

一些重要不等式在四维空间中的推广

王文璐, 陈 菲*

青岛大学数学与统计学院, 山东 青岛

收稿日期: 2025年10月6日; 录用日期: 2025年11月7日; 发布日期: 2025年11月17日

摘 要

本文专注于四维Sobolev空间, 综合运用调和分析技术, Sobolev嵌入定理及不等式等估计技巧, 推导并证明了一些重要不等式, 如推广的Gagliardo-Nirenberg不等式, Sobolev嵌入不等式及复合函数各阶导数的 L^∞ 范数估计。研究结果进一步丰富了高维Sobolev空间相关数学理论, 为解决四维可压缩Navier-Stokes方程, 四维可压缩MHD方程等偏微分方程的适定性和研究解的性质提供了相应的数学工具。

关键词

四维Sobolev空间, 插值不等式, Sobolev不等式, 不等式推广

Generalizations of Some Important Inequalities in Four-Dimensional Space

Wenlu Wang, Fei Chen*

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: October 6, 2025; accepted: November 7, 2025; published: November 17, 2025

Abstract

This paper focuses on the four-dimensional Sobolev space. By comprehensively using techniques of harmonic analysis, the Sobolev embedding theorem, and estimation skills such as inequalities, some important inequalities are deduced and proved, such as the generalized Gagliardo-Nirenberg inequality, the Sobolev embedding inequality, and the L^∞ -norm estimation of derivatives of all orders of composite functions. The research results further enrich the relevant mathematical theory of high-dimensional Sobolev spaces and provide corresponding mathematical tools for solving the well-posedness of partial differential equations, such as the four-dimensional compressible Navier-Stokes equations and the four-dimensional compressible MHD equations, as well as for studying the properties of solutions.

*通讯作者。

文章引用: 王文璐, 陈菲. 一些重要不等式在四维空间中的推广[J]. 理论数学, 2025, 15(11): 136-145.
DOI: 10.12677/pm.2025.1511276

Keywords

Four-Dimensional Sobolev Space, Interpolation Inequality, Sobolev Inequality, Generalization of Inequality

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

近年来, 随着科学技术的飞速发展, 诸多前沿研究领域如高维量子场论, 复杂流体动力学以及多尺度材料模拟等, 对高维空间中的数学理论与方法提出了迫切需求。Sobolev 空间作为现代分析数学的核心内容之一, 在偏微分方程、几何分析、数值计算等众多领域中发挥着基石性的作用。

在低维空间(如二维和三维空间), Sobolev 空间理论的应用已较为成熟。针对三维空间中的可压缩 Navier-Stokes 方程, Guo-Wang [1] 展开了深入研究, 借助 Sobolev 空间的插值理论, 运用纯能量方法, 成功建立了方程整体解的存在性, 还得到了解的时间衰减率, 证明解的负指标的 Sobolev 范数可以随着时间的演化而保持。在该三维框架下, 一系列 Sobolev 空间相关不等式成为理论推导的核心支撑, 其具体形式与空间维数密切相关。比如三维空间下有如下重要结果:

定理 1.1 (Gagliardo-Nirenberg 不等式[2]): 如果 $0 \leq m$, $\ell \leq n$, 那么存在正常数 C , 使得

$$\|\nabla^\ell f\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\nabla^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^{1-k} \|\nabla^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}^k, \quad (1)$$

其中 $0 \leq k \leq 1$, ℓ 满足

$$\frac{1}{p} - \frac{\ell}{3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{3}\right)(1-k) + \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{3}\right)k. \quad (2)$$

本文之后出现的 C 都为合适的正常数, 不同位置 C 可能不同。

定理 1.2 [3]: 设 $\|\alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq 1$, $2 \leq p \leq \infty$, 整数 $\ell \geq 1$ 。如果光滑函数 $f(\alpha)$ 的任意阶导数有界, 则有

$$\|\nabla^\ell f(\alpha)\|_{L^p(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\nabla^\ell \alpha\|_{L^p(\mathbb{R}^3)}. \quad (3)$$

定理 1.3 (Sobolev 不等式[4] [5]): 设 $f \in H^2(\mathbb{R}^3)$, 则有

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^m(\mathbb{R}^3)} &\leq C \|f\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}, \quad 2 \leq m \leq 6, \\ \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\leq C \|\nabla f\|_{H^1(\mathbb{R}^3)}, \\ \|f\|_{L^6(\mathbb{R}^3)} &\leq C \|\nabla f\|_{L^2(\mathbb{R}^3)}. \end{aligned} \quad (4)$$

这些不等式不仅是推导能量估计, 证明解的正则性等的核心工具, 也是连接低阶范数与高阶范数, 进而分析解的衰减趋势的关键桥梁。Guo-Wang [1] 在三维空间的研究, 正是依托这些经典不等式建立了解的适定性和衰减率。然而, 现有 Sobolev 空间理论的应用多集中于低维情形, 对于高维空间(特别是四维空间)的应用相对较少。低维空间中成立的一些经典不等式和结论, 能否推广到更高维空间中, 进而应用到相关领域处理高维问题, 是一个有趣的问题。

受 Guo-Wang [1] 在三维空间中的研究的启发, 在研究四维空间下可压缩 Navier-Stokes 方程时, 分析

一系列基于 Sobolev 空间的不等式(如 Gagliardo-Nirenberg 不等式, Sobolev 嵌入不等式等)是不可或缺的。因此, 本文旨在进一步探索 Sobolev 空间中的一些重要不等式在四维空间中的具体形式, 并给出相应的推导证明。我们将采用 Fourier 分析, Sobolev 嵌入定理以及不等式估计技巧, 推导并证明推广的 Gagliardo-Nirenberg 不等式, Sobolev 嵌入不等式及复合函数导数的 Sobolev 范数估计, 为后续建立四维空间中的 Navier-Stokes 方程, MHD 方程等流体方程解的存在唯一性和探讨解的性质提供必要的工具。

2. 一些重要不等式推广

首先给出一些重要不等式的通用形式(n 维空间)。

引理 2.1 (Sobolev 不等式[4]): 假设 $1 \leq p < n$, 存在一个仅依赖于 p 和 n 的常数 C , 使得对所有 $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|f\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \quad (5)$$

其中 $p^* = \frac{np}{n-p}$ 。

引理 2.2 (Gagliardo-Nirenberg 插值不等式[4]): 设 $1 \leq p, q, r \leq \infty$, $0 \leq \lambda < 1$ 满足

$$\frac{1}{r} = \lambda \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{n} \right) + \frac{1-\lambda}{q}, \quad (6)$$

当 $p = n > 1$ 时, $0 \leq \lambda \leq 1$ 。那么存在常数 $C = C(n, p, q, r) > 0$ 使得对于任意的 $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \cap L^q(\mathbb{R}^n)$, 有

$$\|f\|_{L^r(\mathbb{R}^n)} \leq C \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}^\lambda \|f\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^{1-\lambda} \quad (7)$$

便于后续证明使用, 我们再给出一些引理。

引理 2.3 [2]: 若 $s \in [0, d/2)$, 对于任意的 $f \in \dot{H}^s(\mathbb{R}^d)$, 存在正常数 C (与 f 无关), 使得

$$\|f\|_{L^{\frac{2d}{d-2s}}(\mathbb{R}^d)} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^d)}. \quad (8)$$

引理 2.4 [6]: 若 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2m})$, 则有

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2m})} \leq C \|\nabla^{m+1} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2m})}^{1/2} \cdot \|\nabla^{m-1} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2m})}^{1/2}, \quad (9)$$

若 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{2m+1})$, 则有

$$\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^{2m+1})} \leq C \|\nabla^{m+1} f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2m+1})}^{1/2} \cdot \|\nabla^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^{2m+1})}^{1/2}. \quad (10)$$

下面我们给出四维空间中的一些推广的 Gagliardo-Nirenberg 不等式。

定理 2.1: 设 $f \in H^m(\mathbb{R}^4) \cap H^n(\mathbb{R}^4)$ 其中 $\min\{m, n\} \leq k \leq \max\{m, n\}$, $0 < \theta < 1$, 满足 $k = \theta m + (1-\theta)n$, 则有

$$\|\nabla^k f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\nabla^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^\theta \|\nabla^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{1-\theta}. \quad (11)$$

证明: 对 f 做 Fourier 变换, 记作 $\hat{f}(\xi)$, 则 $\nabla^k f$ 的 Fourier 变换为 $(i\xi)^k \hat{f}(\xi)$, 根据 $k = \theta m + (1-\theta)n$, 对于 $\theta \in (0, 1)$ 有

$$\left| (i\xi)^k \hat{f}(\xi) \right| \leq \left| (i\xi)^m \hat{f}(\xi) \right|^\theta \left| (i\xi)^n \hat{f}(\xi) \right|^{1-\theta}. \quad (12)$$

由 Plancherel 等式及对(12)两边取 L^2 范数, 再运用 Hölder 不等式可得:

$$\begin{aligned}\|\nabla^k f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} &= \|\widehat{\nabla^k f}\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} = \left(\int_{\mathbb{R}^4} |(i\xi)^k \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^4} |(i\xi)^m \hat{f}(\xi)|^{2\theta} |(i\xi)^n \hat{f}(\xi)|^{2(1-\theta)} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^4} |(i\xi)^m \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{\theta}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^4} |(i\xi)^n \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1-\theta}{2}},\end{aligned}\quad (13)$$

且

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^4} |(i\xi)^m \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} &= \|\widehat{\nabla^m f}\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} = \|\nabla^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}, \\ \left(\int_{\mathbb{R}^4} |(i\xi)^n \hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}} &= \|\widehat{\nabla^n f}\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} = \|\nabla^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}.\end{aligned}\quad (14)$$

故把(14)代入(13)可得(11)。

注记: 从定理 2.1 的证明过程来看, 结论不仅对四维空间成立, 对任意维度的空间都成立。

定理 2.2: 设 $2 \leq p \leq +\infty$, $0 \leq m, \ell \leq n$ 且当 $p = +\infty$ 时, 进一步满足 $m \leq \ell + 1$, $n \geq \ell + 3$ 。对所有 $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^4)$, 有

$$\|\nabla^\ell f\|_{L^p(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\nabla^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{1-k} \|\nabla^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^k, \quad (15)$$

其中 $0 \leq k \leq 1$, ℓ 满足

$$\frac{1}{p} - \frac{\ell}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{4} \right) (1-k) + \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{4} \right) k. \quad (16)$$

证明: 当 $2 \leq p < +\infty$ 时, 依据引理 2.3 可得, 对于 $0 \leq \alpha < 2$, 取 $p = \frac{4}{2-\alpha}$, 可得

$$\|u\|_{L^p(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\nabla^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}. \quad (17)$$

令 $u = \nabla^\ell f$, 则 $\nabla^\alpha u = \nabla^\alpha \nabla^\ell f = \nabla^{\alpha+\ell} f$ 。记 $s = \alpha + \ell$, 则有

$$\|\nabla^\ell f\|_{L^p(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\nabla^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}, \quad s = \ell + 4 \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right). \quad (18)$$

由定理 2.1 和 Hölder 不等式, 可得:

$$\|\nabla^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\nabla^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{1-k} \|\nabla^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^k. \quad (19)$$

其中 k 的定义如(16)所示。因此, 当 $2 \leq p < +\infty$ 时, 将(19)代入(18)即可得到(15)。

当 $p = +\infty$ 时, 根据引理 2.2, 可得

$$\|\nabla^\ell f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\nabla^{\ell+1} f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla^{\ell+3} f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{2}}. \quad (20)$$

当 $p = 2$ 时, 由(15)可得

$$\|\nabla^{\ell+1} f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\nabla^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\ell+1-m}{1-n-m}} \|\nabla^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\ell+1-m}{n-m}}. \quad (21)$$

$$\|\nabla^{\ell+3} f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\nabla^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\ell+3-m}{n-m}} \|\nabla^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\ell+3-m}{n-m}}. \quad (22)$$

将(21)和(22)代入(20)可得

$$\begin{aligned} \|\nabla^\ell f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} &\leq C \left(\|\nabla^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\ell+1-m}{n-m}} \|\nabla^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\ell+1-m}{n-m}} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\|\nabla^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\ell+3-m}{n-m}} \|\nabla^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\ell+3-m}{n-m}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C \|\nabla^m f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\ell+2-m}{n-m}} \|\nabla^n f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\ell+2-m}{n-m}} \end{aligned} \quad (23)$$

同时有

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{m}{4} \right) \left(1 - \frac{\ell+2-m}{n-m} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{4} \right) \frac{\ell+2-m}{n-m} = -\frac{\ell}{4} \quad (24)$$

满足(16), 于是定理得证。

注记: Guo-Wang [1]对应的三维空间结论中 ℓ 满足

$$\frac{1}{p} - \frac{\ell}{3} = \left(\frac{1}{2} - \frac{m}{3} \right) (1-k) + \left(\frac{1}{2} - \frac{n}{3} \right) k. \quad (25)$$

四维空间定理 2.2 的结论与三维空间的相应结论主要区别在于核心指数关系中分母由 3 变为 4, 有这样变化的关键原因在于 Gagliardo-Nirenberg 不等式的指数关系与空间维数 n 直接相关。

接下来给出四维空间中的 Sobolev 不等式的推广。

定理 2.3: 设 $f \in H^s(\mathbb{R}^4)$, $0 \leq s < 2$, 则 $f \in L^q(\mathbb{R}^4)$, 其中 $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{s}{4}$, 使得

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^4)} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^4)}. \quad (26)$$

证明: 对 f 做 Fourier 变换, 记作 $\hat{f}(\xi)$, 满足

$$f(x) = \int_{\mathbb{R}^4} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi. \quad (27)$$

由幂函数单调性结合(27)可得

$$\int_{\mathbb{R}^4} |\xi|^{2s} |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^4} (1 + |\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi. \quad (28)$$

即 $\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^4)} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^4)}$ 。

再结合引理 2.3 可得

$$\|f\|_{L^q(\mathbb{R}^4)} \leq C \|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^4)} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^4)}. \quad (29)$$

于是定理得证。

注记: Guo-Wang [1]对应的三维空间 $\mathbb{R}^3$ 结论中, 函数在 Sobolev 空间 H^s 中的正则性指标范围是 $0 \leq s < 3/2$, 对应的 L^q 空间指数关系为 $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{s}{3}$ 。而在定理 2.3 可以看到在四维空间 $\mathbb{R}^4$ 中, 函数在 Sobolev

空间 H^s 中的正则性指标范围是 $0 \leq s < 2$, 对应的 L^q 空间指数关系为 $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} - \frac{s}{4}$ 。

下面给出 $H^s(\mathbb{R}^4)$ 嵌入连续函数空间的结论(可参考[7])。

定理 2.4: 设 $f \in H^s(\mathbb{R}^4)$, $s > 2$, 则有 $f \in C^0(\mathbb{R}^4)$, 使得

$$\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^4)} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^4)}. \quad (30)$$

证明: 由于 $f \in H^s(\mathbb{R}^4)$, 根据定义有: $(1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^4)$; 另一方面, 用四维球坐标(体积元 $d\xi = r^3 dr d\gamma$, $d\gamma$ 是三维单位球面测度)计算得, 当 $s > 2$ 时有

$$\left\| (1+|\xi|^2)^{-s/2} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2 = \int_{\mathbb{R}^4} \frac{1}{(1+|\xi|^2)^s} d\xi = C \int_0^\infty \frac{1}{(1+r^2)^s} r^3 dr < \infty. \quad (31)$$

即 $(1+|\xi|^2)^{-s/2} \in L^2(\mathbb{R}^4)$, 则对于

$$\hat{f}(\xi) = (1+|\xi|^2)^{-s/2} (1+|\xi|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi). \quad (32)$$

由 Schwarz 不等式 $(\|ab\|_{L^1} \leq \|a\|_{L^2} \|b\|_{L^2})$ 可得 $\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^4)$.

下面来证明 f 在任意点 x_0 连续. 对于 $\forall x_0 \in \mathbb{R}^4$ 可得:

$$|f(x) - f(x_0)| = \left| \int_{\mathbb{R}^4} (e^{ix \cdot \xi} - e^{ix_0 \cdot \xi}) \hat{f}(\xi) d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}^4} |e^{i(x-x_0) \cdot \xi} - 1| |\hat{f}(\xi)| d\xi, \quad x \in \mathbb{R}^4. \quad (33)$$

对这个积分进行分段估计(分成 $|\xi| \leq A$ 和 $|\xi| > A$ 两部分, 其中 A 是充分大的待定正数)则有

$$|f(x) - f(x_0)| \leq \int_{|\xi| \leq A, \xi \in \mathbb{R}^4} |e^{i(x-x_0) \cdot \xi} - 1| |\hat{f}(\xi)| d\xi + \int_{|\xi| > A, \xi \in \mathbb{R}^4} |e^{i(x-x_0) \cdot \xi} - 1| |\hat{f}(\xi)| d\xi. \quad (34)$$

对于 $|\xi| > A$, 由 $\hat{f}(\xi) \in L^1(\mathbb{R}^4)$, 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$, 存在充分大的 $A > 0$, 使得

$$\int_{|\xi| > A, \xi \in \mathbb{R}^4} |\hat{f}(\xi)| d\xi < \varepsilon/4. \quad (35)$$

此时, 注意到 $|e^{i(x-x_0) \cdot \xi} - 1| \leq 2$, 因此

$$\int_{|\xi| > A, \xi \in \mathbb{R}^4} |e^{i(x-x_0) \cdot \xi} - 1| |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq 2 \int_{|\xi| > A, \xi \in \mathbb{R}^4} |\hat{f}(\xi)| d\xi < \varepsilon/2. \quad (36)$$

对于 $|\xi| \leq A$, 注意到 $|e^{i\eta} - 1| \leq |\eta|$, 令 $\eta = (x - x_0) \cdot \xi$, 则 $|\eta| \leq |x - x_0| \cdot |\xi| \leq A|x - x_0|$, 因此对于上述给定的 $\varepsilon > 0$, 令 $|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{2A \cdot \int_{|\xi| \leq A} |\hat{f}(\xi)| d\xi}$, 有

$$\int_{|\xi| \leq A, \xi \in \mathbb{R}^4} |e^{i(x-x_0) \cdot \xi} - 1| |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq A|x - x_0| \int_{|\xi| \leq A, \xi \in \mathbb{R}^4} |\hat{f}(\xi)| d\xi < \varepsilon/2. \quad (37)$$

综上, 取 A 足够大, 取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2A \cdot \int_{|\xi| \leq A} |\hat{f}(\xi)| d\xi}$, 当 $|x - x_0| < \delta$ 时, $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, 即 $f \in C(\mathbb{R}^4)$.

已知

$$\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^4)} = \sup_{x \in \mathbb{R}^4} |f(x)|, \quad \|f(x)\|_{H^s(\mathbb{R}^4)}^2 = \int_{\mathbb{R}^4} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi, \quad (38)$$

由 Fourier 变换和 Schwarz 不等式可得

$$|f(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^4} \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi \right| \leq \int_{\mathbb{R}^4} |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq \left(\int_{\mathbb{R}^4} (1+|\xi|^2)^{-s} d\xi \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^4} (1+|\xi|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (39)$$

由(31)和(38)可得: $\|f\|_{C^0(\mathbb{R}^4)} \leq C \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^4)}$, 于是定理得证。

注记: 与三维空间中相比, 主要区别在于嵌入连续函数空间的正则性指标范围不同。这是因为在 Sobolev 嵌入定理中, 嵌入连续函数空间的正则性指标由空间维数 n 直接决定, 满足 $s > n/2$ 。

以下为复合函数导数的 Sobolev 范数估计, 是处理 Navier-Stokes 方程等流体力学方程的光滑解的存

在唯一性及建立各阶导数的衰减率中的重要工具。

定理 2.5: 假设 $\|\alpha\|_{H^3(\mathbb{R}^4)} \leq 1$, 且 $f(\alpha)$ 是关于 α 的各阶导数均有界的光滑函数。那么对于所有 $m \geq 1$ 且 $m \in \mathbb{N}$, 有

$$\|\nabla^m f(\alpha)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\nabla^m \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^{m+3} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}}. \quad (40)$$

证明: 为便于直观理解后续一般性证明, 先考虑 $m = 2$, 详细展示范数估计的推导过程。

当 $m = 2$ 时, 由导数定义可得:

$$\nabla^2 f(\alpha) = \nabla(f'(\alpha) \nabla \alpha) = f''(\alpha)(\nabla \alpha)^2 + f'(\alpha) \nabla^2 \alpha \quad (41)$$

结合 L^∞ 范数的乘积不等式可得

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 f(\alpha)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} &\leq \|f''(\alpha)(\nabla \alpha)^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} + \|f'(\alpha) \nabla^2 \alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \\ &\leq \|f''(\alpha)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \|(\nabla \alpha)^2\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} + \|f'(\alpha)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \|\nabla^2 \alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \\ &\leq C \left(\|\nabla \alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)}^2 + \|\nabla^2 \alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \right). \end{aligned} \quad (42)$$

由定理 2.2 可得

$$\begin{aligned} \|\nabla \alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} &\leq C \|\nabla \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^4 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}}, \\ \|\nabla^2 \alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} &\leq C \|\nabla^2 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^5 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (43)$$

再次利用定理 2.2 可得

$$\begin{aligned} \|\nabla \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} &\leq C \|\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla^2 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{2}}, \\ \|\nabla^4 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} &\leq C \|\nabla^3 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{2}} \|\nabla^5 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (44)$$

将(43)和(44)代入(42)可得

$$\begin{aligned} \|\nabla^2 f(\alpha)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} &\leq C \left(\|\nabla \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}} \|\nabla^4 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{4}{3}} + \|\nabla^2 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^5 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}} \right) \\ &\leq C \left(\|\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^2 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \cdot \|\nabla^3 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}} \|\nabla^5 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}} + \|\nabla^2 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^5 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}} \right) \\ &\leq C \left(\|\alpha\|_{H^3(\mathbb{R}^4)}^1 + \|\alpha\|_{H^3(\mathbb{R}^4)}^0 \right) \|\nabla^2 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^5 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \quad (45)$$

因此, 当 $\|\alpha\|_{H^3(\mathbb{R}^4)} \leq 1$ 时, 有(40)成立。

当 $m \geq 1$ 时, $\nabla^m f(\alpha)$ 等于若干项 $f^{\gamma_1, \dots, \gamma_n}(\alpha) \nabla^{\gamma_1} \alpha \dots \nabla^{\gamma_n} \alpha$ 的和, 其中函数 $f^{\gamma_1, \dots, \gamma_n}(\alpha)$ 是 $f(\alpha)$ 的某阶导数, 且对于 $i = 1, \dots, n$, 有 $1 \leq \gamma_i \leq m$, 同时 $\gamma_1 + \dots + \gamma_n = m$ 。

利用 Hölder 不等式可得

$$\|\nabla^{\gamma_i} \alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \leq C \|\nabla^{\gamma_i} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^3 \nabla^{\gamma_i} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}} \quad (46)$$

由定理 2.2 可得

$$\begin{aligned}\|\nabla^{\gamma_i} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} &\leq C \|\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{1-\frac{\gamma_i}{m}} \|\nabla^m \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\gamma_i}{m}}, \\ \|\nabla^3 \nabla^{\gamma_i} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} &\leq C \|\nabla^3 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{1-\frac{\gamma_i}{m}} \|\nabla^{m+3} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\gamma_i}{m}}.\end{aligned}\quad (47)$$

结合导数的有界性, 利用(46)和(47)可得

$$\begin{aligned}\|\nabla^m f(\alpha)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} &\leq C \|\nabla^{\gamma_1} \alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \cdots \|\nabla^{\gamma_n} \alpha\|_{L^\infty(\mathbb{R}^4)} \\ &\leq C \left(\|\nabla^{\gamma_1} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \cdots \|\nabla^{\gamma_n} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \right)^{\frac{1}{3}} \left(\|\nabla^3 \nabla^{\gamma_1} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \cdots \|\nabla^3 \nabla^{\gamma_n} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &\leq C \left(\|\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{1-\frac{\gamma_1}{m}} \|\nabla^m \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\gamma_1}{m}} \cdots \|\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{1-\frac{\gamma_n}{m}} \|\nabla^m \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\gamma_n}{m}} \right)^{\frac{1}{3}} \\ &\quad \times \left(\|\nabla^3 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{1-\frac{\gamma_1}{m}} \|\nabla^{m+3} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\gamma_1}{m}} \cdots \|\nabla^3 \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{1-\frac{\gamma_n}{m}} \|\nabla^{m+3} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{\gamma_n}{m}} \right)^{\frac{2}{3}} \\ &\leq C \|\alpha\|_{H^3(\mathbb{R}^4)}^{n-1} \|\nabla^m \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^{m+3} \alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}}.\end{aligned}\quad (48)$$

因此, 当 $\|\alpha\|_{H^3(\mathbb{R}^4)} \leq 1$ 时, 该定理得证。

注记: 与三维情形做比较, 可以发现指标是有变化的, 需要的 α 的有界性由 H^2 到了 H^3 , 也就是说随着空间维数的变化, 结果是不一样的。从(42)~(44)可以看出, 这一提升本质上是空间维数变化引起 G-N 不等式中高阶导数项的变化而导致的。

最后给出四维空间中负 Sobolev 空间的范数估计。

为便于后续分析, 我们先对算子 Λ^s , $s \in \mathbb{R}$ 进行定义, 其形式可表示为:

$$\Lambda^s f(x) = \int_{\mathbb{R}^4} |\xi|^s \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi, \quad (49)$$

这里的 $\hat{f}$ 代表函数 f 的傅里叶变换。在此基础上, 我们定义齐次 Sobolev 空间 $\dot{H}^s(\mathbb{R}^4)$, 它是由所有满足 $\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^4)}$ 为有限值的函数 f 所构成的空间, 该范数的定义为

$$\|f\|_{\dot{H}^s(\mathbb{R}^4)} := \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} = \left\| |\xi|^s \hat{f} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}. \quad (50)$$

另外, 考虑到非正指数 s 在使用时的便利性, 我们对指数进行调整, 采用 $-s$ (此时要求 $s \geq 0$)。

定理 2.6 [8]: 令 $0 < s < 4$, $1 < p < q < \infty$, $\frac{1}{q} + \frac{s}{4} = \frac{1}{p}$, 则有

$$\|\Lambda^{-s} f\|_{L^q(\mathbb{R}^4)} \leq C \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^4)}. \quad (51)$$

证明: 对 $\Lambda^{-s} f$ 取 Fourier 变换, 卷积算子 $\Lambda^{-s} f = f * K$, 其中卷积核 K 的 Fourier 变换为 $\hat{K}(\xi) = |\xi|^{-s}$ 。先验证算子的弱型有界性和强型有界性(详见[8]), 再利用 Marcinkiewicz 插值定理可得算子是强型 (p, q) , 满足 $\|\Lambda^{-s} f\|_{L^q(\mathbb{R}^4)} \lesssim \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^4)}$ 且满足插值条件 $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{s}{4}$, 即定理得证。

3. 应用示例

本节聚焦对流项 $u \cdot \nabla u$ 的 L^2 范数估计, 以二阶导范数估计为例展示第二节定理的实际应用。在处理 NS 方程解的二阶导数估计时, 需要处理关于对流项的如下估计:

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^4} \nabla(u \cdot \nabla u) \cdot \nabla^3 u dx \\
& \leq C \int_{\mathbb{R}^4} (|\nabla u| |\nabla u| |\nabla^3 u| + |u| |\nabla^2 u| |\nabla^3 u|) dx \\
& \leq C \left(\|\nabla u\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} \|\nabla u\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} + \|u\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} \|\nabla^2 u\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \right)
\end{aligned} \quad (52)$$

利用定理 2.2 可得

$$\begin{aligned}
\|\nabla u\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} & \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}}, \\
\|\nabla u\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} & \leq C \|\nabla^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}} \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}}, \\
\|u\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} & \leq C \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}} \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}}, \\
\|\nabla^2 u\|_{L^4(\mathbb{R}^4)} & \leq C \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}
\end{aligned} \quad (53)$$

其中 α 满足

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4} \right) \frac{2}{3} + \left(\frac{1}{2} - \frac{3}{4} \right) \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2} \quad (54)$$

将(53)代入(52)可得

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^4} \nabla(u \cdot \nabla u) \cdot \nabla^3 u dx \\
& \leq C \left(\|u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}} \|\nabla^\alpha u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}} \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} + \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{2}{3}} \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^{\frac{1}{3}} \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)} \right) \\
& \leq C \|u\|_{H^3(\mathbb{R}^4)}^1 \|\nabla^3 u\|_{L^2(\mathbb{R}^4)}^2
\end{aligned} \quad (55)$$

当 $\|u\|_{H^3(\mathbb{R}^4)} \leq 1$ 时, 即可得到对流项的二阶导数的范数估计。

4. 结论

本文针对四维 Sobolev 空间, 推导并证明了一系列重要不等式, 拓展了 Sobolev 空间理论在高维情形下的研究范畴。通过对频率特性的研究, 以及运用 Fourier 分析, 一些现有的嵌入不等式和插值不等式等工具, 将 Gagliardo-Nirenberg 不等式和 Sobolev 嵌入不等式进一步的推广。这些成果不仅在理论层面上丰富了高维 Sobolev 空间的理论知识, 也为解决四维可压缩 Navier-Stokes 方程, MHD 方程等偏微分方程的解的适定性, 正则性等问题提供了必要的数学工具。

然而, 本研究仍存在一定的局限性。一方面, 在处理一些复杂边界条件下的偏微分方程时, 所建立的不等式应用效果有待进一步提升, 可能需要结合更精细的边界层理论进行优化。另一方面, 对于具有强非线性项的方程, 当前理论对解的长时间行为的刻画还不够精确, 无法完全满足实际应用中对于长期动态预测的需求。

展望未来, 基于本研究的基础, 后续可继续探索将这些不等式推广至更一般的高维空间的情形, 进一步拓展理论的适用范围。

基金项目

国家自然科学基金(项目编号: 12101345); 山东省自然科学基金(项目编号: ZR2021QA017)。

参考文献

- [1] Guo, Y. and Wang, Y. (2012) Decay of Dissipative Equations and Negative Sobolev Spaces. *Communications in Partial Differential Equations*, **37**, 2165-2208. <https://doi.org/10.1080/03605302.2012.696296>
- [2] Bahouri, H., Chemin, J.Y. and Danchin, R. (2011) *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*. Springer-Verlag.
- [3] Tan, Z. and Wang, H. (2013) Optimal Decay Rates of the Compressible Magnetohydrodynamic Equations. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, **14**, 188-201. <https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2012.05.012>
- [4] Evans, L.C. (2010) *Partial Differential Equations*. American Mathematical Society.
- [5] Huang, W. and Fu, S. (2023) The Cauchy Problem for the Nonisentropic Compressible MHD Fluids: Optimal Time-decay Rates. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **46**, 9708-9735. <https://doi.org/10.1002/mma.9082>
- [6] Taylor, M.E. (2011) *Partial Differential Equations III. Nonlinear Equations*. Springer.
- [7] 陈恕行. 现代偏微分方程导论[M]. 北京: 科学出版社, 2018.
- [8] Stein, E.M. (1970) *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*. Princeton University Press.