引起混淆时, 我们将使用 $P(z)$ 而不是 $P(z, \bar{z})$ 来表示同时依赖于 z 和 $\bar{z}$ 的函数。文中 Fischer 内积定义为

$$\langle P(z), Q(z) \rangle_{\partial} := \left[\overline{P(\partial)} Q(z) \right]_{z=0},$$

其中 $P(\partial)$ 表示将 $P(z)$ 中的每个 z_j 替换为 $\partial_{\bar{z}_j}$ 以及每个 $\bar{z}_j$ 替换为 ∂_{z_j} 。

令 $\Delta_z := \sum_{j=1}^n \partial_{\bar{z}_j} \partial_{z_j}$ 。 k 次球面调和函数定义为满足以下条件的次数相同的齐次调和多项式。

$$\mathcal{H}_k = \{H(z) : H(z) \in \mathcal{P}_k, \Delta_z H(z) = 0\}$$

其中

$$\dim \mathcal{H}_k = \frac{n+k+1}{n-1} \binom{n-2}{n-2} \binom{k+n-2}{n-2}.$$

$\mathcal{H}_k$ 上的球面 L^2 内积由下式给出

$$\langle P(z), Q(z) \rangle_s := \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\mathbb{S}^{2n-1}} \overline{P(z)} Q(z) d\sigma(z).$$

本文研究的主要对象是单位球和 Siegel 域。定义如下:

$$B_n = \{z \in \mathbb{C}^n, |z| < 1\},$$

$$\Omega_n = \{u = (u_1, u') \in \mathbb{C}^n, \operatorname{Im} u_1 > |u'|^2\}.$$

现在我们考虑下面的 Cayley 变换

$$\varphi : (z_1, \dots, z_n) \rightarrow \left(i \frac{1+z_1}{1-z_1}, i \frac{z_2}{1-z_1}, \dots, i \frac{z_n}{1-z_1} \right) \quad (z \in B_n),$$

$$\varphi^{-1} : (u_1, \dots, u_n) \rightarrow \left(\frac{u_1 - i}{u_1 + i}, \frac{2u_2}{u_1 + i}, \dots, \frac{2u_n}{u_1 + i} \right) \quad (u \in \Omega_n),$$

很常见的我们可以知道, $\varphi : B_n \rightarrow \Omega_n$ 和 $\varphi^{-1} : \Omega_n \rightarrow B_n$ 是双全纯同构的。令 $J_{\varphi}(z)$ 和 $J_{\varphi}^{-1}(u)$ 分别是 φ 和 φ^{-1} 的复雅可比行列式。

引理 1 若 $z \in B_n, u \in \Omega_n$, 则

$$J_{\varphi}(z) = \frac{2 \cdot i^n}{(1-z_1)^{n+1}}, \quad J_{\varphi}^{-1}(u) = \frac{2^n \cdot i}{(u_1 + i)^{n+1}} \quad (2.1)$$

引理 2 若 $u, v \in \Omega_n$, 则

$$\begin{aligned} 1 - \langle \varphi^{-1}u, \varphi^{-1}v \rangle &= \frac{2i(\bar{u}_1 - v_1) - 4\langle u', v' \rangle}{(u_1 + i)(\bar{v}_1 - i)} \\ 1 - |\varphi^{-1}v|^2 &= \frac{4 \cdot (\operatorname{Im} v_1 - |v'|^2)}{(v_1 + i) \cdot (\bar{v}_1 - i)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

3. Radon 变换

基于第二节介绍的 Siegel 域及其相关函数空间, 本节将正式展开对 Radon 变换的讨论。首先, 我们将借鉴经典理论, 在 Siegel 域上定义 Hardy 空间与相应的平面波函数。随后, 核心工作在于通过 Cayley 变换将单位球上的已知结果精确地映射至 Siegel 域, 从而给出其 Radon 变换的积分表达式与核函数, 并证明其作为正交投影的核心性质。

定义 1 Siegel 域上的 $L_\alpha^2(\Omega_n)$ 空间, 由所有满足条件

$$\int_{\Omega_n} |f(z)|^2 \cdot [\operatorname{Im} z_1 - |z'|^2]^\alpha d\sigma(z) < +\infty$$

的全纯函数构成, 其中, $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ 。

定义 2 Siegel 域上的 $H_\alpha^2(\Omega_n)$ 定义如下

$$H_\alpha^2(\Omega_n) = H(\Omega_n) \cap L_\alpha^2(\Omega_n).$$

利用 Cayley 变换将文献[7]中的平面波进行映射, 得到 Siegel 域上的平面波的定义 3。

定义 3 令 $z \in \Omega_n, (t, s) \in St(\mathbb{C}^n) = U(n)/U(n-2)$, 且

$$f_{t,s}^{(k)}(z) = \left[\frac{(z_1 - i)(\bar{s}_1 + \bar{t}_1) + \langle z', \bar{s}' + \bar{t}' \rangle}{z_1 + i} \right]^k.$$

定义 4 令 $x \in \Omega_n$, Siegel 域上的 Hardy 空间 $H_\alpha^2(\Omega_n)$ 具有内积

$$\langle P(x), Q(x) \rangle_{\Omega_n} := \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{\overline{P(x)}Q(x)}{(x_1 + i)^{2n+2}} d\sigma(x).$$

经过 Cayley 变换后, Siegel 域上的内积与 $\mathbb{S}^{2n-1}$ 上的内积相关, 而 $\mathbb{S}^{2n-1}$ 上的内积在数值关系上和 Fischer 内积相关。

定义 5 对于任意给定的 $t \in \mathbb{S}^{2n-1}$ 和 $s \in \mathbb{S}^{2n-3}$, 它们关于内积 $\langle z, u \rangle = \sum_{k=1}^n z_k \cdot \overline{u_k}$ 正交, 所有复平面波函数的有限线性组合构成了

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{(z_1 - i)(\bar{s}_1 + \bar{t}_1) + 2\langle z', \bar{s}' + \bar{t}' \rangle}{z_1 + i} \right]^k \alpha_k, \quad \alpha_k \in \mathbb{C},$$

$H_\alpha^2(\Omega_n)$ 的一个闭子空间, 记作 $H_{t,s}^2(\Omega_n)$ 。

Hardy 空间 $H_\alpha^2(\Omega_n)$ 上的 Radon 变换定义为到由平面波张成的子空间上的正交投影。现在, 我们能够定义 Siegel 域上的全纯函数的 Radon 变换。

定义 6 Siegel 域上的 Radon 变换定义为

$$\mathcal{R}_{t,s} : H_\alpha^2(\Omega_n) \rightarrow H_{t,s}^2(\Omega_n).$$

定理 1 对于全纯函数空间 $H_{t,s}^2(\Omega_n)$, Radon 变换的核函数由下式给出

$$K_{t,s}(z,u) = \left[\frac{2}{\frac{1}{2}(z_1+i)(\bar{u}-i) - \left(\frac{1}{2}(z_1-i)(\overline{s_1+t_1}) + \langle z', s' + t' \rangle \right) \left(\frac{1}{2}(\bar{u}+i)(s_1+t_1) + \langle \bar{u}, \overline{s' + t'} \rangle \right)} \right]^n.$$

证明 令 $z = \varphi^{-1}x, u = \varphi^{-1}y \in B_n, g \in H(B_n)$, 同时找到 $x, y \in \Omega_n$, 根据单位球上的全纯函数的 Radon 变换, 我们可以得出

$$g(z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{B_n} K_{t,s}(z,u) g(u) d\sigma(u) \quad (3.1)$$

其中, $\omega_{2n-1} = 2\pi^n / \Gamma(n)$, $K_{t,s}(z,u) = \left[\frac{2}{2 - \langle z, s+t \rangle \langle \bar{u}, \overline{s+t} \rangle} \right]^n$ 作为全纯函数 Radon 变换的 Radon 核函数。

让我们考虑下面的函数,

$$g(\zeta) = \frac{f(\varphi(\zeta))}{(1-\zeta_1)^n} \quad (3.2)$$

其中, $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_n) \in B_n$ 。

将(3.2)代入(3.1)当中, 得到:

$$\frac{f(\varphi(z))}{(1-z_1)^n} = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{B_n} \frac{f(\varphi(u)) \cdot 2^n}{(1-u_1)^n (2 - \langle z, s+t \rangle \langle \bar{u}, \overline{s+t} \rangle)^n} d\sigma(u). \quad (3.3)$$

接下来, 重申 $z = \varphi^{-1}x, u = \varphi^{-1}y \in B_n$, 并考虑到

$$\frac{1}{(1-z_1)^n} = \frac{(x_1+i)^n}{(2i)^n}, \quad \frac{1}{(1-u_1)^n} = \frac{(y_1+i)^n}{(2i)^n}, \quad (3.4)$$

根据(3.3)和(3.4), 我们得到下列等式成立:

$$f(x)(x_1+i)^n = \frac{2^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{f(y) \cdot (y_1+i)^n \cdot |J_\varphi^{-1}(y)|^2}{\left(2 - \langle \varphi^{-1}x, s+t \rangle \langle \overline{\varphi^{-1}y}, \overline{s+t} \rangle \right)^n} d\sigma(y),$$

由(2.2), 根据 Cayley 变换, 将 $\varphi^{-1}x, \varphi^{-1}y$ 代入推出

$$f(x)(x_1+i)^n = \frac{2^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{f(y) \cdot (y_1+i)^n \cdot |J_\varphi^{-1}(y)|^2}{\left[2 - \left(\frac{x_1-i}{x_1+i}(\overline{s_1+t_1}) + \frac{2\langle x', s' + t' \rangle}{x_1+i} \right) \left(\frac{\bar{y}_1+i}{y_1-i}(s_1+t_1) + \frac{2\langle \bar{y}', s' + t' \rangle}{y_1-i} \right) \right]^n} d\sigma(y),$$

将(2.1)中的雅可比行列式代入得

$$\begin{aligned} & f(x)(x_1+i)^n \\ &= \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{f(y) \cdot 2^{3n} \cdot (y_1+i)^n}{(y_1+i)^{2n+2} \left[2 - \left(\frac{x_1-i}{x_1+i}(\overline{s_1+t_1}) + \frac{2\langle x', s' + t' \rangle}{x_1+i} \right) \left(\frac{\bar{y}_1+i}{y_1-i}(s_1+t_1) + \frac{2\langle \bar{y}', s' + t' \rangle}{y_1-i} \right) \right]^n} d\sigma(y), \end{aligned}$$

再经过简化以上函数，我们得到

$$f(x) = \frac{|y_1 + i|^n}{\omega_{2n-1}(y_1 + i)^{2n+2}} \cdot \int_{\Omega_n} \frac{f(y) \cdot 2^n}{\left[\frac{1}{2}(x_1 + i)(\overline{y_1} - i) - \left(\frac{1}{2}(x_1 - i)(\overline{s_1 + t_1}) + \langle x', s' + t' \rangle \right) \left(\frac{1}{2}(\overline{y_1} + i)(s_1 + t_1) + \langle \overline{y'_1}, \overline{s' + t'} \rangle \right) \right]^n} d\sigma(y),$$

证明完毕。

定理 2 级数

$$K_{t,s}(z, u) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} \cdot \frac{\left[(z_1 - i)(s_1 + t_1) + 2\langle z', s' + t' \rangle \right]^k \left[(\overline{u_1} + i)(\overline{s_1 + t_1}) + 2\langle \overline{u'}, \overline{s' + t'} \rangle \right]^k}{(z_1 + i)^k (\overline{u_1} - i)^k}$$

是 $H_{t,s}^2(\Omega_n)$ 的一个 Radon 核，其中 $\gamma_k = 2^k k! / (n)_k$ ， $(n)_k = \Gamma(n+k)/\Gamma(n)$ 。

证明 令 $f_{t,s}^{(a)}(z)$ 是 $H_{t,s}^2(\Omega_n)$ 的一个元素，那么我们有

$$\begin{aligned} \left\langle K_{t,s}(z, u), f_{t,s}^{(a)}(z) \right\rangle_{\Omega_n} &= \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{\overline{K_{t,s}(z, u)} f_{t,s}^{(a)}(z)}{(z_1 + i)^{2n+2}} d\sigma(z) \\ &= \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{1}{(z_1 + i)^{2n+2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} f_{t,s}^{(k)}(a) \overline{f_{t,s}^{(k)}(z)} f_{t,s}^{(a)}(z) d\sigma(z) \\ &= \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} f_{t,s}^{(k)}(u) \int_{\Omega_n} \frac{1}{(z_1 + i)^{2n+2}} \overline{f_{t,s}^{(k)}(z)} f_{t,s}^{(a)}(z) d\sigma(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k} f_{t,s}^{(k)}(u) \left\langle f_{t,s}^{(k)}(z), f_{t,s}^{(a)}(z) \right\rangle_{\Omega_n} \end{aligned}$$

使用定理 1，仅剩下 $p = q$ 的情况，并且

$$\left\langle f_{t,s}^{(k)}(z), f_{t,s}^{(a)}(z) \right\rangle_{\Omega_n} = \gamma_k$$

在这种情况下，

$$\left\langle K_{t,s}(z, u), f_{t,s}^{(a)}(z) \right\rangle_{\Omega_n} = f_{t,s}^{(a)}(u).$$

证明完毕。

定理 3 Siegel 域上的全纯函数的 Radon 变换可以等价地写为以下的积分变换

$$\mathcal{R}_{t,s}[f](z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} K_{t,s}(z, u) f(u) \frac{|u_1 + i|^n}{(u_1 + i)^n} d\sigma(u)$$

其中， $z \in \Omega_n$ 。

证明 令 P 表示变换

$$P: f(u) \rightarrow \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{|u_1 + i|^n}{(u_1 + i)^n} K_{t,s}(z, u) f(u) d\sigma(u).$$

我们证明 P 是一个从 $H_{\alpha}^2(\Omega_n)$ 到 $H_{t,s}^2(\Omega_n)$ 的正交算子。对于任何 $f(u) \in H_{\alpha}^2(\Omega_n)$ ，我们将 $P[f]$ 写作

$$P[f](z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{|u_1 + i|^n}{(u_1 + i)^n} K_{t,s}(z, u) f(u) d\sigma(u) = \langle K_{t,s}(u, z), f(u) \rangle_{\Omega_n}.$$

令 $f_{t,s}^k(z) = \left[\frac{(z_1 - i)(s_1 + t_1) + 2\langle z', s' + t' \rangle}{z_1 + i} \right]^k$ 。通过定理 2，我们得到

$$P[f](z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^n \cdot \langle f_{t,s}^k(u), f(u) \rangle_{\Omega_n}}{\gamma_k(u_1 + i)^{2n+2}} f_{t,s}^k(z),$$

这显然是 $H_{t,s}^2(\Omega_n)$ 中的一个元素。同时，

$$\begin{aligned} \langle P[f], g \rangle_{\Omega_n} &= \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{\overline{P[f](z)} g(z)}{(z_1 + i)^{2n+2}} d\sigma(z) \\ &= \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{1}{(z_1 + i)^{2n+2}} \int_{\Omega_n} \frac{1}{(z_1 + i)^{2n+2}} \cdot \overline{K_{t,s}(z, u) f(u) g(z) d\sigma(z)} \\ &= \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{1}{(z_1 + i)^{2n+2}} \int_{\Omega_n} \frac{1}{(z_1 + i)^{2n+2}} \cdot K_{t,s}(u, z) \overline{f(u)} d\sigma(u) g(z) d\sigma(z) \\ &= \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{1}{(z_1 + i)^{2n+2}} \int_{\Omega_n} \frac{1}{(z_1 + i)^{2n+2}} \cdot K_{t,s}(u, z) g(z) d\sigma(z) \overline{f(u)} d\sigma(u) \\ &= \frac{4^n}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \frac{1}{(z_1 + i)^{2n+2}} \cdot \overline{f(u)} P[g](u) d\sigma(u) \\ &= \langle f, P[g] \rangle_{\Omega_n}. \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} P^2[f](z) &= \langle K_{t,s}(u, z), P[f](u) \rangle_{\Omega_n} \\ &= \langle P[K_{t,s}(u, z)], f(u) \rangle_{\Omega_n} \\ &= \langle \langle K_{t,s}(p, u), K_{t,s}(p, z) \rangle_{\Omega_n}, f(u) \rangle_{\Omega_n} \\ &= \langle \langle K_{t,s}(p, u), K_{t,s}(p, z) \rangle_{\Omega_n}, f(u) \rangle_{\Omega_n} \\ &= P[f](z), \end{aligned}$$

这证明了算子 P 是幂等的。用 I 表示恒等算子，我们得到

$$\begin{aligned} \langle P[f], (I - P)[g] \rangle_{\Omega_n} &= \langle P[f], I[g] \rangle_{\Omega_n} - \langle P[f], P[g] \rangle_{\Omega_n} \\ &= \langle P[f], g \rangle_{\Omega_n} - \langle P^2[f], g \rangle_{\Omega_n} \\ &= 0, \end{aligned}$$

这表示了其是正交直和。

$$H_{\alpha}^2(\Omega_n) = P[H_{\alpha}^2(\Omega_n)] + (I - P)[H_{\alpha}^2(\Omega_n)].$$

因此， P 是一个正交投影算子 $H_{\alpha}^2(\Omega_n) \rightarrow H_{t,s}^2(\Omega_n)$ 。

4. 对偶变换

第三节构建了从函数空间到其子空间的投影, 本节则致力于研究其逆向过程。通过引入[9]中 Stiefel 流形上的积分, 我们将定义 Radon 变换的对偶变换, 并借助齐次调和函数的再生核理论, 证明该对偶变换能够有效地重构原始函数, 从而为下一节的逆变换做好铺垫。

定义 7 令元组 (t, s) 位于 Stiefel 流形 $St^{(2)}(\mathbb{C}^n)$ 。则对于任何 $F(z, t, s) \in H_{t,s}^2(\Omega_n)$, Radon 变换的对偶变换定义为

$$\bar{R}[F](z) := \frac{1}{\omega_{2n-1}\omega_{2n-3}} \int_{St^{(2)}} F(z, t, s) d\sigma(s) d\sigma(t).$$

定理 4 [10] p 次齐次复调和函数空间的再生核函数由下式给出

$$K_k(z, u) = \frac{\lambda_k \dim \mathcal{H}_k}{\omega_{2n-1}\omega_{2n-3}} \int_{St^{(2)}} \langle z, s+t \rangle^k \langle \bar{u}, t+s \rangle^k$$

其中, $\lambda_k = \frac{(k+n-1)!}{2^k(n-1)!}$ 且 $\dim \mathcal{H}_k = \frac{n+k-1}{n-1} \binom{n-2}{n-2} \binom{k+n-2}{n-2}$ 。

定理 5 对于任何 $f(z) = \sum_k f_k(z) \in H_\alpha^2(\Omega_n)$, Siegel 域中全纯函数的复 Radon 变换的对偶变换由下式给出

$$\tilde{R}[R_{t,s}[f]](z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{4^n \Gamma(n) \Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k)} f_k(z)$$

证明 由于 $H_{t,s}^2(\Omega_n)$ 是所有复平面波的有限线性组合的完备空间, 因此, 对每个齐次分量 $f_k(z)$ 计算就可以得到结果。根据定义 7, 我们可以得到

$$\tilde{R}[R_{t,s}[f_k]](z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}\omega_{2n-3}} \int_{St^{(2)}} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} K_{t,s} f_k(u) d\sigma(u) d\sigma(s) d\sigma(t).$$

根据 Fubini 定理, 我们有

$$\tilde{R}[R_{t,s}[f_k]](z) = \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \left(\frac{1}{\omega_{2n-1}} \frac{1}{\omega_{2n-3}} \int_{St^{(2)}} K_{t,s}(z, u) d\sigma(s) d\sigma(t) \right) f_k(u) d\sigma(u).$$

Radon 核函数可以写成级数:

$$K_{t,s}(z, u) = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{4^n}{\gamma_k} \left[\frac{(z_1 - i)(\overline{s_1 + t_1}) + 2\langle z', s' + t' \rangle}{z_1 + i} \right]^k \left[\frac{(\bar{u} + i)(s_1 + t_1) + 2\langle \bar{u}, s' + t' \rangle}{\bar{u} - i} \right]^k,$$

其中, $\gamma_k = 2^k k! / (n)_k$ 且 $(n)_k = \Gamma(n+k)/\Gamma(n)$ 。

引入 Radon 核的这种形式, 我们有

$$\begin{aligned} \tilde{R}[R_{t,s}[f_k]](z) &= \frac{1}{\omega_{2n-1}\omega_{2n-3}} \frac{4^n}{\gamma_k} \frac{1}{\omega_{2n-1}} \int_{\Omega_n} \left(\int_{St^{(2)}} \left[\frac{(z_1 - i)(\overline{s_1 + t_1}) + 2\langle z', s' + t' \rangle}{z_1 + i} \right]^k \right. \\ &\quad \times \left. \left[\frac{(\bar{u} + i)(s_1 + t_1) + 2\langle \bar{u}, s' + t' \rangle}{\bar{u} - i} \right]^k d\sigma(s) d\sigma(t) \right) f_k(u) d\sigma(u). \end{aligned}$$

定理 4 确实意味着

$$\tilde{R}[R_{t,s}[f_k]](z) = \frac{4^n}{\gamma_k \lambda_k \dim \mathcal{H}_k} \int_{\Omega_n} K_k(z, u) f_k(u) d\sigma(u).$$

由于 $K_k(z)$ 是 $\mathcal{H}_k$ 的再生核, 且 k 为 0. 可以得出

$$\tilde{R}[R_{t,s}[f]](z) = \frac{4^n \Gamma(n) \Gamma(k+1)}{\Gamma(n+k)} \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z),$$

证明完毕。

5. 逆变换

本节将综合第三、四节的成果, 最终解决 Siegel 域上 Radon 变换的核心问题——如何从变换后的函数完美地恢复原函数。我们将证明一个普遍的逆变换, 该变换通过欧拉算子与对偶变换的复合运算来实现精确重构。该变换的建立不仅从理论上验证了变换的完备性, 也为其在各类应用中的可行性提供了数学保障。

定理 6 对于任何 $f(x) \in H_{\alpha}^2(\Omega_n)$ 且 $n \geq 2$, 有

$$f(z) = (T \circ \tilde{R} \circ R_{t,s})[f](z),$$

$$\text{其中, } T[f](z) := \frac{1}{\Gamma(n)} (\mathbb{E}_z + 1)(\mathbb{E}_z + 2) \cdots (\mathbb{E}_z + n - 1) f(z).$$

证明 对于每个 f 的齐次分量 f_k , 结合事实 $\mathbb{E}_z f_k = k f_k$, 我们有

$$\begin{aligned} & (\mathbb{E}_z + 1)(\mathbb{E}_z + 2) \cdots (\mathbb{E}_z + n - 1) f_k \\ &= (\mathbb{E}_z + 2) \cdots (\mathbb{E}_z + n - 1)(k + 1) f_k \\ &= (\mathbb{E}_z + 3) \cdots (\mathbb{E}_z + n - 1)(k + 1)(k + 2) f_k \\ &= \cdots \\ &= (k + 1)(k + 2) \cdots (k + n - 1) f_k \\ &= \frac{\Gamma(k + n)}{\Gamma(k + 1)} f_k. \end{aligned}$$

由此可得

$$T[f_k](z) = \frac{\Gamma(k + n)}{\Gamma(n) \Gamma(k + 1)} f_k(z).$$

结合文中给出的对偶变换, 我们得到

$$\begin{aligned} (T \circ \tilde{R} \circ R_{t,s})[f](z) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\gamma_k \lambda_k \dim \mathcal{H}_k} T[f_k](z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n) \Gamma(k + 1)}{\Gamma(n + k)} \cdot \frac{\Gamma(k + n)}{\Gamma(n) \Gamma(k + 1)} f_k(z) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z) \\ &= f(z), \end{aligned}$$

证明完毕。

参考文献

- [1] Radon, J. (1917) Über die bestimmung von funktionen durch ihre integralwerte langs gewisser mannigfaltigkeiten. Berichte über die Verhandlungen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. *Journal of Mathematical Physics*, **69**, 262-277.
- [2] Dean, S.R. (1983) *The Radon Transform and Some of Its Applications*. Wiley.
- [3] De Bie, H., Sommen, F. and Wutzig, M. (2016) Reproducing Kernels for Polynomial Null-Solutions of Dirac Operators. *Constructive Approximation*, **44**, 339-383. <https://doi.org/10.1007/s00365-016-9326-6>
- [4] Sommen, F. (1987) An Extension of the Radon Transform to Clifford Analysis. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, **8**, 243-266. <https://doi.org/10.1080/17476938708814236>
- [5] Sommen, F. (1989) Radon and X-Ray Transforms in Clifford Analysis. *Complex Variables, Theory and Application: An International Journal*, **11**, 49-70. <https://doi.org/10.1080/17476938908814323>
- [6] Sommen, F. (1992) Clifford Analysis and Integral Geometry. In: Micali, A., Boudet, R. and Helmstetter, J., Eds., *Clifford Algebras and Their Applications in Mathematical Physics*, Springer, 293-311. https://doi.org/10.1007/978-94-015-8090-8_30
- [7] Hu, R. and Pan, L. (2024) Radon-Type Transforms for Holomorphic and Hermitian Monogenic Functions.
- [8] Djrbashian, M.M. and Karapetyan, A.H. (1993) Integral Representations for Some Classes of Functions Holomorphic in a Siegel Domain. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **179**, 91-109. <https://doi.org/10.1006/jmaa.1993.1337>
- [9] Delanghe, R., Sommen, F. and Soucek, V. (1992) *Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions*, 53 of Mathematics and Its Applications. Kluwer Academic Publishers Group.
- [10] De Bie, H., Sommen, F. and Wutzig, M. (2017) Plane Wave Formulas for Spherical, Complex and Symplectic Harmonics. *Journal of Approximation Theory*, **222**, 110-131. <https://doi.org/10.1016/j.jat.2017.07.001>