

细菌降解宿主组织模型波前解的全局稳定性

张 敏, 张国宝*

西北师范大学数学与统计学院, 甘肃 兰州

收稿日期: 2025年10月13日; 录用日期: 2025年11月17日; 发布日期: 2025年12月11日

摘 要

对于细菌降解宿主组织模型, Yang-Zhang-Tian已研究了波前解的全局稳定性。然而, 其稳定性结论需要较为严格的参数条件, 导致参数取值范围较小。本文通过采用傅里叶变换以及具有适当加权函数的加权能量方法, 证明了在其他参数条件下波前解依然稳定, 扩大了参数的可取范围。

关键词

宿主组织降解, 细菌感染, 波前解, 全局稳定性

Global Stability of Traveling Wavefronts for a Model Describing Host Tissue Degradation by Bacteria

Ming Zhang, Guobao Zhang*

College of Mathematics and Statistics, Northwest Normal University, Lanzhou Gansu

Received: October 13, 2025; accepted: November 17, 2025; published: December 11, 2025

Abstract

For a model describing bacterial degradation of host tissues by bacteria, the global stability of the traveling wavefronts were proved by Yang-Zhang-Tian. However, the stability result needs more stronger conditions on the parameters, which may result in a small range of parameters. In this paper, by using Fourier's transform and the weighted energy method with a suitably selected weighted function, we prove that the wavefronts remain stable under other conditions, which can increase the range of parameters.

*通讯作者。

文章引用: 张敏, 张国宝. 细菌降解宿主组织模型波前解的全局稳定性[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 24-33.

DOI: 10.12677/pm.2025.1512290

Keywords

Host Tissue Degradation, Bacterial Infection, Traveling Wavefronts, Global Stability

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

本文研究如下的细菌降解宿主组织模型

$$\begin{cases} u_t = \Delta u - u + \omega - \gamma k u (1 - \omega), \\ \omega_t = k u (1 - \omega), \end{cases} \quad (1.1)$$

初值为 $u(x, 0) = u_0(x)$, $\omega(x, 0) = \omega_0(x)$, 其中 $\gamma, k > 0$ 为常数, $k > 0$ 表示组织降解速率, 通常很大, 是关注的关键参数. 变量 u 表示由细菌产生的降解性酶的浓度, 而 $1 - \omega$ 表示健康组织的体积分数. 该模型由一个反应扩散方程与一个常微分方程组成. King 等人[1]在首次研究了这一模型, 刻画了胞外细菌病原体对宿主组织的降解过程. 细菌对组织的侵袭表现为以近似常速传播的行波. Hilhorst, King 与 Röger [2]证明了(1.1)的解的存在唯一性, 并建立了当降解率参数 $k \rightarrow \infty$ 时, 原系统的解收敛到一个类似 Stefan 问题的唯一极限解.

模型(1.1)对应的齐次(空间均匀)系统为

$$\begin{cases} u' = -u + \omega - \gamma k u (1 - \omega), \\ \omega' = k u (1 - \omega). \end{cases} \quad (1.2)$$

通过简单计算可知, 系统(1.2)有两个平衡点: $(0, 0)$ 和 $(1, 1)$. 此外, 容易得到 $(0, 0)$ 是不稳定的.

模型(1.1)的行波解是形如 $(u(x, t), \omega(x, t)) = (\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi))$ 的连接 $(0, 0)$ 与 $(1, 1)$ 的特殊平移不变解, 其中 $\xi = x + ct$. 如果行波解是单调的, 则称其为波前解. 将 (φ_1, φ_2) 代入(1.1), 得到如下的波形方程

$$\begin{cases} c\varphi_1' = \varphi_1'' - \varphi_1 + \varphi_2 - \gamma k \varphi_1 (1 - \varphi_2), \\ c\varphi_2' = k \varphi_1 (1 - \varphi_2) \end{cases} \quad (1.3)$$

并满足边界条件:

$$\lim_{\xi \rightarrow -\infty} (\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)) = (0, 0), \quad \lim_{\xi \rightarrow +\infty} (\varphi_1(\xi), \varphi_2(\xi)) = (1, 1).$$

Hilhorst, King 与 Röger [3]证明了波前解的存在性. 他们指出当降解速率足够大时, 最小传播速度与极限问题的最小传播速度一致. Zhang 等人[4]通过构造恰当的上下解, 给出了该系统最小波速的线性选择条件. 彭和易[5]利用比较原理和渐近分析的方法建立了波前解的局部渐近行为. He, He 与 Pan [6]基于适当加权函数空间中的谱方法, 证明了波前解的局部稳定性. 最近, Yang, Zhang 与 Tian [7]在条件(H)下(即 $\gamma < 1$ 且 $\frac{1}{2-\gamma} < k < \frac{1}{\gamma}$)利用加权能量方法与比较原理, 建立了大波速情形下波前解的全局指数稳定性. 需要指出的是, 假设条件 $k < \frac{1}{\gamma}$ 比较严格. 受文献[8]-[10]的启发, 本文采用傅里叶变换与具有适当加权函数的加权能量方法, 证明在第2节所给的假设条件(A)下, 波前解依然稳定, 从而扩大了参数 k 的取值范围.

2. 预备知识和主要结果

为证明行波解的稳定性, 我们需要作如下假设:

$$(A) \quad \gamma < 1 \text{ 且 } \frac{1}{1-\gamma} < k < \frac{2}{1-\gamma}.$$

与文献[7]中的假设(H)相比较, 我们发现当 $\gamma \geq 1/2$ 时, 条件(A)可以扩大参数 k 的取值范围。

对于单调系统(1.1), 显然成立如下的比较原理。

引理 2.1 (比较原理) 设 $(u^-(x, t), \omega^-(x, t))$ 与 $(u^+(x, t), \omega^+(x, t))$ 分别为方程(1.1)在初值 $(u_0^-(x), \omega_0^-(x))$ 与 $(u_0^+(x), \omega_0^+(x))$ 下的解。若对一切 $x \in R$ 都有

$$(0, 0) \leq (u_0^-(x), \omega_0^-(x)) \leq (u_0^+(x), \omega_0^+(x)) \leq (1, 1),$$

则对一切 $x \in R, t > 0$ 都有

$$(0, 0) \leq (u^-(x, t), \omega^-(x, t)) \leq (u^+(x, t), \omega^+(x, t)) \leq (1, 1).$$

令 $C > 0$ 表示通用常数, $C_i > 0, (i = 1, 2, \dots)$ 表示特定常数。 $L^\infty(R)$ 是 R 上的本性有界函数空间, 其范数定义为 $\|f\|_{L^\infty} = \sup_{x \in R} |f(x)|$ 。 $L_w^\infty(R)$ 为加权 $L^\infty(R)$ 空间, 其权函数为 $\omega(x) > 0$, 范数定义为

$$\|f\|_{L_w^\infty} = \sup_{x \in R} |\omega(x)f(x)|. \quad l^2 \text{ 为平方可和函数空间, 其范数定义为 } \|z\|_2 = \left(\sum_{i=1}^N |z_i|^2\right)^{1/2}, \text{ 其中 } z = (z_1, z_2, \dots, z_N).$$

取 $c \geq c_{\min}$, 设 $(\varphi_1(x+ct), \varphi_2(x+ct))$ 是系统(1.1)的一个波前解, 其中波速为 c , 并连接 $(0, 0)$ 与 $(1, 1)$ 。我们定义如下权函数:

$$w(x) = \begin{cases} e^{-\lambda^*(x-\zeta_0)}, & x \leq \zeta_0, \\ 1, & x > \zeta_0, \end{cases}$$

其中 ζ_0 为充分大的常数, 且 $\lambda^* = \sqrt{2 + (\gamma - 1)k}$ 。由于波的稳定性问题的困难在于不稳定平衡点 $(0, 0)$, 因此, 在利用能量方法的证明中我们引入指数权函数来克服这个困难。这里 λ^* 的选取是技术性的。

定理 2.2 (稳定性) 假设条件(A)成立。任取系统(1.1)的一个连接 $(0, 0)$ 与 $(1, 1)$ 的波前解

$$(\varphi_1(x+ct), \varphi_2(x+ct)), \text{ 其波速满足 } c > c^* := \max \left\{ c_{\min}, \frac{1 + (\gamma + 1)k}{2\sqrt{2 + (\gamma - 1)k}} \right\}. \text{ 若初值 } (u_0(x), \omega_0(x)) \text{ 满足}$$

$$(0, 0) \leq (u_0(x), \omega_0(x)) \leq (1, 1), \quad x \in R,$$

且扰动满足

$$(u_0 - \varphi_1, \omega_0 - \varphi_2) \in L_w^\infty(R) \times L_w^\infty(R),$$

则(1.1)的具有初值 $u(x, 0) = u_0(x), w(x, 0) = \omega_0(x)$ 的解 $(u(x, t), v(x, t))$ 整体存在, 满足

$$(0, 0) \leq (u(x, t), \omega(x, t)) \leq (1, 1), \quad \forall x \in R, t > 0,$$

且按时间指数收敛到该波前解 $(\varphi_1(x+ct), \varphi_2(x+ct))$, 即存在常数 $\sigma > 0$ 与 $C > 0$, 使得

$$\sup_{x \in R} |u(x, t) - \varphi_1(x+ct)| \leq Ce^{-\sigma t},$$

$$\sup_{x \in R} |\omega(x, t) - \varphi_2(x+ct)| \leq Ce^{-\sigma t}$$

注记: 文献[7]中的 c^* 为传播速度, 与定理 2.2 中的 c^* 不同。本文的 c^* 与文献[7]定理 2.6 中的

$\max\{c_{\min}, \tilde{c}\}$ 角色一致。在参数 γ 和 k 的不同取值下, 本文的 c^* 可能会比文献[7]定理 2.6 中的 $\max\{c_{\min}, \tilde{c}\}$ 小, 也可能会大。

3. 行波解的稳定性

在本节中, 我们致力于证明(1.1)的行波解的稳定性, 即定理 2.2。我们首先考虑如下线性(含时滞的)微分系统:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} z(t) = Az(t), & t > 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中 $A \in C^{N \times N}$, 显然, 系统(3.1)的解可表示为

$$z(t) = z_0 e^{At},$$

$$\text{这里 } e^{At} := \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(At)^m}{m!}.$$

需要说明的是, 在文献[9] [11]中, 作者分别在 $N=1$ 与 $N \geq 2$ 的情况下研究了带时滞的系统(3.1)。我们定义

$$\mu_1(A) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{|I + \theta A| - 1}{\theta} = \max_{1 \leq j \leq N} \left[\operatorname{Re}(a_{jj}) + \sum_{j \neq i}^N |a_{ij}| \right]$$

以及

$$\mu_{\infty}(A) = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{|I + \theta A|_{\infty} - 1}{\theta} = \max_{1 \leq i \leq N} \left[\operatorname{Re}(a_{ii}) + \sum_{j \neq i}^N |a_{ij}| \right].$$

这些定义见([9], 定理 3.1)的证明。

引理 3.1 假设矩阵 A 的矩阵度量满足

$$\mu(A) := \frac{\mu_1(A) + \mu_{\infty}(A)}{2} < 0,$$

其中 $\mu_1(A)$ 与 $\mu_{\infty}(A)$ 分别是由 1-范数与 ∞ -范数诱导的矩阵度量。则对系统(3.1)任意解 $z(t)$, 存在一个常数 $C_0 > 0$, 使得

$$|z(t)| \leq C_0 e^{-\alpha t}, \quad t > 0, \quad (3.2)$$

其中 $\alpha = |\mu(A)| > 0$, 特别地

$$|e^{At}| \leq C_0 e^{-\alpha t}, \quad t > 0.$$

证明: 令

$$W(z(\cdot), t) = |z(t)|_2^2 = \sum_{i=1}^2 |z_i(t)|^2.$$

则沿着系统(3.1)的方向导数(李雅普诺夫导数) DW 为

$$\begin{aligned}
DW(z(\cdot), t) &= \sum_{i=1}^N [\bar{z}_i(t) z'_i(t) + z_i(t) \bar{z}'_i(t)] \\
&= \sum_{i=1}^N \left\{ \bar{z}_i(t) \sum_{j=1}^N a_{ij} z_j(t) + z_i(t) \sum_{j=1}^N \bar{a}_{ij} \bar{z}_j(t) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N \left\{ a_{ii} \bar{z}_i(t) z_i(t) + \sum_{j \neq i}^N a_{ij} \bar{z}_i(t) z_j(t) + \bar{a}_{ii} z_i(t) \bar{z}_i(t) + \sum_{j \neq i}^N \bar{a}_{ij} z_i(t) \bar{z}_j(t) \right\} \\
&= \sum_{i=1}^N \left\{ 2 \operatorname{Re}(a_{ii}) |z_i(t)|^2 + 2 \sum_{j \neq i}^N \operatorname{Re}(a_{ij} \bar{z}_i(t) z_j(t)) \right\} \quad (3.3) \\
&\leq \sum_{i=1}^N \left\{ 2 \operatorname{Re}(a_{ii}) |z_i(t)|^2 + \sum_{j \neq i}^N |a_{ij}| (|z_i(t)|^2 + |z_j(t)|^2) \right\} \\
&\leq (\mu_1(A) + \mu_\infty(A)) |z(t)|_2^2 \\
&= (\mu_1(A) + \mu_\infty(A)) W(z(\cdot), t).
\end{aligned}$$

对不等式(3.3)两边积分可得

$$W(z(\cdot), t) \leq W(z(\cdot), 0) e^{2\mu(A)t}, \quad t \geq 0$$

注意到对某个 $N > 0$ 常数有 $|z(t)| \leq N |z(t)|_2$ 于是立刻推出式(3.2)成立。证明完毕。

为得到所需结论, 我们需要先对系统(1.1)解的差建立先验估计。设 $(u(x, t), \omega(x, t))$ 是系统(1.1)在初值 $(u_0(x), \omega_0(x))$ 下的解。定义(对所有 $x \in R$):

$$\begin{aligned}
u_0^-(x) &= \min\{u_0(x), \varphi_1(x)\}, \quad \omega_0^-(x) = \max\{\omega_0(x), \varphi_2(x)\}, \\
u_0^+(x) &= \min\{u_0(x), \varphi_1(x)\}, \quad \omega_0^+(x) = \max\{\omega_0(x), \varphi_2(x)\}.
\end{aligned}$$

容易得出对所有 $x \in R$, 有

$$\begin{aligned}
0 &\leq u_0^-(x) \leq u_0(x) \leq u_0^+(x) \leq 1, \\
0 &\leq u_0^-(x) \leq \varphi_1(x) \leq u_0^+(x) \leq 1, \\
0 &\leq \omega_0^-(x) \leq \omega_0(x) \leq \omega_0^+(x) \leq 1, \\
0 &\leq \omega_0^-(x) \leq \varphi_2(x) \leq \omega_0^+(x) \leq 1.
\end{aligned}$$

令 $(u^+(x, t), \omega^+(x, t))$ 分别是初值为 $(u_0^+(x), \omega_0^+(x))$ 的系统(1.1)的解。由引理 2.1 的比较原理得, 对于所有 $x \in R, t > 0$, 有

$$\begin{aligned}
0 &\leq u^-(x, t) \leq u(x, t) \leq u^+(x, t) \leq 1, \\
0 &\leq u^-(x, t) \leq \varphi_1(x + ct) \leq u^+(x, t) \leq 1, \\
0 &\leq \omega^-(x, t) \leq \omega(x, t) \leq \omega^+(x, t) \leq 1, \\
0 &\leq \omega^-(x, t) \leq \varphi_2(x + ct) \leq \omega^+(x, t) \leq 1.
\end{aligned}$$

接下来, 我们将分三步完成定理 2.2 的证明。

步骤1: 当任意给定 $c \geq c^*$ 时, $(u^+(x, t), \omega^+(x, t))$ 收敛到 $(\varphi_1(x + ct), \varphi_2(x + ct))$ 。

令 $\xi := x + ct$, 并设

$$U_1(\xi, t) = u^+(x, t) - \varphi_1(x + ct), \quad V_1(\xi, t) = \omega^+(x, t) - \varphi_2(x + ct),$$

其初值为 $U_{10}(\xi, 0) = u_0^+(x) - \varphi_1(x)$ 且 $V_{10}(\xi, 0) = \omega_0^+(x) - \varphi_2(x)$ 。

容易验证

$$\begin{cases} U_{1t} + cU_{1\xi} = \Delta U_1 - U_1 + V_1 - \gamma k U_1 + \gamma k U_1 (V_1 + \varphi_2) + \gamma k \varphi_1 V_1, \\ V_{1t} + cV_{1\xi} = kU_1 - kU_1 (V_1 + \varphi_2) - k\varphi_1 V_1. \end{cases} \quad (3.4)$$

由于 $V_1 + \varphi_2 \in (0, 1)$ 且 $\varphi_1 \in (0, 1)$, 有

$$\begin{aligned} -U_1 + V_1 - \gamma k U_1 + \gamma k U_1 (V_1 + \varphi_2) + \gamma k \varphi_1 V_1 &\leq -U_1 + (1 + \gamma k) V_1, \\ kU_1 - kU_1 (V_1 + \varphi_2) - k\varphi_1 V_1 &\leq kU_1. \end{aligned}$$

由(3.4)得

$$\begin{cases} U_{1t} + cU_{1\xi} \leq \Delta U_1 - U_1 + (1 + \gamma k) V_1, \\ V_{1t} + cV_{1\xi} \leq kU_1. \end{cases} \quad (3.5)$$

令 $(U_1^+(\xi, t), V_1^+(\xi, t))$ 为下述柯西问题的解

$$\begin{cases} U_{1t}^+ + cU_{1\xi}^+ = \Delta U_1^+ - U_1^+ + (1 + \gamma k) V_1^+, \\ V_{1t}^+ + cV_{1\xi}^+ = kU_1^+, \\ (U_1^+(\xi, 0), V_1^+(\xi, 0)) = (U_{10}(\xi, 0), V_{10}(\xi, 0)). \end{cases} \quad (3.6)$$

由比较原理得

$$(U_1(\xi, t), V_1(\xi, t)) \leq (U_1^+(\xi, t), V_1^+(\xi, t)), \quad \forall (\xi, t) \in R \times [0, +\infty). \quad (3.7)$$

令

$$\tilde{U}(\xi, t) = e^{-\lambda^*(\xi - \zeta_0)} U_1^+(\xi, t), \quad \tilde{V}(\xi, t) = e^{-\lambda^*(\xi - \zeta_0)} V_1^+(\xi, t),$$

其中 ζ_0 为充分大的常数(具体取值稍后给出)。由(3.6)可得 $(\tilde{U}(\xi, t), \tilde{V}(\xi, t))$ 满足

$$\begin{cases} \tilde{U}_t + (c - 2\lambda^*) \tilde{U}_\xi = \tilde{U}_{\xi\xi} + (\lambda^{*2} - c\lambda^* - 1) \tilde{U} + (1 + \gamma k) \tilde{V}, \\ \tilde{V}_t + c\tilde{V}_\xi = k\tilde{U} - c\lambda^* \tilde{V}. \end{cases} \quad (3.8)$$

对系统(3.8)作傅里叶变换, 得

$$\begin{cases} \hat{U}_t(\eta, t) = -[-\eta^2 - i\eta(c - 2\lambda^*) + \lambda^{*2} - c\lambda^* - 1] \hat{U}(\eta, t) + (1 + \gamma k) \hat{V}(\eta, t), \\ \hat{V}_t(\eta, t) = k\hat{U}(\eta, t) - (c\lambda^* + i\eta) \hat{V}(\eta, t), \end{cases} \quad (3.9)$$

其中

$$\hat{U}(\eta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{U}(\xi, t) e^{-i\eta\xi} d\xi, \quad \hat{V}(\eta, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{V}(\xi, t) e^{-i\eta\xi} d\xi.$$

令

$$Z(\xi, t) = (\tilde{U}(\xi, t), \tilde{V}(\xi, t))^T, \quad \hat{Z}(\eta, t) = (\hat{U}(\eta, t), \hat{V}(\eta, t))^T.$$

于是, 系统(3.9)可改写为如下微分系统:

$$\frac{\partial \hat{Z}(\eta, t)}{\partial t} = A(\eta) \hat{Z}(\eta, t), \quad (3.10)$$

其中,

$$A(\eta) = \begin{pmatrix} -\eta^2 - i\eta(2\lambda^* + c) + \lambda^{*2} - c\lambda^* - 1 & 1 + \gamma k \\ k & -c\lambda^* - i\eta \end{pmatrix}.$$

(3.10)的解可表示为

$$\hat{Z}(\eta, t) = e^{A(\eta)t} \hat{Z}_0(\eta).$$

因此, 取逆傅里叶变换可得

$$Z(\xi, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\eta\xi} e^{A(\eta)t} \hat{Z}_0(\eta) d\eta.$$

引理 3.2 成立如下结论

$$\|U_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega_-)} + \|V_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega_-)} \leq C e^{-\alpha t},$$

其中, $\Omega_- := (-\infty, \zeta_0]$ 。

证明: 由于 $\lambda^* = \sqrt{2 + (\gamma - 1)k}$, 且条件(A)成立, 故经计算可得

$$\mu_1(A(\eta)) = \max\{-\eta^2 + \lambda^{*2} - c\lambda^* - 1 + k, -c\lambda^* + 1 + \gamma k\} = -c\lambda^* + 1 + \gamma k$$

以及

$$\mu_\infty(A(\eta)) = \max\{-\eta^2 + \lambda^{*2} - c\lambda^* + \gamma k, -c\lambda^* + k\} = -c\lambda^* + k.$$

因此

$$\mu(A(\eta)) = \frac{\mu_1(A(\eta)) + \mu_\infty(A(\eta))}{2} = -c\lambda^* + \frac{1 + (\gamma + 1)k}{2} < 0,$$

由于

$$c > c^* > \frac{1 + (\gamma + 1)k}{2\lambda^*} = \frac{1 + (\gamma + 1)k}{2\sqrt{2 + (\gamma - 1)k}},$$

故由引理 3.1 可得

$$\|e^{A(\eta)t}\| \leq C_0 e^{-\alpha t}, \quad t > 0. \quad (3.11)$$

进一步, 利用(3.11)得

$$\begin{aligned} \sup_{\xi \in R} Z(\xi, t) &= \sup_{\xi \in R} \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi\eta} e^{A(\eta)t} \hat{Z}_0(\eta) d\eta \right\| \\ &\leq C_0 e^{-\alpha t} \sup_{\xi \in R} \left\| \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\xi\eta} \hat{Z}_0(\eta) d\eta \right\| \\ &\leq C_0 e^{-\alpha t} \sup_{\xi \in R} \|Z_0(\xi, t)\|. \end{aligned}$$

由此可以推出

$$\|\tilde{U}(\cdot, t)\|_{L^\infty(R)} + \|\tilde{V}(\cdot, t)\|_{L^\infty(R)} \leq C_1 e^{-\alpha t}, \quad (3.12)$$

其中 $C_1 := C_0 \left(\|U_0\|_{L^\infty(\Omega_-)} + \|V_0\|_{L^\infty(\Omega_-)} \right)$ 。由(3.7)以及当 $\xi \leq \zeta_0$ 时, $e^{\lambda^*(\xi-\zeta_0)} \leq 1$, 得到

$$0 \leq U_1(\xi, t) \leq U_1^+(\xi, t) = e^{\lambda^*(\xi-\zeta_0)} \tilde{U}(\xi, t) \leq \tilde{U}(\xi, t),$$

$$0 \leq V_1(\xi, t) \leq V_1^+(\xi, t) = e^{\lambda^*(\xi-\zeta_0)} \tilde{V}(\xi, t) \leq \tilde{V}(\xi, t)$$

对所有 $\xi \in \Omega_- := (-\infty, \zeta_0]$ 成立。由(3.12)立即得到

$$\|U_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega_-)} + \|V_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(\Omega_-)} \leq C e^{-\alpha t},$$

其中 $C > 0$ 为常数。证明完毕。

引理 3.3 若 $c > c^*$, 则存在一个足够大的数 $\zeta_0 > 0$, 使得

$$\sup_{\xi \in [\zeta_0, +\infty)} U_1(\xi, t) \leq C e^{-\beta t}, \quad \sup_{\xi \in [\zeta_0, +\infty)} V_1(\xi, t) \leq C e^{-\beta t}, \quad t > 0, \quad (3.13)$$

其中, $\beta = \min\{1, (1-\gamma)k-1\}$ 。

证明: 注意到 (U_1, V_1) 满足

$$\begin{cases} U_{1t} + c U_{1\xi} \leq \Delta U_1 - U_1 + (1+\gamma k) V_1, \\ V_{1t} + c V_{1\xi} \leq k U_1 - k U_1 \varphi_2 - k \varphi_1 V_1. \end{cases} \quad (3.14)$$

对(3.14)的第一个不等式取极限 $\xi \rightarrow \infty$, 并注意到由于 $(\xi, t) \in R \times [0, +\infty)$ 上 $U_1(\xi, t)$ 有界, 故 $U_{1\xi}(\infty, t) = 0$, $\Delta U_1(\infty, t) = 0$, 于是得

$$\frac{d}{dt} U_1(\infty, t) \leq -U_1(\infty, t) + (1+\gamma k) V_1(\infty, t) \quad (3.15)$$

对(3.15)在区间 $[0, t]$ 上积分, 得到

$$U_1(\infty, t) \leq U_1(\infty, 0) - \int_0^t U_1(\infty, s) ds + (1+\gamma k) \int_0^t V_1(\infty, s) ds. \quad (3.16)$$

同理, 对(3.14)的第二条不等式令 $\xi \rightarrow \infty$, 并注意到 $V_1(\xi, t)$ 在 $(\xi, t) \in R \times [0, +\infty)$ 有界从而 $V_{1\xi}(\infty, t) = 0$, 且 $\varphi_i(\infty) = 1, i = 1, 2$, 于是得

$$\frac{d}{dt} V_1(\infty, t) \leq -k V_1(\infty, t) \quad (3.17)$$

对(3.17)在区间 $[0, t]$ 上积分得

$$V_1(\infty, t) \leq V_1(\infty, 0) - k \int_0^t V_1(\infty, s) ds \quad (3.18)$$

将(3.16)与(3.18)相加可得

$$U_1(\infty, t) + V_1(\infty, t) \leq [U_1(\infty, 0) + V_1(\infty, 0)] - \int_0^t U_1(\infty, s) ds - (k-1-\gamma k) \int_0^t V_1(\infty, s) ds. \quad (3.19)$$

由条件(A)有 $k > \frac{1}{1-\gamma}$ 。显然, $k-1-\gamma k = (1-\gamma)k-1 > 0$, 选取 $\beta = \min\{1, (1-\gamma)k-1\} > 0$, 由(3.19)推得

$$U_1(\infty, t) + V_1(\infty, t) \leq -\beta \left[\int_0^t U_1(\infty, s) ds + \int_0^t V_1(\infty, s) ds \right] + C_2 \quad (3.20)$$

其中 $C_2 = U_1(\infty, 0) + V_1(\infty, 0)$, 由 Gronwall 不等式, (3.20)推出

$$U_1(\infty, t) + V_1(\infty, t) \leq C_3 e^{-\beta t}. \quad (3.21)$$

这意味着

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} U_1(\xi, t) \leq C e^{-\beta t}, \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} V_1(\xi, t) \leq C e^{-\beta t}, \quad t > 0.$$

因此, 存在一个足够大的数 $\zeta_0 > 0$, 使得(3.13)成立。证明完毕。

基于引理 3.2 与引理 3.3, 立即得到如下引理。

引理 3.4 对任意 $c > c^*$, 有

$$\|U_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(R)} + \|V_1(\cdot, t)\|_{L^\infty(R)} \leq C e^{-\sigma t}, \quad t > 0,$$

其中, $0 < \sigma < \min\{\alpha, \beta\}$ 。

由 $U_1(\xi, t)$ 和 $V_1(\xi, t)$ 的定义, 可得解 $(u^+(x, t), \omega^+(x, t))$ 具有如下收敛性。

引理 3.5 当 $c > c^*$,

$$\sup_{x \in R} |u^+(x, t) - \varphi_1(x + ct)| \leq C e^{-\sigma t}, \quad t > 0,$$

$$\sup_{x \in R} |\omega^+(x, t) - \varphi_2(x + ct)| \leq C e^{-\sigma t}, \quad t > 0,$$

其中, $0 < \sigma < \min\{\alpha, \beta\}$ 。

步骤2: $(u^-(x, t), \omega^-(x, t))$ 收敛到 $(\varphi_1(x + ct), \varphi_2(x + ct))$ 。

对任意给定 $c > c^*$, 令 $\xi = x + ct$, 并设

$$U_2(\xi, t) = \varphi_1(x + ct) - u^-(x, t), \quad V_2(\xi, t) = \varphi_2(x + ct) - \omega^-(x, t),$$

其初值为 $U_{20}(\xi, 0) = \varphi_1(x) - u_0^-(x)$, $V_{20}(\xi, 0) = \varphi_2(x) - \omega_0^-(x)$, 其中 $t > 0, \xi \in R$ 。与步骤 1 同理, 可类似证明 $(u^-(x, t), \omega^-(x, t))$ 收敛到 $(\varphi_1(x + ct), \varphi_2(x + ct))$ 。

引理 3.6 对于任意 $c > c^*$, 存在一个正数 σ , 使得

$$\sup_{x \in R} |u^-(x, t) - \varphi_1(x + ct)| \leq C e^{-\sigma t}, \quad t > 0,$$

$$\sup_{x \in R} |\omega^-(x, t) - \varphi_2(x + ct)| \leq C e^{-\sigma t}, \quad t > 0,$$

其中 $0 < \sigma < \min\{\alpha, \beta\}$ 。

步骤3: $(u(x, t), \omega(x, t))$ 收敛到 $(\varphi_1(x + ct), \varphi_2(x + ct))$ 。

定理 2.2 的证明: 因为

$$(0, 0) \leq (u^-(x, t), \omega^-(x, t)) \leq (u(x, t), \omega(x, t)) \leq (u^+(x, t), \omega^+(x, t)) \leq (1, 1)$$

且

$$(0, 0) \leq (u^-(x, t), \omega^-(x, t)) \leq (\varphi_1(x + ct), \varphi_2(x + ct)) \leq (u^+(x, t), \omega^+(x, t)) \leq (1, 1),$$

其中 $x \in R, t > 0$, 所以由引理 3.5 与引理 3.6 并利用夹逼准则论证, 可立即得到: 对任意 $c > c^*$, 存在常数 $\sigma > 0, C > 0$ 使得

$$\sup_{x \in R} |u(x, t) - \varphi_1(x + ct)| \leq C e^{-\sigma t}, \quad t > 0,$$

$$\sup_{x \in R} |\omega(x, t) - \varphi_2(x + ct)| \leq C e^{-\sigma t}, \quad t > 0.$$

定理 2.2 证毕。

基金项目

国家自然科学基金(12261081, 11861056)。

参考文献

- [1] King, J.R., Koerber, A.J., Croft, J.M., *et al.* (2003) Modelling Host Tissue Degradation by Extracellular Bacterial Pathogens. *Mathematical Medicine and Biology*, **20**, 227-260. <https://doi.org/10.1093/imammb20.3.227>
- [2] Hilhorst, D., King, J.R. and Röger, M. (2007) Mathematical Analysis of a Model Describing the Invasion of Bacteria in Burn Wounds. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applications*, **66**, 1118-1140. <https://doi.org/10.1016/j.na.2006.01.009>
- [3] Hilhorst, D., King, J.R. and Röger, M. (2007) Travelling-Wave Analysis of a Model Describing Tissue Degradation by Bacteria. *European Journal of Applied Mathematics*, **18**, 583-605. <https://doi.org/10.1017/s0956792507007139>
- [4] Zhang, T., Chen, D., Han, Y. and Ma, M. (2021) Linear Determinacy of the Minimal Wave Speed of a Model Describing Tissue Degradation by Bacteria. *Applied Mathematics Letters*, **121**, Article 107044. <https://doi.org/10.1016/j.aml.2021.107044>
- [5] 彭叠, 易亚婷. 细菌降解宿主组织模型行波解的局部渐近行为[J]. 理论数学, 2022(12): 1966-1970.
- [6] He, X., He, G.S. and Pan, C.H. (2022) Local Stability of Traveling Waves of a Model Describing Host Tissue Degradation by Bacteria. *Mathematics*, **10**, Article 1805. <https://doi.org/10.3390/math10111805>
- [7] Yang, X.X., Zhang, G.B. and Tian, G. (2024) The Dynamics of Traveling Wavefronts for a Model Describing Host Tissue Degradation by Bacteria. *International Journal of Biomathematics*, **17**, Article 2350031. <https://doi.org/10.1142/s1793524523500316>
- [8] Yang, Z.J., Zhang, G.B. and Tian, G. (2024) Global Stability of Traveling Wave Solutions for a Discrete Diffusion Epidemic Model with Nonlocal Delay Effects. *Journal of Mathematical Physics*, **66**, Article 021508. <https://doi.org/10.1063/5.0202813>
- [9] Ma, Z.H., Yuan, R., Wang, Y. and Wu, X. (2019) Multidimensional Stability of Planar Traveling Waves for the Delayed Nonlocal Dispersal Competitive Lotka-Volterra System. *Communications on Pure & Applied Analysis*, **18**, 2069-2092. <https://doi.org/10.3934/cpaa.2019093>
- [10] Mei, M., Zhang, K.J. and Zhang, Q.F. (2019) Global Stability of Traveling Waves with Oscillations for Nicholson's Blowflies Equation. *International Journal of Numerical Analysis and Modeling*, **16**, 375-397.
- [11] Khusainov, D.Y., Ivanov, A.F. and Kovarzh, I.V. (2009) Solution of One Heat Equation with Delay. *Nonlinear Oscillations*, **12**, 260-282. <https://doi.org/10.1007/s11072-009-0075-3>