Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(11), 214-219
Published Online November 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1511282

Hans汉斯

Burnside定理的推广

王兆权

青岛滨海学院文理基础学院，山东 青岛

收稿日期：2025年10月20日；录用日期：2025年11月12日；发布日期：2025年11月20日

摘 要

通过引入分配子，研究了由分配映射诱导的映射，得到了转移的等价刻画，给出了转移与存在正规补之间的联系。作为应用，推广了著名的Burnside定理。

关键词

转移，p-幂零群，分配映射

A Generalization of Burnside's Theorem

Zhaoquan Wang

Basic School of Arts and Sciences, Qingdao Binhai University, Qingdao Shandong

Received: October 20, 2025; accepted: November 12, 2025; published: November 20, 2025

Abstract

Distributors are introduced to investigate the mappings induced by distributive maps. Equivalent characterizations of the transfer are obtained. Connections between the transfer and the existence of normal complements are established. As an application, the well-known Burnside theorem is generalized.

Keywords

Transfer, p-Nilpotent Groups, Distributive Mappings

文章引用: 王兆权. Burnside 定理的推广[J]. 理论数学, 2025, 15(11): 214-219.
DOI: 10.12677/pm.2025.1511282

1. 引言

交换性是群论研究的重要性质之一。作为交换性的一种度量，群论中引入了换位子。设G为群，$x,y\in G$，记$[x,y]=x^{-1}y^{-1}xy$为元素x与y的换位子。类比换位子的思想，文献[1]首次提出了n-可交换的概念(n为整数)，若对任意$x,y\in G$均有$(ab)^n=a^nb^n$，则称x与y为n-可交换的，并研究了群的结构。文献[2]在附加条件$[x,y]^n=1$与$[x,y^n]=1$下，讨论了群的构造。文献[3]把n-可交换性推广到映射上，设$f:g\to g^n$且$f(xy)=f(x)f(y)$，则称x与y为n-可交换，并得到了每个无挠n-可交换群必为交换群。在此基础上，文献[4]讨论了p-交换的p-群，证明了每个p-交换的p-群都是正则的，每个指数为p的p-群是p-交换的p-群。文献[5]定义了半p-交换的p-群，有限p-群G是半p-交换的，当且仅当对$\forall\, x,y\in G$，有$(xy)^p=1$等价于$x^py^p=1$，并探究了半p-交换性与正则性之间的关系。为了研究p-交换性，文献[6]引入了p-换位子，即$[x,y;p]=y^{-p}x^{-p}(xy)^p$，并给出了$p$-换位子群等一系列与交换群类似的概念。文献[7]对上述概念进行了推广，获得了分配子。本文在分配子概念的基础上，提出了分配映射的定义，推导了分配映射的性质，研究了由其诱导的映射，得到了转移的等价形式。作为应用，推广了p-幂零群的一个充分条件。

用H'表示群H换位子群；$g\circ f$表示映射g复合映射f；用$(|A|,|H|)$表示$|A|$和$|H|$的最大公因子。本文所提到的群都是有限群，其它术语和符号是标准的，参见文献[8]。

2. 预备知识

以下将介绍本文用到的一些基本概念及引理。

定义 1 设G、K为群，则定义映射集合：

$$\mathrm{Map}(G,K)=\{f:G\to K\mid f(1)=1\}.$$

注 文中的映射都满足将单位元映到单位元上。

定义 2 [9] 设G、K为群，$f\in\mathrm{Map}(G,K)$，若f满足

$$f(xy)=f(x)f(y),\quad \forall x,y\in G,$$

则称f是G到K上的同态。

受文献[7]启发，笔者给出了如下定义：

定义 3 设G、K为群，$f\in\mathrm{Map}(G,K)$，对任意的$x,y\in G$，若f满足

$$[x,y;f]:=f(y)^{-1}f(x)^{-1}f(xy),$$

则称f是G到K上的分配映射。

进一步，分配子集记为：

$$Z(G,K):=\left\{f\in\mathrm{Map}(G,K)\mid[x,y;f]:=f(y)^{-1}f(x)^{-1}f(xy),x,y\in G\right\}.$$

定义 4 设G、K为群，$f\in\mathrm{Map}(G,K)$，若f满足

$$[x,y;f]=1,\quad \forall x,y\in G,$$

则称f是G到K上的平凡分配映射。

注 平凡分配映射是同态。

定义 5 [10] 设$K\le G$，若映射$f:G\to K/K'$满足$f(g)=\prod_{i=1}^{n}k_iK', g\in G$，则称$f$是$G$到$K$上的转移。

注 转移是同态映射。

引理 1 [10] 设 $K \le G$， $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 K 在 G 右陪集代表系，则 G 到 K 上的转移映射为

$$f(g) = \prod_{i=1}^{n} x_i g x_{\sigma(i)} K', g \in G,$$

其中 σ 为集合 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上的置换。

证明： 已知 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ 为 K 在 G 右陪集代表系，故 $G = \bigcup_{i=1}^{n} Kx_i$ 是 G 对 K 的右陪集分解，于是对任意的 $g \in G$， $x_i \in X$ ，均有 $x_i g \in G$ 。下令 $x_i g = k_i x_{\sigma(i)}, k_i \in K$ ，所以 $x_i g x_{\sigma(i)}^{-1} = k_i \in K$ ，因此转移为

$$f(g) = \prod_{i=1}^{n} k_i K' = \prod_{i=1}^{n} x_i g x_{\sigma(i)}^{-1} K'.$$

引理 2 [10] 设 $K \le G$， $g \in G$，记 $P(g) = \prod_{i=1}^{t}\left(Kx_i, Kx_i g, Kx_i g^2, \cdots, Kx_i g^{n_i - 1}\right)$， $i \in \{1, 2, \cdots, t\}$，即 $P(g)$ 是 t 个轮换的乘积，则 G 到 K 上的转移映射为

$$f(g) = \prod_{i=1}^{t} x_i g^{n_i} x_i^{-1}.$$

证明： 设轮换的长度分别为 $n_1, n_2, n_3, \cdots, n_t$，则 $\sum_{i=1}^{t} n_i = |G:K| = n$。又因为 $Kx_i g^{n_i} = Kx_i$，所以 $x_i g^{n_i} x_i^{-1} \in K$，于是 $\{x_i, x_i g, x_i g^2, \cdots, x_i g^{n_i - 1}\}$ 构成一个 K 在 G 中的右陪集代表系，故根据引理 1 计算出转移映射为

$$\bar{\rho}(g) = \prod_{i=1}^{t} x_i g (x_i g)^{-1} \cdot (x_i g) g (x_i g^2)^{-1} \cdot (x_i g^2) g (x_i g^3)^{-1} \cdots \cdot (x_i g^{n_i - 1}) g (x_i)^{-1} H' = \prod_{i=1}^{t} x_i g^{n_i} x_i^{-1} K'.$$

注 说明上述两个引理是转移映射的等价形式。

定义 6 [8] 设 G 是有限群，P 是 G 的 Sylow p-子群。如果 G 有正规子群 N，满足 $N \cap P = 1$，$NP = G$，则称 G 为 p-幂零群。

3. 主要结果

定理 1 设 H 是 G 的子群， $\pi: H \to H/H'$ 是自然满同态，记复合映射 $\rho = \pi \circ f$ ，其中 $f \in Z(G, H) := \left\{ f \in \mathrm{Map}(G, H) \mid [x, y; f] = f(y)^{-1} f(x)^{-1} f(xy), f(x) = h, x, y \in G, h \in H \right\}$， 则 $\bar{\rho}(x) = \prod_{a \in G} \rho(x)[a, x; \rho]$ 为同态。

证明： 设 $a, x, y \in G$， 则由定义 3 得

$$\rho(axy) = \rho(ax)\rho(y)[ax, y; \rho] = \rho(a)\rho(x)[a, x; \rho]\rho(y)[ax, y; \rho] \tag{1}$$

式(1)两边同时左乘 $\rho(a)^{-1}$ 得

$$\rho(a)^{-1}\rho(axy) = \rho(x)[a, x; \rho]\rho(y)[ax, y; \rho] \tag{2}$$

进一步，对式(2)左边做恒等变形得

$$\rho(xy)\rho(xy)^{-1}\rho(a)^{-1}\rho(axy) = \rho(x)[a, x; \rho]\rho(y)[ax, y; \rho] \tag{3}$$

这样化简得

$$\rho(xy)[a, xy; \rho] = \rho(x)[a, x; \rho]\rho(y)[ax, y; \rho] \tag{4}$$

两边取连乘运算得

$$\prod_{a\in G}\rho(xy)[a,xy;\rho]=\prod_{a\in G}\rho(x)[a,x;\rho]\rho(y)[ax,y;\rho] \tag{5}$$

此时，注意到 $\rho:G\to H/H'$ 是映射且 H/H' 是交换群，所以得到

$$\prod_{a\in G}\rho(xy)[a,xy;\rho]=\prod_{a\in G}\rho(x)[a,x;\rho]\prod_{a\in G}\rho(y)[ax,y;\rho] \tag{6}$$

而对任意的 $x\in G$，一定存在映射 $\alpha:G\to G(a\mapsto ax)$ 为双射，故

$$\prod_{a\in G}[ax,y;\rho]=\prod_{a\in G}[a,y;\rho] \tag{7}$$

把式(7)代入式(6)中得到

$$\prod_{a\in G}\rho(xy)[a,xy;\rho]=\prod_{a\in G}\rho(x)[a,x;\rho]\prod_{a\in G}\rho(y)[a,y;\rho] \tag{8}$$

即 $\bar{\rho}(xy)=\bar{\rho}(x)\bar{\rho}(y)$，因此 $\bar{\rho}$ 为同态。

定理 2 记号如上，设 $K=\{k_1,k_2,k_3,\cdots,k_m\}$ 是 H 在 G 中的右陪集代表元集合，则

$$\bar{\rho}(x)=\prod_{i=1}^{m}\rho(x)[k_i,x;\rho]=\prod_{k\in K}\rho(x)[k,x;\rho]=\prod_{a\in G}\rho(x)[a,x;\rho].$$

证明：我们分以下断言证明定理。

断言 1： $f(k)=1,\ k\in K$。

事实上，因为 $K=\{k_1,k_2,k_3,\cdots,k_n\}$ 是 H 在 G 中的右陪集代表元集合，所以可令 $g=1\cdot k$，于是由 $f(x)=h$ 推出 $f(1\cdot k)=1,\ 1\in H,k\in K$。

断言 2： $f(hg)=h\cdot f(g),\ h\in H,\ g\in G$。

因为 K 是 H 在 G 中的右陪集代表元集合，所以令 $g=\bar{h}k,\bar{h}\in H,k\in K$，则

$$f(g)=f(\bar{h}k)=\bar{h},$$

于是 $f(hg)=f(h\bar{h}k)=h\bar{h}=hf(g)$。

断言 3： $[a,x;\rho]=[k,x;\rho]$， $x,a\in G,\ k\in K$。

由断言 1 推出 $\rho(k)=\pi(f(k))=\pi(1)=1$；另一方面，记 $h\in H$，由映射 $f(a)=h$ 得到 $\rho(a)=\pi(f(a))=\pi(h)$，所以 $\rho(a)=\pi(h)\rho(k)$。此时，记 $a=hk$，故由断言 2 化简得 $\rho(ax)=\pi(f(ax))=\pi(f(hkx))=\pi(hf(kx))=\pi(h)\pi(f(kx))=\pi(h)\rho(kx)$，即 $\rho(ax)=\pi(h)\rho(kx)$，进而 $\rho(a)^{-1}\rho(ax)=\rho(k)^{-1}\rho(kx)$，于是 $\rho(x)^{-1}\rho(a)^{-1}\rho(ax)=\rho(x)^{-1}\rho(k)^{-1}\rho(kx)$，因此，$[a,x;\rho]=[k,x;\rho]$ 成立。

利用断言 3 可以推出集合 $\{[a,x;\rho]\mid a\in G\}=\{[k,x;\rho]\mid k\in K\}$ 相等，这样得到

$$\bar{\rho}(x)=\prod_{k\in K}\rho(x)[k,x;\rho]=\prod_{a\in G}\rho(x)[a,x;\rho]。$$

进一步，再由 $K=\{k_1,k_2,k_3,\cdots,k_m\}$ 得到

$$\bar{\rho}(x)=\prod_{i=1}^{m}\rho(x)[k_i,x;\rho]=\prod_{k\in K}\rho(x)[k,x;\rho]。$$

定理 3 记号如上，设 σ 为集合 $\{1,2,\cdots,n\}$ 上的置换，则 $\bar{\rho}(x)=\prod_{i=1}^{m}k_ixk_{\sigma(i)}^{-1}H'$。

证明：设 $k_i\in K,\ x\in G$，则 $k_ix\in G$，下令 $k_ix=hk_{\sigma(i)}$，则 $h=k_ixk_{\sigma(i)}^{-1}$，所以 $k_ixk_{\sigma(i)}^{-1}\in H$。通过定义 3 和定理 2 的断言 1、断言 2 化简

$$f(x)[k_i,x;f]=f(x)f(x)^{-1}f(k_i)^{-1}f(k_ix)=f\left(k_ixk_{\sigma(i)}^{-1}k_{\sigma(i)}\right)=k_ixk_{\sigma(i)}^{-1}f\left(k_{\sigma(i)}\right)=k_ixk_{\sigma(i)}^{-1}。$$

又由于

$$\rho(x)[k_i,x;\rho]=\rho(x)\rho(x)^{-1}\rho(k_i)^{-1}\rho(k_ix)=\rho(k_i)^{-1}\rho(k_ix)=\pi\left(f(k_i)\right)\pi\left(f(k_ix)\right),$$

故由于 $f(k_i)=1$ 和 $f(k_ix)=k_ixk_{\sigma(i)}^{-1}$ 推出 $\rho(x)[k_i,x;\rho]=\pi(1)\pi\left(k_ixk_{\sigma(i)}^{-1}\right)=k_ixk_{\sigma(i)}^{-1}H'$。因此得到

$$\bar{\rho}(x)=\prod_{i=1}^{m}\rho(x)[k_i,x;\rho]=\prod_{i=1}^{m}k_ixk_{\sigma(i)}^{-1}H'.$$

注 由引理 1 知，定理 2 的结果都是转移的等价形式。

定理 4 记号如上，设 $P(x)=\prod_{i=1}^{t}\left(Hk_i,Hk_ix,Hk_ix^2,\cdots,Hk_ix^{n_i-1}\right)$，即 $P(x)$ 是 t 个轮换的乘积，则 $\bar{\rho}(x)=\prod_{i=1}^{t}\rho\left(x^{n_i}\right)\left[k_i,x^{n_i};\rho\right]$，$x\in G$。

证明： 设各轮换的长度分别为 $n_1,n_2,n_3,\cdots,n_t$，则 $\sum_{i=1}^{t}n_i=n$，又因为 $Hk_ix^{n_i}=Hk_i$，所以 $k_ix^{n_i}k_i^{-1}\in H$，于是 $\left\{k_i,k_ix,k_ix^2,\cdots,k_ix^{n_i-1}\right\}$ 构成一个 H 在 G 中的右陪集代表系，故一方面，根据定理 3 计算出转移映射

$$\bar{\rho}(x)=\prod_{i=1}^{t}k_ix(k_ix)^{-1}\cdot(k_ix)x\left(k_ix^2\right)^{-1}\cdot\left(k_ix^2\right)x\left(k_ix^3\right)^{-1}\cdots\cdot\left(k_ix^{n_i-1}\right)x(k_i)^{-1}H'=\prod_{i=1}^{t}k_ix^{n_i}k_i^{-1}H'.$$

而另一方面注意到 $\rho^{k_i}\left(x^{n_i}\right)\left[k_i,x^{n_i};\rho\right]=\rho^{k_i}\left(x^{n_i}\right)\rho^{k_i}\left(x^{n_i}\right)^{-1}\rho(k_i)^{-1}\rho\left(k_ix^{n_i}\right)=\pi\circ f(k_i)^{-1}\pi\circ f\left(k_ix^{n_i}\right)$，接下来，通过定理 2 的断言 1、断言 2 化简上式右端得

$$\pi\circ f(k_i)^{-1}\pi\circ f\left(k_ix^{n_i}\right)=\pi(1)\pi\left(f\left(k_ix^{n_i}k_i^{-1}\cdot k_i\right)\right)=\pi\left(k_ix^{n_i}k_i^{-1}\cdot f(k_i)\right)=k_ix^{n_i}k_i^{-1}H',$$

因此 $\bar{\rho}(x)=\prod_{i=1}^{t}\rho\left(x^{n_i}\right)\left[k_i,x^{n_i};\rho\right]$。

注 通过引理 2，说明定理 4 的结果是转移的又一种等价刻画。

定理 5 设 G 是群，$P\in Syl_pG$. 若 $N_G(P)=P$ 且 P 是交换群，则 G 为 p-幂零群。

证明： 考虑映射 $\bar{\rho}(x)=\prod_{i=1}^{t}\rho\left(x^{n_i}\right)\left[k_i,x^{n_i};\rho\right]$，则分以下步骤证明定理。

断言 1： $\bar{\rho}(x)=\prod_{i=1}^{t}k_ix^{n_i}k_i^{-1}$。

事实上，因为

$$\rho^{k_i}\left(x^{n_i}\right)\left[k_i,x^{n_i};\rho\right]=\rho^{k_i}\left(x^{n_i}\right)\rho^{k_i}\left(x^{n_i}\right)^{-1}\rho(k_i)^{-1}\rho\left(k_ix^{n_i}\right)=\pi\circ f(k_i)^{-1}\pi\circ f\left(k_ix^{n_i}\right),$$

所以通过定理 2 的断言 1、断言 2 化简得

$$\pi\circ f(k_i)^{-1}\pi\circ f\left(k_ix^{n_i}\right)=\pi(1)\pi\left(f\left(k_ix^{n_i}k_i^{-1}\cdot k_i\right)\right)=\pi\left(k_ix^{n_i}k_i^{-1}\cdot f(k_i)\right)=k_ix^{n_i}k_i^{-1}P',$$

故而 $\bar{\rho}(x)=\prod_{i=1}^{t}k_ix^{n_i}k_i^{-1}P'$，又由于 P 为交换群，所以 $P'=1$，因此，$\bar{\rho}(x)=\prod_{i=1}^{t}k_ix^{n_i}k_i^{-1}$。

断言 2： $\bar{\rho}(x)=x^{|G:P|}$。

设 $1\neq x\in P$，则由 $x^{n_i},k_ix^{n_i}k_i^{-1}\in P$ 且 P 为交换群推出 $C_G\left(x^{n_i}\right)\geq P,\ C_G\left(k_ix^{n_i}k_i^{-1}\right)\geq P$，故

$k_iC_G\left(x^{n_i}\right)k_i^{-1}\geq P$，这样 $C_G\left(x^{n_i}\right)\geq k_i^{-1}Pk_i$，于是 $k_i^{-1}Pk_i, P$ 是 $C_G\left(x^{n_i}\right)$ 的两个子群，进一步，由于 P 是 G 的 Sylow p-子群，所以 $k_i^{-1}Pk_i, P$ 是 $C_G\left(x^{n_i}\right)$ 的 Sylow p-子群，故由 Sylow 定理知，存在 $u\in C_G\left(x^{n_i}\right)$ 使得 $k_i^{-1}Pk_i=u^{-1}Pu$，即 $P^{k_i}=P^u$，于是 $P=P^{k_iu^{-1}}$，故而 $k_iu^{-1}\in N_G\left(P\right)$。

又因 P 为交换群，故 $P\leq C_G\left(P\right)\leq N_G\left(P\right)$，而已知 $N_G\left(P\right)=P$，从而推出 $N_G\left(P\right)=C_G\left(P\right)$，进而 $N_G\left(P\right)=C_G\left(P\right)\leq C_G\left(x^{n_i}\right)$，于是推出 $k_iu^{-1}\in C_G\left(x^{n_i}\right)$，进一步，$k_i\in C_G\left(x^{n_i}\right)$，这就意味着，$k_ix^{n_i}=x^{n_i}k_i$，所以由断言 1 知

$$\bar{\rho}\left(x\right)=\prod_{i=1}^{t}k_ix^{n_i}k_i^{-1}=\prod_{i=1}^{t}x^{n_i}k_ik_i^{-1}=\prod_{i=1}^{t}x^{n_i}=x^{n_1+n_2+\cdots+n_t}=x^{|G:P|}.$$

断言 3：记号如上，则 $\mathrm{Ker}\bar{\rho}$ 是 P 在 G 中的补群。

通过定理 4，我们知道，映射 $\bar{\rho}$ 是转移同态，所以由同态定理得，$G/\mathrm{Ker}\bar{\rho}\cong\mathrm{Im}\,\bar{\rho}\leq P$，故 $G=\mathrm{Ker}\bar{\rho}\cdot\mathrm{Im}\,\bar{\rho}\subseteq\mathrm{Ker}\bar{\rho}\cdot P$。又由 $\mathrm{Ker}\bar{\rho}P\subseteq G$，所以 $\mathrm{Ker}\bar{\rho}\cdot P=G$。

下证 $\mathrm{Ker}\bar{\rho}\cap P=1$。设 $|P|=m,|G:P|=n$，则对于任意的 $x\in\mathrm{Ker}\bar{\rho}\cap P$。当 $x\in P$ 时，有 $x^m=1$；当 $x\in\mathrm{Ker}\bar{\rho}$ 时，由 $\bar{\rho}\left(x\right)=x^{|G:P|}=x^n$ 推出 $x^n=1$。又因为 P 是 G 的 Sylow p-子群，所以 $\left(|G:P|,|P|\right)=1$，即 $\left(m,n\right)=1$，这样存在整数 k,s 使得 $km+sn=1$，所以我们有

$$x=x^{km+sn}=x^{km}x^{sn}=\left(x^m\right)^k\left(x^n\right)^s=1,$$

因此 $\mathrm{Ker}\bar{\rho}\cap P=1$。综上，$G$ 为 p-幂零群。

作为定理 5 的直接结果，有下面著名的 Burnside 定理。

推论 6 设 G 是群，$P\in Syl_pG$。若 $N_G\left(P\right)=C_G\left(P\right)$，则 G 为 p-幂零群。

参考文献

[1] Baer, R. (1953) Factorization of n-Soluble and n-Nilpotent Groups. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **4**, 15-26. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1953-0053109-x

[2] Gupta, N. and Rhemtulla, A. (1970) A Note on Centre-By-Finite-Exponent Varieties of Groups. *Journal of the Australian Mathematical Society*, **11**, 33-36. https://doi.org/10.1017/s1446788700005930

[3] Delizia, C. and Tortora, A. (2012) Some Special Classes of n-Abelian Groups. International Journal of Group Theory, **2**, 19-24.

[4] Davitt, R.M. (1972) The Automorphism Group of Finite p-Abelian p-Groups. *Illinois Journal of Mathematics*, **16**, 76-85. https://doi.org/10.1215/ijm/1256052384

[5] 徐明曜, 杨燕昌. 有限 p-群的半 p-交换性和正则性[J]. 数学学报, 1976, 19(4): 281-285.

[6] Hobby, C. (1960) A Characteristic Subgroup of a p-Group. *Pacific Journal of Mathematics*, **10**, 853-858. https://doi.org/10.2140/pjm.1960.10.853

[7] Hawthorn, I. and Guo, Y. (2015) Arbitrary Function in Group Theory. *New Zealand Journal of Mathematics*, **45**, 1-9.

[8] 徐明曜. 有限群导引(下册) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[9] 徐明曜. 有限群导引(上册) [M]. 北京: 科学出版社, 1999.

[10] Robinson, D.J.S. (1995) A Course in the Theory of Groups. 2nd Edition, Springer-Verlag.