

雪球期权的定价机制与动态解码

——偏微分方程模型下雪球期权定价与动态对冲机制研究

柏佳佳, 郭盈盈, 任雨萱, 黄钰淇, 张雅怡

中国民航大学理学院, 天津

收稿日期: 2025年10月14日; 录用日期: 2025年11月17日; 发布日期: 2025年11月24日

摘要

雪球全称为“雪球型自动敲入敲出式券商收益凭证”，是一种奇异期权类产品。很多人不希望承担过大投资风险的同时获得不俗的收益，所以雪球期权自出现就深受广大群众的追捧，由此衍生的一系列金融产品，凭借高票息在金融市场上占有一席之地。本文从雪球期权概述出发，介绍产品基本要素，并进行情景分析。接着建立雪球期权定价模型，分敲出离散情景和敲出连续情景讨论，每个情景又区分当前未敲入和当前已敲入两种情形，得到相应的定价公式。本文进行了定价参数的估计，通过GARCH (1, 1)模型确定波动率，然后确定了雪球期权的所有参数取值。使用蒙特卡洛和有限差分两种方法进行求解，将结果进行比较，发现结果基本一致，同时进行了动态对冲，最后对雪球期权的投资进行分析，得出主要结论。

关键词

雪球期权, 蒙特卡洛, 有限差分, 动态对冲

The Pricing Kernel and Dynamic Decoding of Snowball Options

—A Study of Snowball Option Pricing and Dynamic Hedging Mechanism under a PDE Model

Jiajia Bai, Yingying Guo, Yuxuan Ren, Yuqi Huang, Yayi Zhang

College of Science, Civil Aviation University of China, Tianjin

Received: October 14, 2025; accepted: November 17, 2025; published: November 24, 2025

Abstract

The snowball option, fully known as the “Auto-Callable Snowball Structured Note with Knock-In and

Knock-Out Features”, is a type of exotic derivative. Many investors seek attractive returns without taking on excessive risk, which has made snowball options highly popular since their introduction. Consequently, a series of financial products derived from them have secured a place in the financial market due to their high coupon rates. This paper begins with an overview of snowball options, introducing their fundamental components and conducting scenario analysis. Subsequently, a pricing model for snowball options is established, examining discrete and continuous knock-out scenarios. Each scenario is further divided into two cases: when the option has not been knocked in and when it has already been knocked in, leading to the derivation of corresponding pricing formulas. The paper also involves the estimation of pricing parameters, where volatility is determined using the GARCH (1, 1) model, and all parameters for the snowball option are finalized. The pricing is solved using both the Monte Carlo method and the finite difference method, and the results are compared, showing general consistency. Additionally, dynamic hedging is performed. Finally, an investment analysis of snowball options is conducted, leading to the main conclusions.

Keywords

Snowball Option, Monte Carlo, Finite Difference, Academic Journals

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

期权作为衍生品历史悠久，其定义为赋予持有人未来买卖资产权利的合约。经典雪球期权是一种结构化金融产品，常与股票指数挂钩，属于非保本场外期权衍生品。经典雪球产品是采用最标准、最普遍的雪球结构，没有额外的复杂条款；股票指数代表市场股票的整体表现；非保本意味着本产品无法保障本金，如果市场出现极端下跌，投资者可能亏损本金，而不仅仅是拿不到利息。该产品属于一种双障碍期权，事先确定敲入敲出价格和观察频率，敲入价格通常为初始价的 75%~85%、每日观察，敲出价格通常为初始价的 103%~105%、每月观察。若观察日观察到标的资产价格上涨并高于规定的敲出价格，则发生敲出事件，投资者将获得从产品起息日到敲出日期间按年化票息计算的全部累计收益；反之，则发生敲入事件，它本身不直接产生亏损，是亏损的必要条件。

国外依托早期障碍期权研究基础，近 10 年在雪球期权相关领域实现三大突破。定价方法方面，Boyle 与 Potter 的路径分层抽样技术有效降低模拟误差，Glasserman 的概率加权算法提升了敲出概率计算精度；波动率建模领域，Engle 与 Zhang 的 GARCH-MIDAS 模型纳入宏观变量减少预测误差，Bollerslev 团队的非对称 GARCH 模型解决了下跌市拟合偏差问题；动态对冲研究上，Hull 明确双障碍期权 Delta 跳跃特征，Andersen 揭示了 Gamma 对冲的实践困境。

国内自 2015 年期权市场发展以来，雪球期权研究呈现“从借鉴到创新”的特点。定价模型实现本土标的适配，陈长兴以中证 500 指数为标的确定合理票息率区间；参数估计经本土化验证，国内学者采用的 GARCH(1, 1)模型适配 A 股指数，本课题相关流程与郑祥等方法一致且结果可靠；风险量化与投资适配性研究成果显著，中金所白皮书与本课题敲入未敲出概率结果吻合，黄道增提出的 Delta 对冲误差控制范围与本课题实证结果相符[1]。

为弄清楚雪球期权的核心原理，本文对雪球期权产品进行了研究，对投资者、金融机构与资本市场均有价值。对投资者，可明晰“敲入/敲出”机制下的收益与风险边界，避免因规则复杂导致的预期错配

与盲目投资。对金融机构，可防范尾部风险与运营亏损。对市场而言，有利于维护结构性产品市场稳定。

2. 雪球期权概述

2.1. 基本要素

下表 1 是本文研究的非保本雪球期权结构产品基本要素：

Table 1. Basic elements of snowball option structured products
表 1. 雪球期权结构产品基本要素

要素名称	要素说明
产品结构	非保本雪球
产品期限	12 M
挂钩标的	000905.SH-中证 1000
敲出价格	期初价格 $\times$ 103%，每月观察
敲入价格	期初价格 $\times$ 80%，每日观察
红利票息	20%
敲出票息	20%

其中红利票息为没有发生敲入事件，也没有发生敲出事件时的年化票息率，敲出票息为发生敲出事件，合约提前结束时的年化票息率，由于红利票息和敲出票息相等[2]，所以后文将它们统一称为票息率。

2.2. 雪球期权的情景分析

假设标的资产起初价格为 1，敲出价格(即上障碍)设为 1.03，敲入价格(即下障碍)设为 0.8，下表 2 为雪球期权四种情景分析：

Table 2. Four scenario analyses of snowball options
表 2. 雪球期权四种情景分析

情景	价格路径	收益情况
1 未敲入也未敲出	价格始终在双障碍之间震荡	享有整个合约期间的收益
2 直接敲出	价格触及上障碍，从未触及下障碍	只享有截止至敲出时刻的收益
3 先敲入后敲出	价格先触及下障碍，而后触及上障碍	收益情况同情景 2
4 敲入之后未敲出	价格触及下障碍，且到期前没有触及上障碍	投资者无法获得正收益

3. 雪球期权定价模型的建立

3.1. 定义敲入事件、敲出事件

本文所有定价过程都是在风险中性的条件下进行的，用 E^* 表示在风险中性测度下的期望， T 是整个合约时间($0 < t < T$ ， $T_0 = 0 < T_1 \leq T_2 \leq \dots \leq T_m < T = T_{m+1}$)，敲入价格为 $\underline{S}$ ，敲出价格为 $\bar{S}$ ， τ^I 为首次敲入的时刻(即 $\tau^I = \inf \{t | S_t < \underline{S}\}$)， τ^O 为首次敲出的时刻(如果敲出每日观察，可近似认为连续观察，此时 $\tau^O = \inf \{t | S_t > \bar{S}\}$ ；如果每月观察，可近似认为是离散观察，此时 $\tau^O = \inf \{T_i | S_{T_i} > \bar{S}\}$)。

假设标的资产的期初价格为 S_0 ，合同约定的票息率为 μ_f 。此时收益情况可进行如下分类：

情景 1: 此时 $T < \min(\tau^O, \tau^I)$ ，到期收益为 $S_0 e^{\mu_f T}$ ；

情景 2 和情景 3: 此时 $\tau^O < T$ ，到期收益为 $S_0 e^{\mu_f \tau^O}$ ；

情景 4: 此时 $\tau^I < T < \tau^O$ ，到期收益为 $\min(S, S_0)$ 。

3.2. 敲出连续观察

为了方便计算期权价值，我们将当前时刻分为当前已敲入和当前未敲入。

3.2.1. 当前已敲入

在当前已敲入的情况下，未来时刻是否敲出并不确定，此时将期权价值记为 V^I ，此时 V^I 可表示为

$$V^I(S_t, t) = E^* \left[e^{-r(\tau^O - t)} S_0 e^{\mu_f \tau^O} I_{\{\tau^O \leq T\}} + e^{-r(T-t)} \min(S_T, S_0) I_{\{\tau^I < T < \tau^O\}} \right] \quad (1)$$

结合边界条件和 Feynman-Kac 定理转化为下述偏微分方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial V^I}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V^I}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial V^I}{\partial S} - r V^I = 0, & 0 < S < \bar{S}, 0 < t < T, \\ V^I(S_T, T) = \min(S_T, S_0), \\ V^I(\bar{S}, t) = S_0 e^{\mu_f t}, \\ V^I(0, t) = 0. \end{cases} \quad (2)$$

3.2.2. 当前未敲入

当前未敲入，未来三种情况均有可能(敲入再敲出、直接敲出、未敲入未敲出)，如果发生敲入，期权价值此时转化为(1)的形式，此时将当前未发生敲入的期权价值记为 V ，此时 V 可表示为

$$V(S_t, t) = E^* \left[e^{-r(T-t)} S_0 e^{\mu_f T} I_{\{T < \min(\tau^O, \tau^I)\}} + e^{-r(\tau^O - t)} S_0 e^{\mu_f \tau^O} I_{\{\tau^O \leq T\}} + e^{-r(\tau^I - t)} V^I(S_t, t) I_{\{\tau^I < \min(T, \tau^O)\}} \right] \quad (3)$$

结合边界条件及 Feynman-Kac 定理将(3)转化为下述偏微分方程：

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + (r - q) S \frac{\partial V}{\partial S} - r V = 0, & \underline{S} < S < \bar{S}, 0 < t < T, \\ V(S, T) = S_0 e^{\mu_f T}, \\ V(\underline{S}, t) = V^I(\underline{S}, t), \\ V(\bar{S}, t) = S_0 e^{\mu_f t}. \end{cases} \quad (4)$$

3.3. 敲出离散观察

在敲出离散观察下，设有 m 个观察日， $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \dots < T_m < T = T_{m+1}$ 。

3.3.1. 当前未敲入

定义 1 [2]: G_i^I 为一个当前已敲入的雪球期权到期收益函数，对于 $\forall t \in (0, T)$ ， $S_t = S \in (0, \infty)$ ， $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \dots < T_m < T = T_{m+1}$ ，则对于 $i = 0, 1, 2, \dots, m$ ，有：

$$G_0^I(S) = \min(S, S_0) \quad (5)$$

$$G_i^I(S) = S_0 e^{\mu_f T_{m-i+1}} \cdot I_{\{S \geq \bar{S}\}} + V_{i-1}^I \cdot I_{\{S < \bar{S}\}}, i = 1, 2, \dots, m \quad (6)$$

结合定义 1 及 3.2 同样思路, 可得

$$V^I(S_t, t) = E^* \left[e^{-r(\tau^o - t)} S_0 e^{\mu_f \tau^o} I_{\{\tau^o \leq T\}} + e^{-r(T-t)} \min(S_T, S_0) I_{\{\tau^I < T < \tau^o\}} \right] \quad (7)$$

结合边界条件和 Feynman-Kac 定理转化为下述偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_i^I}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_i^I}{\partial S^2} + \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) S \frac{\partial V_i^I}{\partial S} - r V_i^I = 0, & 0 < S < \infty, T_{m-i} < t < T_{m-i+1}, \\ V_i^I(S, T_{m-i+1}) = G_i^I(S). \end{cases} \quad (8)$$

3.3.2. 当前已敲入

定义 2 [2]: G_i 为一个当前已敲入的雪球期权到期收益函数, 对于 $\forall t \in (0, T)$, $S_t = S \in (0, \infty)$, $T_0 = 0 < T_1 < T_2 < \dots < T_m < T = T_{m+1}$, 则对于 $i = 0, 1, 2, \dots, m$, 有:

$$G_0(S) = \min(S, S_0) \quad (9)$$

$$G_i(S) = S_0 e^{\mu_f T_{m-i+1}} \cdot I_{\{S \geq \bar{S}\}} + V_{i-1} \cdot I_{\{S < \bar{S}\}}, i = 1, 2, \dots, m \quad (10)$$

结合定义 2 可得

$$V(S_t, t) = E^* \left[e^{-r(T-t)} S_0 e^{\mu_f T} I_{\{T < \min(\tau^o, \tau^I)\}} + e^{-r(\tau^o - t)} S_0 e^{\mu_f \tau^o} I_{\{\tau^o \leq T\}} + e^{-r(\tau^I - t)} V^I(S_t, t) I_{\{\tau^I < \min(T, \tau^o)\}} \right] \quad (11)$$

结合边界条件和 Feynman-Kac 定理转化为下述偏微分方程:

$$\begin{cases} \frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V_i}{\partial S^2} + \left(r - q - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) S \frac{\partial V_i}{\partial S} - r V_i = 0 \\ V_i(S, T_{m-i+1}) = G_i(S), \\ V_i(\underline{S}, t) = V_i^I(\underline{S}, t). \\ \underline{S} < S < \infty, T_{m-i} < t < T_{m-i+1} \end{cases} \quad (12)$$

4. 雪球期权定价的数值方法

4.1. 波动率的估计

本文选取中证 1000 指数自 2024 年 1 月 2 日至 2024 年 12 月 30 日的收盘价为样本来估计波动率。首先计算其对数收益率, 将非平稳的价格序列转换为基本平稳的、可分析的收益率序列, 计算公式为:

$r_t = \ln \frac{S_{t+1}}{S_t}$, 画出的收益率的时间序列图如下图 1 所示:



Figure 1. Logarithmic return chart of the CSI 1000 index

图 1. 中证 1000 指数对数收益率图

对收益率序列进行 ADF 检验，由表 3 得 p 值小于 5%，拒绝原假设，序列是平稳的。

Table 3. ADF test for the return series of the CSI 1000 index
表 3. 中证 1000 收益率序列 ADF 检验

统计量/临界值类型	数值
ADF 检验统计量	-9.213687
p 值	0.000000
1%临界值	-3.458128
5%临界值	-2.873762
10%临界值	-2.573283

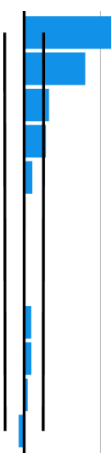
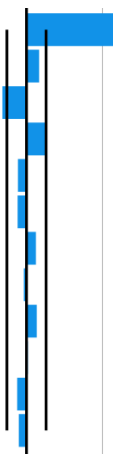
通过平稳性检验后，画出中证 1000 对数收益率序列的自相关和偏自相关图(表 4)，观察 Q 统计量和 p 值，不能拒绝原假设，则序列不存在明显自相关性。

Table 4. Plot of autocorrelation and partial autocorrelation for CSI 1000 return series
表 4. 中证 1000 收益率序列的自相关和偏自相关图

	AC	PAC	Q-Stat	Prob
1	0.106	0.106	2.717	0.099
2	0.072	0.062	3.994	0.136
3	-0.109	-0.124	6.895	0.075
...	...	...	...	...
12	0.006	-0.006	12.977	0.371

令 $\bar{r} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n r_i$ ， $i=1,2,3,\dots$ ，其中 r_i 为第 i 个对数收益率。令 $\omega = r - \bar{r}$ ，对 ω^2 序列进行自相关和偏自相关检验，如表 5 所示，Ljung-Box Q 检验拒绝原假设，序列有明显自相关性，说明中证 1000 收益率序列具有 ARCH 效应。可以使用 GARCH 模型来拟合收益率序列。

Table 5. ARCH effect test for the logarithmic return series of the CSI 1000 index
表 5. 中证 1000 指数对数收益率序列的 ARCH 效应检验

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.589	0.589	84.768	0.000
		2	0.402	0.083	124.268	0.000
		3	0.163	-0.158	130.823	0.000
		4	0.144	0.125	135.922	0.000
		5	0.054	-0.056	136.639	0.000
		6	0.009	-0.058	136.657	0.000
		7	0.001	0.062	136.658	0.000
		8	-0.002	-0.018	136.659	0.000
		9	0.047	0.067	137.208	0.000
		10	0.047	0.009	137.779	0.000
		11	0.023	-0.061	137.914	0.000
		12	-0.036	-0.051	138.245	0.000

尝试用 GARCH (1, 1)进行拟合, 公式为 $\sigma_t^2 = (1 - \alpha - \beta)V_L + \alpha\mu_{t-1}^2 + \beta\sigma_{t-1}^2$, 其中 V_L 为长期平均方差。模型的拟合结果如下表 6 所示, 在 5%的显著性水平下显著。

Table 6. Results of the GARCH (1, 1) model
表 6. GARCH (1, 1)模型结果

Variable	Coefficient	Std. Error	z-Statistic	Prob.
C	4.4e-05	9e-06	5.0963	0.0000
RESID(-1)^2	0.199241	0.074671	2.66825	0.0076
GARCH(-1)	0.697344	0.055968	12.4596	0.0000

接着, 进一步检验模型的残差是否存在 ARCH 效应。检验的结果如下表 7 所示。在 5%的显著性水平下认为拟合过后的模型不存在 ARCH 效应, 说明拟合是充分的。

Table 7. ARCH effect test for the GARCH (1, 1) model
表 7. GARCH (1, 1)模型的 ARCH 效应检验

Autocorrelation	Partial Correlation		AC	PAC	Q-Stat	Prob
		1	0.025	0.025	0.148	0.701
		2	0.014	0.014	0.199	0.905
		3	0.115	0.114	3.439	0.329
		4	-0.016	-0.022	3.501	0.478
		5	-0.053	-0.056	4.198	0.521
		6	0.021	0.011	4.311	0.635
		7	-0.01	-0.005	4.337	0.74
		8	-0.08	-0.069	5.929	0.655
		9	0.068	0.068	7.094	0.627
		10	0.127	0.129	11.156	0.346
		11	0.055	0.067	11.921	0.37
		12	-0.024	-0.053	12.073	0.44

因此, 长期平均方差 V_L 可根据上述结果计算得:

$$V_L = \frac{4.4 \times 10^{-5}}{1 - 0.199241 - 0.697344} = 0.000425 \quad (13)$$

故中证 1000 指数的日波动率为 2.0627%, 由此可得中证 1000 指数的年波动率为 32.0880%。

4.2. 定价参数一览

本文所用到的所有定价参数如表 8 所示。

Table 8. List of pricing parameters for numerical methods
表 8. 数值方法定价参数一览表

参数	S_0	$\underline{S}$	$\bar{S}$	r	μ_f	q	σ
含义取值	初始价格	敲入价格	敲出价格	无风险利率	票息率	分红率	波动率
	1	0.80	1.03	2.1166% ¹	20%	8.23%	32.088%

¹其中, 无风险利率取值为一年期国债到期的收益率, 数据来源于中国债券信息网, 为 2.1166%。

4.3. 蒙特卡洛模拟方法

蒙特卡洛的理论基础是伯努利大数定律，即随着试验次数的增大，事件 A 发生的频率与其概率 P 的偏差大于预先给定的精度 ε 的可能性越来越小，提供了用频率来确定概率的依据。

假设标的资产的价格变化路径服从几何布朗运动，由公式： $S_{t+dt} = S_t e^{\left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\sqrt{dt}\varepsilon}$ ，其中， $dB(t) = \sqrt{dt}\varepsilon$ ， $\varepsilon \sim N(0,1)$ 。我们得到下图 2 (为图片更加清晰，模拟路径数量设为 5000 条)：

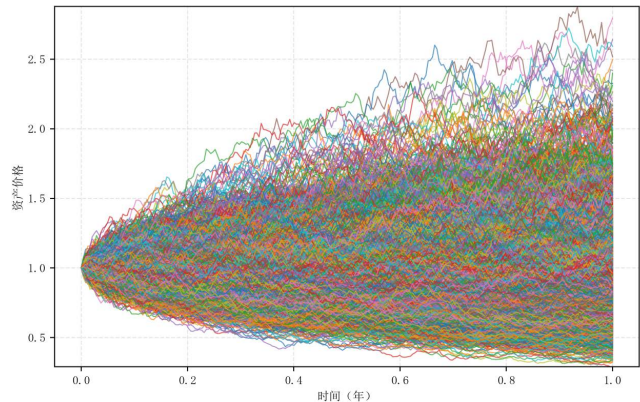


Figure 2. Simulated path of the underlying asset
图 2. 标的资产模拟路径

在已知雪球期权在风险中性测度下的定价公式为：

$$V(S_t, t) = E^* \left[e^{-r(T-t)} S_0 e^{\mu t} \cdot I_{T < \min(\tau^o, \tau^I)} + e^{-r(\tau^o - t)} S_0 e^{\mu \tau^o} \cdot I_{\tau^o \leq T} + e^{-r(\tau^I - t)} V^I(S_t, t) \cdot I_{\tau^I < \min(T, \tau^o)} \right] \quad (14)$$

的条件下，结合标的资产价格模拟路径，我们可以求出蒙特卡洛方法计算的雪球期权的价值为 0.9259。

蒙特卡洛模拟路径数在 100,000 条及以上时结果基本稳定，此论文涉及到蒙特卡洛计算过程中的模拟路径数都使用十万条。本文中的交易日个数参照 2024 年的中证 1000 股票期权，即 242 个交易日。

4.4. 有限差分方法

有限差分方法是一种数值求解微分方程的重要方法，核心思想是用差分(离散的差值)近似代替微分(连续的变化率)，将连续的微分方程转化为离散的代数方程进行求解。

如图 3 所示，假设求解区域为 $\{S_{\min} \leq S \leq S_{\max}, 0 \leq t \leq T\}$ ，然后对求解区域进行划分，将时间 T 划分为 N 份，间隔为 Δt ，则 $t_i = i \times \Delta t$ ，将 S 划分为 M 份，间隔为 ΔS ，则 $S_j = j \times \Delta S$ 。

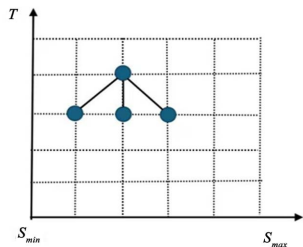


Figure 3. Schematic diagram of finite difference
图 3. 有限差分示意图

本文采用隐式格式的有限差分，隐式有限差分求解 PDE (偏微分方程)的过程的矩阵为：

$$\begin{pmatrix} b_1 & c_1 & & & \\ a_2 & b_2 & c_2 & & \\ & a_3 & b_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & a_{M-2} & b_{M-2} & c_{M-2} \\ & & & & a_{M-1} & b_{M-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i,1} \\ v_{i,2} \\ v_{i,3} \\ \vdots \\ v_{i,M-2} \\ v_{i,M-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_{i+1,1} \\ v_{i+1,2} \\ v_{i+1,3} \\ \vdots \\ v_{i+1,M-2} \\ v_{i+1,M-1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 v_{i,0} \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_{M-1} v_{i,M} \end{pmatrix} \quad (15)$$

根据上面矩阵得到如下的代数方程：

$$V_{i+1,j} = a_j V_{i,j-1} + b_j V_{i,j} + c_j V_{i,j+1} \quad (16)$$

采用欧拉中央差分格式代替偏微分方程中的微商：

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i,j}}{\Delta t} \quad (17)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{V_{i,j+1} - 2V_{i,j} + V_{i,j-1}}{\Delta S^2} \quad (18)$$

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \frac{V_{i,j+1} - V_{i,j-1}}{2\Delta S} \quad (19)$$

代入敲出连续观察情况的方程(2)或(4)可以求得系数：

$$\begin{cases} a_j = \frac{1}{2}(r-q)j \cdot \Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \cdot \Delta t \\ b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \cdot \Delta t + r \cdot \Delta t \\ c_j = -\frac{1}{2}(r-q)j \cdot \Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \end{cases} \quad (20)$$

代入敲出离散观察情况的方程(8)或(12)可以求得系数：

$$\begin{cases} a_j = \frac{1}{2} \left[(r-q) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] j \cdot \Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \\ b_j = 1 + \sigma^2 j^2 \Delta t + r \Delta t \\ c_j = -\frac{1}{2} \left[(r-q) - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] j \cdot \Delta t - \frac{1}{2}\sigma^2 j^2 \Delta t \end{cases} \quad (21)$$

用这种方法先求出 V^I ，再利用求得的 V^I 求出 V 。

4.5. 数值结果对比

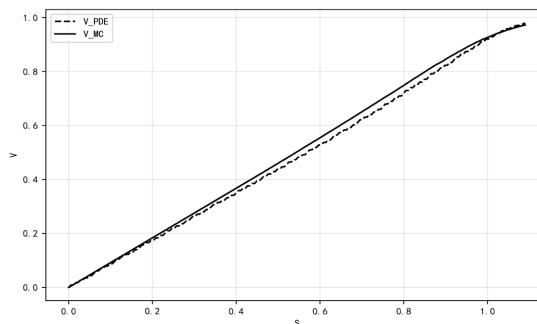


Figure 4. Verification of numerical solution for knock-out discrete observations

图 4. 敲出离散观察数值解验证

上图 4 为有限差分和蒙特卡洛数值解验证图，曲线轨迹基本重合，说明数值解求解结果基本一致，平均误差 0.0168，平均相对误差 2.0362%。由此可知，本文的定价结果准确，后续研究也是有意义的。

5. 雪球期权的性质

5.1. 各种情形发生概率占比

- 下表 9 是不同路径数量下各情形发生概率占比，由此表可得出以下几点结论：
- 1) 当模拟路径数量达到 5 万条及以上时，各情形发生的概率占比逐渐趋于稳定，表明大样本下模拟结果更具可靠性，能更准确反映实际概率分布。
 - 2) 直接敲出情形占比较高，达到 64.47%，但既未敲入也未敲出的概率极低，仅有 0.70%，且敲入后标的资产价格低于初始价格($S_t < S_0$)的情形占比大(28.82%) [3]，比敲入后标的资产价格高于初始价格的概率大 70 倍左右，反映出投资雪球持续获得高票息存在难度，同时赚钱的不确定性也较大。
 - 3) 一旦发生敲入，投资者面临较高的本金损失风险，很难通过敲出或标的资产价格回升来规避损失。

Table 9. Proportion of occurrence probabilities for each scenario under different path counts based on 2024 parameters
表 9. 2024 年参数下不同路径数量各情形发生概率占比

模拟路径数	既未敲入也未敲出	直接敲出	先敲入再敲出	敲入未敲出 ($S_t < S_0$)	敲入未敲出 ($S_t \geq S_0$)
10,000	0.66%	64.32%	5.96%	28.63%	0.43%
100,000	0.71%	64.50%	5.78%	28.63%	0.39%
500,000	0.71%	64.52%	5.66%	28.73%	0.38%
1,000,000	0.70%	64.47%	5.63%	28.82%	0.38%

5.2. 动态对冲

5.2.1. Delta 对冲[4]

- 1) 既未敲入也未敲出
- 卖出 1 份雪球期权期初的 Δ 为-0.8370。假设出售 1 万份雪球期权，应该买入 8898 份股指期货，花费 8369.89 元。无风险利率为 2.1166%，一天的利息收入大概为 0.485 元。1 天以后股票的价格降低至 0.9842 元每股。为了保持 Δ 中性，需要继续买入相应数量的期货，花费等也相应变化，同时一天的利息费用等也随之改变。后续随着标的资产价格的波动，不断调整买入或卖出的期货数量[2]，以此类推，具体可参考下表 10。

Table 10. Delta hedging simulation (neither knocked in nor knocked out)
表 10. Delta 对冲模拟(既未敲入也未敲出)

天数	S	delta	买入期货数量	买入期货费用	利息费用	累计现金流
1	1.0000	0.8370	8898.0	8369.89	0.49	8369.89
2	0.9842	0.8977	643.0	595.76	0.52	8966.13
3	1.0113	0.8065	-972.0	-924.85	0.47	8041.79
...	...	...	.	.	.	.
240	0.9413	0.0068	-3.0	-2.48	-0.15	-2651.10
241	0.9431	0.0019	-50.0	-46.68	-0.16	-2697.94
242	0.9699	0.0001	-18.0	-17.64	-0.16	-2715.74

雪球期权到期时，累计现金流为-2715.74 元，对冲收入 2715.74 元，支付 12,214 元，卖出期权和对冲的总费用为 9498.29 元，以 2.1166% 的无风险利率贴现到第一天为 9299.36 元，与期权的理论价值 9204.19 元差距约为 1.03%。

5.2.2. Gamma 对冲[5]

第一段公式 0 时刻构建一个投资组合：

$$\Pi = -V + x \cdot F + y \cdot C \tag{22}$$

方程组(令投资组合的 Δ_π 和 τ_π 均为 0，得)

$$\begin{cases} \Delta_\pi = -\Delta_V + x + y\Delta_C = 0 \\ \Gamma_\pi = -\Gamma_V + y\Gamma_C = 0 \end{cases} \tag{23}$$

解得的方程组

$$\begin{cases} x = -\frac{\Gamma_V}{\Gamma_C} \cdot \Delta_C + \Delta_V \\ y = \frac{\Gamma_V}{\Gamma_C} \end{cases} \tag{24}$$

标准欧式看涨期权的解

$$C = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)} N(d_2) \tag{25}$$

$$d_1 = \frac{\ln(S_t/K) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} \tag{26}$$

其中 S_t 为标的资产的价格， K 为行权价格， T 为合约到期时间， $N(\cdot)$ 是标准正态分布的累计概率分布函数。标准欧式看涨期权的 Delta、Gamma 的表达式为：

$$\text{delta} = N(d_1), \text{gamma} = \frac{N'(d_1)}{S_t \sigma \sqrt{T-t}} \tag{27}$$

Delta 对冲和 Gamma 对冲的效果对比如下表 11：

Table 11. Comparison of delta hedging errors and gamma hedging errors
表 11. Delta 对冲和 gamma 对冲误差对比

情形	既未敲入也未敲出	直接敲出	先敲入再敲出	敲入未敲出 ($S_t < S_0$)	敲入未敲出 ($S_t > S_0$)
delta 对冲误差	1.03%	-0.41%	1.21%	1.73%	-2.29%
gamma 对冲误差	0.12%	-3.61%	1.47%	4.63%	2.04%

从上表可以看出 Gamma 对冲的效果不一定比 Delta 对冲的效果好，这可能跟选取的路径以及对冲过程中期货数量和期权数量取整有关。但总体上看，对冲效果是非常符合预期的。

5.3. 由单路径扩展到多路径(以 delta 为例)

随机生成一万条标的资产模拟路径，算出各情景平均误差，由上表 12 可看出 delta 对冲结果良好。

Table 12. Delta hedging errors
表 12. Delta 对冲误差

情形	样本量(路径数)	发生概率	误差均值(%)
未敲入且未敲出	667	0.0667	0.94
直接敲出 (未敲入状态)	6720	0.672	1.01
先敲入后敲出	94	0.0094	1.23
敲入后未敲出($S_t < S_0$)	2468	0.2468	0.78
敲入后未敲出($S_t > S_0$)	51	0.0051	1.15
全样本	10,000	1	0.95

6. 雪球期权的投资分析

前文的定价研究基于风险中性测度，而实际投资决策需立足于现实测度。在风险中性测度下，标的资产增长率为 $(r-q)$ ；在现实测度中，标的资产增长率则为 $(\mu-q)$ 。本章通过蒙特卡洛模拟生成 10 万条标的资产价格路径，模拟不同 μ 、 σ 组合，分析雪球期权在牛市、熊市、震荡市三类典型市场环境下的投资表现[2]。

为精准刻画投资表现，本章通过计算平均收益(平均 Payoff)与收益率评估投资回报，其中收益率计算公式为：收益率 = (平均 Payoff - 期权价值)/期权价值；同时，通过统计各市场情形下不同结果的发生概率，深入剖析投资表现背后的驱动逻辑。

6.1. 牛市环境下的投资表现分析

当市场处于前景较好，预期大涨时称之为牛市。在本节分析中，我们保持 $\sigma = 0.15$ ，其他参数恒定，调整 μ 值，观察雪球期权的投资成效及结果概率分布，具体数据如表 13 与表 14 所示。

Table 13. Investment performance of bull market snowball options
表 13. 牛市下雪球期权的投资表现

μ	平均 Payoff	收益率(%)
0.06	1.0524	8.50
0.08	1.0583	9.10
0.10	1.0626	9.55
0.12	1.0654	9.84
0.15	1.0671	10.01
0.20	1.0651	9.80
0.25	1.0602	9.30
0.30	1.0539	8.65

Table 14. Probability of various scenarios for bull market snowball options
表 14. 牛市下雪球期权的各种情形发生概率

μ	未敲入未敲出	直接敲出	先敲入后敲出	敲入未敲出($S_t < S_0$)	敲入未敲出($S_t > S_0$)
0.06	20.44	64.97	0.06	14.48	0.05
0.08	19.33	68.63	0.06	11.93	0.05

续表

0.10	17.97	72.23	0.07	9.69	0.05
0.12	16.46	75.66	0.07	7.77	0.04
0.15	14.04	80.37	0.08	5.48	0.03
0.20	9.86	87.06	0.06	2.98	0.04
0.25	6.33	92.15	0.06	1.43	0.03
0.30	3.75	95.55	0.05	0.63	0.02

由表 13 可知, 随着 μ 的提升, 雪球期权的平均 Payoff 与收益率呈现“先上升后下降”的规律, μ 从 0.06 至 0.15 时, 平均 Payoff 从 1.0524 升至 1.0671, 收益率从 8.50% 提升至 10.01%, 达到收益峰值。有效降低了“敲入未敲出($S_t < S_0$)”的概率(从 14.48% 降至 5.48%), 减少了投资者本金损失风险。 μ 从 0.15 增至 0.30 时, 平均 Payoff 从 1.0671 降至 1.0539, 收益率从 10.01% 回落至 8.65%。 μ 过高导致“直接敲出”概率激增(从 80.37% 升至 95.55%), 期权提前终止, 投资者失去后续“滚雪球”获取更高票息的机会; 同时“既未敲入也未敲出”概率大幅下降(从 14.04% 降至 3.75%), 进一步削弱了长期收益潜力, 最终导致收益回落。

6.2. 熊市环境下的投资表现分析

当市场处于前景较差, 预期大跌时称之为熊市。保持 $\sigma = 0.25$, 其他参数恒定, 调整 μ 值(-0.06 到 -0.3), 观察雪球期权的投资成效及结果概率分布, 发现熊市中雪球期权的投资表现与结果概率变化高度关联: 随 μ 减小, 平均 Payoff 减少, 收益率降低, 损失随熊市加剧显著扩大。有利结果(直接敲出、先敲入后敲出)合计占比从 58.91% 降至 35.61%, 收益来源大幅萎缩; 而不利结果(敲入未敲出 $S_t < S_0$) 概率升至 62.75%, 成为主要结果类型, 且敲入后 S_t 回升至 S_0 以上的概率仅 0.08%~0.28%, 本金损失几乎无法挽回; 中性结果(既未敲入也未敲出)始终维持 1.56%~3.28% 的低水平, 对收益无实质影响。

6.3. 震荡市环境下的投资表现分析

震荡市的核心特征是标的资产价格无明确长期趋势, 围绕某一区间波动, 对应现实测度中 $\mu = 0$ 且 $\sigma > 0$ 。本节在 $\mu = 0$ 、其他参数不变的条件下, 通过调整 σ 值, 分析雪球期权的投资表现及结果概率分布, 具体数据如表 15 与表 16 所示。

Table 15. Investment performance of snowball options in a volatile market
表 15. 震荡市下雪球期权的投资表现

σ	平均 Payoff	收益率(%)
0.15	1.0250	4.72
0.16	1.0133	3.53
0.17	1.0034	2.52
0.18	0.9944	1.60
0.19	0.9865	0.79
0.21	0.9736	-0.53
0.23	0.9635	-1.56
0.25	0.9557	-2.36

Table 16. Probability of various scenarios for snowball options in a volatile market
表 16. 震荡市下雪球期权的各种情形发生概率

σ	未敲入未敲出	直接敲出	先敲入后敲出	敲入未敲出($S_t < S_0$)	敲入未敲出($S_t \geq S_0$)
0.15	22.37	48.60	5.05	23.94	0.04
0.16	18.86	49.21	6.31	25.56	0.06
0.17	15.93	49.55	7.57	26.86	0.09
0.18	13.32	49.59	8.97	28.00	0.12
0.19	11.08	49.47	10.38	28.93	0.15
0.21	7.58	48.66	13.31	30.23	0.22
0.23	5.13	47.33	16.28	31.00	0.27
0.25	3.39	45.59	19.36	31.34	0.33

由表 15 可知, 随 σ 增大(市场波动加剧), 雪球期权平均 Payoff 与收益率持续递减: 收益由正转负临界点在 $\sigma = 0.19 \sim 0.21$ 之间。震荡市中, 波动幅度决定“敲入”“敲出”概率平衡, 低波动易维持“不敲入不敲出”或“直接敲出”, 高波动更易触发“敲入”, 推升损失风险。结合表 16, 波动对结果概率的影响清晰: 有利结果合计占比升至 64.95%, 但直接敲出概率先升后降, 先敲入后敲出概率虽显著上升, 却因收益低、需承担短期风险, 实际贡献有限; 不利结果概率升至 31.34%, 是收益恶化核心因素; 中性结果概率降至 3.39%, 高波动下期权难长期持有, “滚雪球”获高票息可能性骤降。

综合牛市、熊市、震荡市的分析结果, 雪球期权的投资表现具有显著的市场环境依赖性, 具体总结如下: 雪球期权并非“普适性”投资工具, 其最优适配场景为轻微震荡市($\sigma < 0.19$)或温和牛市($\mu = 0.12 \sim 0.15$, σ 小); 在熊市或重度震荡市中, 其本金损失风险极高, 需严格规避。投资者在决策前需精准判断市场环境(μ 与 σ 组合), 并结合自身风险承受能力与投资周期选择是否参与。

7. 本文创新点

- 1) 将随机过程条件期望转化为偏微分方程, 用欧拉中央差分转化为离散的代数方程, 进行有限差分的数值求解。
- 2) 通过有限差分法对雪球期权价值变化的偏微分方程进行离散化处理, 同时利用蒙特卡洛模拟在处理复杂随机过程方面的优势, 弥补有限差分法在高维或复杂边界条件下的不足, 提升定价精度与效率。
- 3) 利用蒙特卡洛模拟生成大量不同市场环境下的样本, 分析雪球期权价值在不同市场波动、趋势等情况下的分布, 更全面揭示雪球期权的风险收益特征。
- 4) 本文进一步深入研究了雪球期权的风险管理问题, 利用股指期货对其进行了 δ 动态对冲。

8. 全文总结

本文通过分析雪球期权四种收益情景, 写出了风险中性测度下雪球期权敲出离散观察的收益期望表达式。根据数据确定参数, 利用蒙特卡洛和有限差分的算法求解数值解。本文进行了一系列的风险分析, 得到如下结论: 敲入价格越大期权价值越低; 敲出价格变大时在期权价值是先减小后增大; 无风险利率越大期权价值越小; 波动率越大期权价值越大。本文模拟了五种情形下的 δ 对冲和 γ 对冲, 并进行对比分析。最后根据雪球在不同市场下的投资表现, 得出雪球适合牛市及轻微震荡的震荡市的结论。

致 谢

本研究的顺利完成, 离不开王苏鑫教授的悉心指导。您的言传身教, 是我们学术道路上最宝贵的财

富，这份教诲将伴随我们继续前行。前路漫漫，这份温暖与力量，我们将永远铭记。

基金项目

本项目由中国民航大学大学生创新训练计划项目 202510059169 支持。

参考文献

- [1] 胡一帆. 基于 Black-Scholes 期权定价模型的可转换债券定价问题的实证分析[J]. 中国国际财经(中英文), 2016(22): 105-108.
- [2] 程惠. 基于偏微分方程模型的雪球期权定价研究[D]: [硕士学位论文]. 苏州: 苏州大学, 2023.
- [3] 陈长兴. 雪球结构型理财产品的定价研究——以长江证券“瑞雪丰盈 1 号”为例[D]: [硕士学位论文]. 南昌: 江西财经大学, 2022.
- [4] 郑祥, 韦勇凤. 基于 Merton 模型与 Monte Carlo 模拟的障碍期权定价对冲[J]. 中国科学技术大学学报, 2018, 48(11): 906-922.
- [5] 黄道增. 基于 B-S 模型的期权交易风险防范策略[J]. 台州学院学报, 2012, 34(3): 1-4+10.