Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(11), 161-168
Published Online November 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1511278

Hans汉斯

超复积分变换与Paley-Wiener定理

崔煜嘉

天津师范大学数学科学学院，天津

收稿日期：2025年10月15日；录用日期：2025年11月10日；发布日期：2025年11月18日

摘　要

本文基于实Paley-Wiener定理，展示了一种不涉及域移动的方法，将实Paley-Wiener定理推广为复Paley-Wiener定理，该方法也同样可以有效地应用于其他傅里叶型变换。通过研究CK延拓的基本性质和运算规则以及Paley-Wiener定理在余维数为1的空间结构进行分析，发现了CK延拓可以保持函数的一些单演性，在此基础上进一步推广出余维数为p的Paley-Wiener定理。

关键词

Paley-Wiener定理，CK延拓，Hardy空间，余维数

Hypercomplex Integral Transform and Paley-Wiener Theorem

Xinjia Cui

College of Mathematical Science, Tianjin Normal University, Tianjin

Received: October 15, 2025; accepted: November 10, 2025; published: November 18, 2025

Abstract

Based on the real Paley-Wiener Theorem, this paper presents a method that does not involve domain shifting, which extends the real Paley-Wiener Theorem to the complex Paley-Wiener Theorem. This method can also be effectively applied to other Fourier-type transforms. By investigating the basic properties and operation rules of CK extension, as well as analyzing the Paley-Wiener Theorem in the spatial structure with codimension 1, it is found that CK extension can preserve some monogenicity of functions. On this basis, the Paley-Wiener Theorem with codimension p is further generalized.

Keywords

Paley-Wiener Theorem, CK Extension, Hardy Space, Codimension

文章引用: 崔煜嘉. 超复积分变换与 Paley-Wiener 定理[J]. 理论数学, 2025, 15(11): 161-168.
DOI: 10.12677/pm.2025.1511278

1. 引言

Paley-Wiener 定理的核心目标是：建立时域函数的紧支撑性与频域傅里叶变换的解析延拓性质之间的等价关系，从而在傅里叶分析与复分析之间架起桥梁。从[1]中可知 1934 年，英国数学家拉尔夫佩利(Ralph Paley)和美国数学家诺伯特维纳(Norbert Wiener)在合著的复数域傅里叶变换中正式提出 Paley-Wiener 定理。从[2]中可知 Hardy 空间、Bernstein 空间和 Paley-Wiener 定理是复分析和傅里叶分析中的基本概念，Paley-Wiener 定理将解析函数的点向增长率与其边值的傅里叶变换的支撑联系起来。围绕这些空间的思想圈已经有着悠久的历史，并且在复值函数的分析和处理中得到了应用，包括相位检索和瞬时频率。

余维数为 p 的 Paley-Wiener 定理其通过将紧支集概念推广至 p 维子流形上的紧支集，为高维数据的频域分析提供了数学基础。在信号处理领域，该定理可直接用于设计适配 p 维噪声分布的滤波器[3]；在非交换调和分析中，结合局部紧群的表示理论，已成功解决半单李群上的球面变换刻画问题，推动了群上信号重构的理论突破[4]。

本文研究了在余维数为 p 的高维空间中的 Paley-Wiener 定理，CK 延拓是一种重要的函数延拓方法，在余维数为 1 的情况下，首先研究了 CK 延拓的基本性质和运算规则。通过对余维数为 1 的空间结构进行分析，发现 CK 延拓可以保持函数的一些单演性，并通过余维数为 1 的 CK 延拓的基础上进一步推广余维数为 p 的 Paley-Wiener 定理。

2. 预备知识

Paley-Wiener 定理是一类通过支集与增长性的关联来刻画函数空间或分布空间在傅里叶型变换下像集的定理。最开始的 Paley-Wiener 定理指出，实直线上支集含于对称区间内的 L^2 函数，其傅里叶变换是指数型整函数，且这类整函数在实直线上的限制仍为 L^2 函数。

若 f 是 $\mathbb{R}^d$ 上光滑且具有紧支集的函数，其傅里叶变换为 $\mathcal{F}f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}$ 则 $\mathcal{F}f$ 可以延拓为 $\mathbb{C}^d$ 上的整函数，并且满足对于每个非负整数 n 均存在常数 C_n 使得

$$\left|\mathcal{F}f\left(z\right)\right|\le C_n\left(1+\left|z\right|\right)^{-n}\mathrm{e}^{H_A(\mathrm{Im}\,z)}\quad\left(z\in\mathbb{C}^d\right),$$

其中，A 是函数 f 支集的凸包，而 $H_A:\mathbb{R}^d\to\mathbb{R}$ 是 A 的支撑函数，它通过标准内积定义为

$$H_A\left(x\right)=\max_{a\in A}a\cdot x\text{。}$$

设 $Cl_{0,n}$ 为符号差为 $(0,n)$ 的克利福德代数，由 $\mathbb{R}^n$ 的基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 生成，并且满足反交换关系 $e_je_k+e_ke_j=-2\delta_{jk}$ 其中 $j,k=1,2,\cdots,n.$

特别的对于 $\mathbb{R}^n$ 中的向量 $x=\left(x_1,x_2,\cdots,x_n\right)$ 和 $\xi=\left(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\right)$ 可以表示为以下线性组合

$$x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j\quad\xi=\sum_{j=1}^{n}\xi_je_j\text{，}$$

而 $\mathbb{R}^n$ 中的 x 与 ξ 的欧几里德内积可以表示为

$$\left\langle x,\xi\right\rangle=\sum_{j=1}^{n}x_j\xi_j\in\mathbb{R}\text{，}$$

可以通过反交换子恒等式表示

$$\langle x,\xi\rangle=-\frac{1}{2}(x\xi+\xi x),$$

令

$$\mathbb{R}^m=\{x=x_1e_1+\cdots+x_me_m:x_j\in\mathbb{R},j=1,2,\cdots,m\},$$

以及

$$\mathbb{R}^{m+1}=\{x=x_0+x:x_0\in\mathbb{R},x\in\mathbb{R}^m\},$$

分别称为齐次欧几里得空间与非齐次欧几里得空间。

CK 延拓的核心结论是：在特定条件下，解析函数的部分边界值信息可唯一确定其在更大区域内的解析延拓，且延拓结果由边界值的相容性条件决定。标准的 CK 延拓表明 $\mathbb{R}^q$ 中开集 Q 内的任何实解析函数都可延拓为 $\mathbb{R}^m$ 中包含 Q 的开集上的单侧单演函数，这被视为非齐次余维数为 1 的 CK 延拓。对于齐次余维数为 p 的 CK 延拓，它能将 $\mathbb{R}^q$ 中开集 Q 内的任何实解析函数延拓为齐次空间中包含集合 Q 的开集上的单侧单演函数。当 $p=1$时，就简化为从 $\mathbb{R}^q$ 到 $\mathbb{R}^{q+1}$ 的齐次余维数为 1 的 CK 延拓。

定义在 R^m 上的函数的傅里叶变换为

$$f(\underline{\xi})=\int_{R^m}\mathrm{e}^{-i(\underline{x}\cdot\underline{\xi})}f(\underline{x})\mathrm{d}\underline{x},$$

傅里叶逆变换为

$$g(\underline{x})=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{R^m}\mathrm{e}^{i(\underline{x}\cdot\underline{\xi})}g(\underline{\xi})\mathrm{d}\underline{\xi},$$

其中

$$\underline{\xi}=\xi_1e_1+\cdots+\xi_me_m,$$

为将傅里叶变换的定义域延拓到 R^m，我们首先需要延拓指数函数 $\mathrm{e}^{i\langle\underline{x},\xi\rangle}$，令 $x=x_0e_0+\underline{x}$。

则

$$e(x,\underline{\xi})=\mathrm{e}^{i\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle}\mathrm{e}^{-x_0|\underline{\xi}|}\chi_+(\underline{\xi})+\mathrm{e}^{i\langle\underline{x},\underline{\xi}\rangle}\mathrm{e}^{x_0|\underline{\xi}|}\chi_-(\underline{\xi}),$$

其中

$$\chi_\pm(\underline{\xi})=\frac{1}{2}\left(1\pm i\frac{\underline{\xi}e_0}{|\underline{\xi}|}\right),$$

从而可以得到 $\chi_\pm$ 满足下面性质

$$\chi_-\chi_+=\chi_+\chi_-=0,\ \chi_\pm^2=\chi_\pm,\ \chi_++\chi_-=1。$$

3. Hardy 空间

我们在高维空间研究克利福德傅里叶变换时，对于克利福德傅里叶变换的核函数难以进行精确的求解，然而许多的性质可以通过算子定义推导得出，对于函数 $f:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}_{(d)}$，其克利福德傅里叶变换由

$$\mathcal{F}^{\pm}f(\zeta)=\int_{\mathbb{R}^d}C_\pm(x,\zeta)f(x)\mathrm{d}x,$$

的积分给出，与经典的傅里叶变换类似，克利福德傅里叶变换可以延拓为平方可积函数空间上的酉算子。

Hardy 空间 $H_{\pm}^{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ 定义为 $L^{2}\left(\mathbb{R}^{d},\mathbb{C}(d)\right)$ 空间上的投影算子的像，具体而言，若柯西变换 $\mathcal{C}$ 在 $L^{2}\left(\mathbb{R}^{d},\mathbb{C}(d)\right)$ 空间上通过卷积定义为

$$\mathcal{C}f\left(y+t\right)=\int_{\mathbb{R}^{d}}G\left(x-y,t\right)f\left(x\right)\mathrm{d}x,$$

$$G\left(x,t\right)=\frac{1}{\sigma_{d+1}}\frac{x+t}{\left|x+t\right|^{d+1}},$$

是 $\mathbb{R}^{d+1}$ 维欧几里德空间中狄拉克算子的格林函数，并且

$$\sigma_{d+1}=\frac{2\pi^{(d+1)/2}}{\Gamma\left((d+1)/2\right)},$$

是 $\mathbb{R}^{d}$ 维欧几里得空间中单位球的表面积，从而 Hardy 空间可以表示为

$$H_{\pm}^{2}\left(\mathbb{R}^{d}\right)=P_{\pm}\left(L^{2}\left(\mathbb{R}^{d},\mathbb{C}_{(d)}\right)\right),$$

其中

$$P_{-}f\left(x\right)=-\lim_{t\to 0}\mathcal{C}f\left(x-t\right)。$$

定义 1 函数 $f\in L^{2}\left(\mathbb{R}^{d},\mathbb{C}\right)$ 属于 Hardy 空间 H_{+}^{2} 当且仅当 f 具有唯一的单演延拓 $u:\mathbb{R}_{+}^{d+1}\to\mathbb{C}$ 并且该延拓满足

$$Sup_{t>0}\int_{\mathbb{R}^{d}}\left|u\left(x+t\right)\right|^{2}\mathrm{d}x\le\left\|f\right\|^{2},$$

同理若 $f\in H_{-}^{2}$ 当且仅当 f 存在唯一的单演延拓 $u:\mathbb{R}_{-}^{d+1}\to\mathbb{C}_{(d)}$ 并且该延拓满足

$$Sup_{t<0}\int_{\mathbb{R}^{d}}\left|u\left(x+t\right)\right|^{2}\mathrm{d}x\le\left\|f\right\|^{2}。$$

4. 复 Paley-Wiener 定理

在有些情况下，无法通过区域平移为某个积分变换证明复 Paley-Wiener 定理，原因是被积函数并非整函数，在这种情况下我们可以通过实 Paley-Wiener 定理推导出复 Paley-Wiener 定理。

定理 1 设 P 是具有实系数的齐次多项式 $f\in\mathcal{S}\left(\mathbb{R}^{d}\right)$ 并且 $1\le p\le\infty$，则在扩张的正实数范围内

$$\liminf_{n\to\infty}\left\|P\left(\partial\right)^{n}f\right\|_{p}^{1/n}\ge R\left(P,\mathcal{F}f\right)。$$

证明 让 $\lambda_{0}\in\operatorname{supp}\mathcal{F}f$ 并假设 $P\left(i\lambda_{0}\right)\neq 0$，选取固定的 $\varepsilon>0$ 并且 $0<\varepsilon<\left|P\left(i\lambda_{0}\right)\right|$ 我们能够到 $\liminf_{n\to\infty}\left\|P\left(\partial\right)^{n}f\right\|_{p}^{1/n}\ge\left|P\left(i\lambda_{0}\right)\right|-\varepsilon$。

对 $j\in\left\{0,1,2,3\right\}$，

$$\psi_{j}\left(\lambda\right)=\overline{\mathcal{F}\left(P\left(\partial\right)^{j}f\right)\left(\lambda\right)}\quad\left(\lambda\in\mathbb{R}^{d}\right),$$

我们通过 Holder 不等式可以得到

$$\begin{aligned}
&\left\|P(\partial)^{4n+j} f\right\|_p \left\|\mathcal{F}\psi_j\right\|_q \\
&\geq \left|\left\langle P(\partial)^{4n+j} f, \mathcal{F}\psi_j \right\rangle\right| \\
&= \left|\left\langle \mathcal{F}\left(P(\partial)^{4n+j} f\right), \psi_j \right\rangle\right| \\
&= \left|\int_{\mathbb{R}^d} P(i\lambda)^{4n} \mathcal{F}\left(P(\partial)^j f\right)(\lambda)\psi_j(\lambda)\mathrm{d}\lambda\right| \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} \left|P(i\lambda)\right|^{4n} \left|\mathcal{F}\left(P(\partial)^j f\right)\right|^2 \mathrm{d}\lambda \\
&\geq \left(\left|P(i\lambda_0)\right| - \varepsilon\right)^{4n} \int_{\left\{\lambda:\left|P(i\lambda)\right|\geq\left|P(i\lambda_0)\right|-\varepsilon\right\}} \left|P(i\lambda)^{2j}\right| \left|\mathcal{F}f(\lambda)\right|^2 \mathrm{d}\lambda
\end{aligned}$$

证毕。

定义 2 [5]设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 的子集，$f:\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$，若 f 满足以下两个条件，则称 f 是 $\mathbb{C}^d$ 上对应于集合 A 的指数型整函数：

(1) 在 $\mathbb{C}^d$ 上处处解析；

(2) 存在一个正常数 C 满足 $\left|f(z)\right| \leq C\mathrm{e}^{H_A(\mathrm{Im}\, z)}$ $\left(z \in \mathbb{C}^d\right)$。

定理 2 设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 的一个非空对称子集，f 是 $\mathbb{C}^d$ 上对应于 A 的指数型整函数，则对所有的 $\xi \in \mathbb{R}^d$ 和 $n \in \mathbb{N}$，偏导数 $\partial_\xi^n f$ 在 $\mathbb{R}^d$ 上有界且满足

$$\limsup_{n\to\infty} \left\|\partial_\xi^n f\right\|_\infty^{1/n} \leq H_A(\xi)。$$

证明：由柯西定理

$$\partial_\xi^n f(x) = \left.\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\right|_{t=0} \left\{t \mapsto f(x+t\xi)\right\} = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{|t|=r} \frac{f(x+t\xi)}{t^{n+1}}\mathrm{d}t \quad \left(x \in \mathbb{R}^d\right),$$

我们可以得到

$$\left|\partial_\xi^n f(x)\right| \leq C\frac{n!}{r^n}\mathrm{e}^{\max_{a\in A}|t|} = r^{a\cdot \mathrm{Im}(t\xi)} = C\frac{n!}{r^n}\mathrm{e}^{r\max_{a\in A}|a\cdot\xi|} = C\frac{n!}{r^n}\mathrm{e}^{rH_A(\xi)},$$

其中最后一个等号用到了 A 的对称性。

故可以得到

$$\left\|\partial_\xi^n f\right\|_\infty \leq C\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^n}\left(H_A(\xi)\right)^n。$$

证毕。

定理 3 设 A 是 $\mathbb{R}^d$ 上的一个非空紧凸对称子集，$f:\mathbb{C}^d \to \mathbb{C}$，则以下条件等价

(a) f 是某个支集含于 A 的光滑函数的傅里叶变换。

(b) f 可延拓为 $\mathbb{C}^d$ 上对应于 A 的指数型整函数。

证明：假设 f 是 $\mathbb{C}^d$ 上对应于 A 的指数型整函数，若存在 $\lambda_0 \in \mathrm{supp}\,\mathcal{F}f$ 但是 $\lambda_0 \notin A$。

由于 A 是凸闭集，λ_0 是凸紧集，则根据分离性结果，存在 $\xi_0 \in \mathbb{R}^d$ 有 $\lambda_0 \cdot \xi_0 > H_A(\xi_0)$。

从而

$$\begin{aligned}
\sup_{\lambda\in\mathrm{supp}\,\mathcal{F}f} \left|\lambda\cdot\xi_0\right| &= \sup_{\lambda\in\mathrm{supp}\,\mathcal{F}f} \left|P_{\xi_0}(i\lambda)\right| \leq \liminf_{n\to\infty} \left\|\partial_{\xi_0}^n f\right\|_\infty^{1/n} \\
&\leq \limsup_{n\to\infty} \left\|\partial_{\xi_0}^n f\right\|_\infty^{1/n} \leq H_A(\xi_0),
\end{aligned}$$

因此

$$H_A(\xi_0)<\lambda_0\cdot\xi_0\le|\lambda_0\cdot\xi_0|\le H_A(\xi_0)。$$

从而矛盾，证毕。

5. 余维数为 p 的 Paley-Wiener 定理

定理 4 [6] F 是定义在 $\mathbb{R}^q$ 的解析函数，在 $\mathbb{C}^{(q)}$ 上取值且 $F\in L^2(\mathbb{R}^q)$，令 Ω 为正实数，则以下两个条件等价：

(1) F 可左单演延拓为定义在 $\mathbb{R}_1^q$ 上的函数记为 f，且存在常数 C 使得对任意 $m\in\mathbb{R}_1^q$ 有

$$|f(m)|\le Ce^{\Omega|m|},$$

(2) $\mathrm{supp}(\hat{F})\subset\bar{B}(0,\Omega)$。

此外，若上述条件之一成立，则有

$$f(m)=\frac{1}{(2\pi)^q}\int_{\mathbb{R}^q}e(m,,\underline{\xi})\hat{F}(\underline{\xi})\mathrm{d}\underline{\xi},\quad m\in\mathbb{R}_1^q,$$

其中 $e(m,\xi)$ 是(1)中 $e_0=1$ 的情况。

引理 1 ([7]次余维数为 1 的 Paley-Wiener 定理)设 F 是定义在 $\mathbb{R}^q$ 上的解析函数在 $\mathbb{C}^{(q)}$ 上取值，通过 $e_2,\cdots,e_{q+1}$ 建立复克里福德代数且 $F\in L^2(\mathbb{R}^q)$，Ω 为正实数，则以下两个条件等价：

(1) F 是定义在 $\mathbb{R}^{q+1}$ 上的左单演函数记为 f，且存在常数 C 使得对任意 $x_1\in\mathbb{R}$ 并且 $m\in\mathbb{R}^q$ 有 $|f(x_1e_1,\underline{y})|\le Ce^{\Omega|x_1e_1+\underline{y}|}$，

(2) $\mathrm{supp}(\hat{F})\subset\bar{B}(0,\Omega)$。

若上述条件之一成立则有

$$f(x_1e_1,\underline{y})=\frac{1}{(2\pi)^q}\int_{R^q}e(x_1e_1,\underline{y},\underline{t})\hat{F}(\underline{t})\mathrm{d}\underline{t},\quad x_1\in R,\underline{y}\in R^q.$$

引理 2 [7]

$$\partial x^n=\partial x_1^{n_1}\cdots\partial x_l^{n_l},\ |n|=n_1+n_2+\cdots+n_l,$$

其中 $n=(n_1,\cdots,n_l)\in N^l$。

令

$$E(\underline{x})=\frac{\overline{x}}{|\underline{x}|^2},\quad \underline{x}\in R^l,$$

则

$$\left|\frac{\partial^{|n|}}{\partial x^n}E(\underline{x})\right|\le\frac{(l-1)l\cdots(l+|n|-2)}{|\underline{x}|^{l+|n|-1}}.$$

定理 5 (齐次余维数为 p 的 Paley-Wiener 定理)设 F 是定义在 R^q 上的解析函数，在 $\mathbb{C}^{(q)}$ 上进行取值，$\mathbb{C}^{(q)}$ 由 $e_{p+1},\cdots,e_{p+q}$ 并且 $F\in L^2(R^q)$，Ω 是一个正实数，则下面两条等价：

(1) F 是一个到 R^{p+q} 的齐次余维数为 p 的 CK 延拓，记为 f 存在常数 C 使得

$$\left|f\left(\underline{x},y\right)\right|\le Ce^{\Omega|\underline{x}|}\quad x\in\mathbb{R}^p,y\in\mathbb{R}^q,$$

(2) $\mathrm{supp}\left(\hat{F}\right)\subset\bar{B}\left(0,\Omega\right)$。

此外若上述条件之一成立，则

$$f\left(\underline{x},\underline{y}\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^q}\int_{\mathbb{R}^q}e^{i\underline{t}\cdot\left(\underline{x},\underline{y},t\right)}\hat{F}\left(t\right)\mathrm{d}t\quad x\in\mathbb{R}^p,y\in\mathbb{R}^q。$$

证明：(2)→(1)

令

$$G\left(x,y\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^q}\int_{R^q}\varepsilon_1^p\left(x,y,t\right)\hat{F}\left(t\right)\mathrm{d}t,$$

对于$\mathrm{supp}\left(F\right)\subset\bar{B}\left(0,\Omega\right)$，我们有

$$G\left(x,y\right)=\frac{1}{\left(2\pi\right)^q}\int_{\bar{B}(0,\Omega)}\sigma_1^p\left(x,y,\underline{t}\right)\hat{F}\left(\underline{t}\right)\mathrm{d}\underline{t}。$$

由引理 1 我们可以得到

$$\left|G\left(x,y\right)\right|\le C\left\|F\right\|_2e^{\Omega|x|}\left\|x_{\bar{B}(0,\Omega)}\right\|_2\le Ce^{\Omega|x|}\qquad\underline{x}\in R^p\quad\underline{y}\in R^q.$$

由于ε_1^p是$e^{i\langle y,t\rangle}$上的排位 CK 延拓，$G\left(x,y\right)$是$F\left(y\right)$的余维数为 p 的 CK 延拓，由于$G\left(x,y\right)$和$f\left(x,y\right)$都是R^q上同一函数$F\left(y\right)$得到的余维数为 p 得 CK 延拓，故它们在R^{p+q}上必定恒等。

下证：(1)→(2)

令$f\left(x,y\right)$是一个左单演函数由柯西公式可以得到

$$f\left(x,y\right)=\frac{1}{\omega_{t-1}}\int_{\partial B(x+y,\rho)}E\left(m-\left(x+y\right)\right)\mathrm{d}\sigma\left(m\right)f\left(m\right)$$

其中ρ为一个正实数。

由引理 2 以及定理 5 中$f\left(x,y\right)\le Ce^{\Omega|x|}$可以得到

$$\left|\partial_y^lf\left(0,y\right)\right|\le C\frac{\left(t-1\right)t\cdots\left(t+l-2\right)}{\rho^l}e^{\Omega\rho}。\tag{1}$$

若f_1是 1 维的齐次 CK 延拓并且$f\left(0,y\right)=f_1\left(0,y\right)$则由(1)可以得到

$$\left|f_1\left(x_1e_1,y\right)\right|\le\sum_{l=0}\left|f_1\left(x_1e_1,y\right)\right|\le\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left|x_1\right|^l\left|\partial_y^l\left|f\left(0,y\right)\right|\right]}{l!}\le\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left|x_1\right|^l\left(t-1\right)t\cdots\left(t+l-2\right)}{l!\rho^l}e^{\Omega\rho}.\tag{2}$$

对于任意$\varepsilon>0$让$l_0=\left[2\Omega\left(m-2\right)/\varepsilon\right]+1$。若$l>l_0$则有$1+\left(m-2\right)/l<1+\varepsilon/2\Omega$。从而由(2)可以得到

$$\begin{aligned}\left|f_1\left(x_1e_1,y\right)\right|&\le C\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\left|x_1\right|^l\left(t-1\right)t\cdots\left(t+l-2\right)}{l!\rho^l}e^{\Omega\rho}\\&\le C\sum_{l=0}^{l_0}\frac{\left|x_1\right|^l\left(t-1\right)t\cdots\left(t+l-2\right)}{l!\rho^l}e^{\Omega\rho}+C_\varepsilon\sum_{l=l_0}^{\infty}\frac{\left|x_1\right|^l\left(1+\varepsilon/2\Omega\right)^{l-l_0}}{\rho^{t+l-1}}e^{\Omega\rho}.\end{aligned}$$

其中$C_\varepsilon=\left(t-1\right)\left(t/2\right)\cdots\left(t+l_0-2\right)/l_0$。

我们让$\rho=\left|x_1\right|\left(1+\varepsilon/\Omega\right)$则有

$$\left|f_1\left(x_1e_1,y\right)\right|\le C_\varepsilon \mathrm{e}^{(\Omega+\varepsilon)|x_1|}\text{。} \tag{3}$$

令 $A_0\left(y\right)=F\left(y\right)$，$f_1\left(x_1e_1,y\right)$是满足 $f\left(0,y\right)=\varphi\left(y\right)=f\left(0,y\right)$ 的齐次余维数为 1 的 CK 延拓，由(3)可知对任意 $\varepsilon>0,x\in\mathbb{R}^p,y\in\mathbb{R}^q$ 有

$$\left|f\left(x_1e_1,\cdots,x_pe_p,y\right)\right|\le C\mathrm{e}^{(\Omega+\varepsilon)|x|}<C\mathrm{e}^{(\Omega+\varepsilon)\|(x,y)\|}\text{。}$$

通过引理 1 我们可以得到 $\mathrm{supp}\left(\hat{F}\right)\subset B\left(0,\Omega+\varepsilon\right)$，令 $\varepsilon\to 0$ 我们可以得到 $\mathrm{supp}\left(\hat{F}\right)\subset B\left(0,\Omega\right)$，从而得证。

参考文献

[1] Andersen, N.B. (2004) Real Paley—Wiener Theorems. *Bulletin of the London Mathematical Society*, **36**, 504-508. https://doi.org/10.1112/s0024609304003108

[2] Delanghe, R., Sommen, F. and Soucek, V. (2012) Clifford Algebra and Spinor-Valued Functions: A Function Theory for the Dirac Operator (Mathematics and Its Applications). Springer.

[3] Kou, K.I. and Qian, T. (2002) The Paley-Wiener Theorem in Rn with the Clifford Analysis Setting. *Journal of Functional Analysis*, **189**, 227-241. https://doi.org/10.1006/jfan.2001.3848

[4] Qian, T. (2004) Paley-Wiener Theorems and Shannon Sampling in the Clifford Analysis Setting. In: *Clifford Algebras*, Birkhäuser Boston, 115-124. https://doi.org/10.1007/978-1-4612-2044-2_7

[5] Sommen, F. (1982) Some Connections between Clifford Analysis and Complex Analysis. *Complex Variables, Theory and Application*: *An International Journal*, **1**, 97-118. https://doi.org/10.1080/17476938208814008

[6] Sommen, F. (1983) Hypercomplex Fourier and Laplace Transforms II. *Complex Variables*, *Theory and Application*: *An International Journal*, **1**, 209-238. https://doi.org/10.1080/17476938308814016

[7] Yang, Y., Qian, T. and Sommen, F. (2007) Codimension-p Paley-Wiener Theorems. *Arkiv för Matematik*, **45**, 179-196. https://doi.org/10.1007/s11512-006-0040-7