Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(1), 42-47
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.161006

Hans汉斯

重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$的一种证明新方法

李国重，马朝忠，韩松辉

信息工程大学基础部，河南 郑州

收稿日期：2025年10月27日；录用日期：2025年12月24日；发布日期：2026年1月12日

摘 要

借助“割圆术”，根据圆内接正多边形的周长逼近圆的周长，结合正弦函数定义，给出了重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$的一种新的证明方法，为开展重要极限实践教学提供一个新颖的、富含历史底蕴的视角。

关键词

重要极限，割圆术，圆内接正多边形

A New Method for Proving the Fundamental Limit $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

Guozhong Li, Chaozhong Ma, Songhui Han

Department of Basic Courses, Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: October 27, 2025; accepted: December 24, 2025; published: January 22, 2026

Abstract

A new proof of the fundamental limit $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ is proposed in this paper by using the method of circle division, which derives an approximation of the circumference from the perimeter of a regular polygon inscribed in a circle. This proof method provides a novel and historically rich teaching perspective for the fundamental limit.

Keywords

A Fundamental Limit, Method of Circle Division, Inscribed Regular Polygon

文章引用: 李国重, 马朝忠, 韩松辉. 重要极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$的一种证明新方法 [J]. 理论数学, 2026, 16(1): 42-47.
DOI: 10.12677/pm.2026.161006

1. 引言

极限是微积分学中的基础概念，几乎所有基本概念(连续、微分、积分等)都是建立在极限概念的基础之上。而极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 是许多微积分教材中的两个重要极限之一，应用广泛。不少教材和文献都基于单位圆中的面积关系，利用夹逼准则(也称三明治准则)及 $\cos x$ 、$\dfrac{\sin x}{x}$ 偶函数性质，从几何上给出了证明[1]-[3]。主要步骤如下：

如图 1 所示，在四分之一的单位圆中(圆的半径 $r=1$)，设弧度制圆心角 $\angle\mathrm{BOC}=\ x$，根据圆心角定义，$x=\dfrac{\text{弧长}}{\text{半径}}=\overset{\frown}{\mathrm{BC}}$。设 B 点处的切线与 OC 的延长线交于 D，又 CA⊥OB。因为在直角三角形中正弦函数定义为 $\dfrac{\text{对边长}}{\text{斜边长}}$、正切函数定义为 $\dfrac{\text{对边长}}{\text{邻边长}}$，可得

$$\sin x=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{OC}}=\frac{\mathrm{AC}}{1}=\mathrm{AC}\text{，}\quad \tan x=\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{OB}}=\frac{\mathrm{BD}}{1}=\mathrm{BD}$$

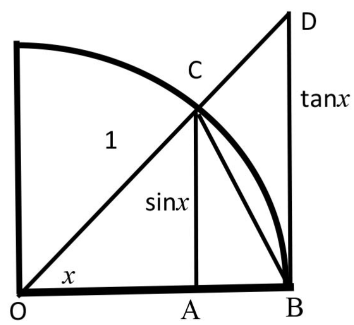

Figure 1. Diagram of sine and tangent function
图 1. 正弦函数、正切函数示意图

设圆的面积为 $S=\dfrac{1}{2}cr$ (阿基米德利用圆内接多边形和圆外切多边形，构造双重归谬法得到)，其中 c 为圆的周长，r 仍为圆的半径。因圆周角为 $\dfrac{c}{r}$ 弧度(对应圆的面积 $S=\dfrac{1}{2}cr$)，故 1 弧度圆心角对应的扇形面积为 $\dfrac{1}{c/r}S=\dfrac{r}{c}S=\dfrac{1}{2}r^2$，圆心角为 x 的扇形面积为 $\dfrac{1}{2}xr^2$。

因为三角形 ΔBOC 的面积 < 扇形 BOC 的面积 < ΔBOD 的面积，所以

$$\frac{1}{2}\times\mathrm{OB}\times\mathrm{AC}<\frac{1}{2}\times\mathrm{OB}^2\times x<\frac{1}{2}\times\mathrm{OB}\times\mathrm{BD} \tag{1}$$

因单位圆半径为 1，即 OB=1，又因 AC=$\sin x$，BD=$\tan x$，(1)式可变为：

$$\sin x<x<\tan x \tag{2}$$

(2)式不等号各边都除以正弦 $\sin x$ ($\sin x > 0$)，可得

$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$

即

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \tag{3}$$

由于 $\cos x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 都是偶函数，所以(3)式对 $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内的一切 x 都成立。

又因 $\lim\limits_{x\to 0}\cos x = 1$，(3)式两端的极限都是 1，根据夹逼准则可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

从证明过程可以看出，用夹逼准则的证明方法，利用了“同一圆心角对应的圆内接三角形面积 < 扇形面积 < 圆外切三角形的面积”，在逻辑上具有基础性，同时几何图形比较直观，易于学生理解。

在一些参考文献中，也用了其它的方法结合夹逼准则来证明此重要极限：文献[4]从几何上论述了正弦线、弧长和圆的渐开线的正切线关系(非面积关系)，也得到了(2)式，进而用夹逼准则证明了此重要极限。文献[5]另辟蹊径，借助不等式 $x - x^2 \le \sin x \le x + x^2$，$x \in R$ 可得 $1 - \lim\limits_{x\to 0} x \le \lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \le 1 + \lim\limits_{x\to 0} x$，利用夹逼准则也可得结论，此方法逻辑严谨，是一个比较好的分析方法。

除了借助夹逼准则外，还可以用极限的定义来证明，但证明过程比较麻烦。文献[6]利用复数域中的欧拉公式进行证明，新颖独特。还有用洛必达法则、泰勒级数展开、拉格朗日中值定理等其他方法证明。

需要指出的是：用洛必达法则、泰勒级数展开等方法证明，看似优美，但这些证明方法在严格意义上是具有循环论证的矛盾。比如，如果用洛必达法则来证明，其过程如下：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\sin' x}{\lim\limits_{x\to 0} x'} = \frac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{1} = \lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$$

这个证明方法看似很简单方便，但在证明过程中用到了 $\sin' x = \cos x$ 的结论。而在证明 $\sin' x = \cos x$ 的过程中，则又使用了重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 的结果。这是因为，若令 $t = \frac{\Delta x}{2}$，根据导函数定义有：

$$\sin' x = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}$$

$$= \cos x \times 1 = \cos x$$

可见用洛必达法则证明此重要极限，就得先对 $\sin x$ 求导，而对 $\sin x$ 求导的证明过程中又要用到重要极限的结论，这就陷入了循环论证的矛盾。

类似的，正弦函数 $\sin x$ 在原点处的泰勒级数展开(也称为麦克劳林级数展开)为

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots \tag{4}$$

(4) 式中的泰勒级数用到了 $\sin x$ 的各阶导数，故用泰勒级数展开证明重要极限在逻辑上也存在着循环证明的嫌疑。或者说先有重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 的结论，然后才有 $\sin x$ 泰勒级数的应用。

需要特别指出的是：上述 $\sin' x = \cos x$ 论证过程还可以变形为

$$\sin' x = \cos x \lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = \cos x \lim_{t\to 0}\frac{\cos t \tan t}{t} = \cos x \cos 0 \lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t} = \cos x \lim_{t\to 0}\frac{\tan t}{t} = \cos x$$

此证明过程用到了 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\tan t}{t} = 1$，它与重要极限 $\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t} = 1$ 没有本质的区别，仍不能摆脱重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 循环论证的嫌疑。

本文基于“割圆术”思想的启发，结合极限概念，尝试给出重要极限一种新的推导方法。此方法在几何上比较直观且避免了循环论证的矛盾，可丰富重要极限的教学实践。

2. 割圆术

圆是最重要的几何概念之一，圆简单、端庄、优美，充分展示了二维的完美[7]。众所周知，圆的周长 = 圆的直径 × 圆周率，其中“圆周率”是一个不变的“常数”，而“直径”是直的，好测量。测量出了直径，那么借助圆周率就很容易计算出圆的周长了。同样，我们借助圆周率可以进行关于圆和球体的各种计算，因此在数学的历史长河中，有许多的数学家对“圆周率”的计算方法进行了研究。其中，我国魏晋时期数学家刘徽于公元 263 年撰写《九章算术注》，在割圆术中引入了极限思想并通过割圆术得到 3.1416 的圆周率近似值。

所谓“割圆术”，是用圆内接正多边形的面积去无限逼近圆面积并以此求取圆周率的方法[7]。刘徽形容他的“割圆术”说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至于不可割，则与圆合体，而无所失矣。”意思是说圆分割越细，圆内接正多边形的面积与圆的面积误差就越小，无限细分圆，则圆内接正多边形面积就与圆面积没有差别了，以此可逐步计算圆周率的真实值，体现的是一种无限与有限的转化过程。刘徽从圆内接正六边形开始，每次把边数加倍，刘徽算到了正 3072 边形，得到了圆周率的值等于 3.1416，后人称之为徽率。

割圆术在圆周率计算史上曾长期使用。祖冲之采用刘徽割圆术分割到 24576 边形，这一结果精确到小数点后第 7 位 3.1415926，直到一千多年后才由 15 世纪的阿拉伯数学家阿尔•卡西以 17 位有效数字打破此记录。后来分析方法发明后逐渐取代了割圆术，但割圆术作为计算圆周率最早的科学方法一直为人们所称道。

本文受到“割圆术”计算圆周率方法的启发，利用“当边数增大时圆内接正多边形的周长无限逼近圆周长”的思想，给出了重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 的一种新的证明方法。

3. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ 的证明

根据“割圆术”思想，当圆内接正 n 边形的边数 n 趋于无穷大时，圆内接正 n 边形的周长趋于圆的周长 c。

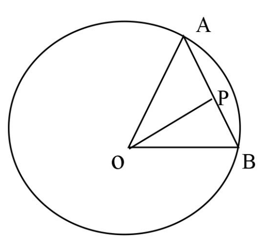

Figure 2. Regular polygon figure inscribed in a circle
图 2. 圆内接正多边形的边角关系示意图

设单位圆上有一内接正 n 边形，圆心为 o，周长为 c。设 AB 为正 n 边形的一条边，P 为弦 AB 的中点，如图 2 所示。

根据弧度定义，圆周角定义为 $\frac{c}{r}=c$。因 AB 是圆内接正 n 边形的一条边，故弦 AB 对应的圆心角∠AOB 是圆周角的 $\frac{1}{n}$，即∠AOB $=\frac{1}{n}\frac{c}{r}=\frac{c}{nr}=\frac{c}{n}$。又因为 P 为等腰三角形 ΔAOB 的底边 AB 的中点，故 OP 平分∠AOB，即∠BOP $=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=\frac{c}{2n}$，且 OP⊥AB，故 ΔBOP 为直角三角形。由直角三角形的边角关系，可得

$$\mathrm{BP}=\mathrm{OB}\times\sin\left(\angle\mathrm{BOP}\right)=r\times\sin\left(\angle\mathrm{BOP}\right)=\sin\left(\angle\mathrm{BOP}\right)=\sin\left(\frac{c}{2n}\right)$$

所以，

$$\mathrm{AB}=2\mathrm{BP}=2\sin\left(\frac{c}{2n}\right)$$

故，圆内接正 n 边形的周长为

$$n\times\mathrm{AB}=2n\sin\left(\frac{c}{2n}\right)$$

当边数 n 增大时，圆内接正 n 边形的周长与圆周长越来越接近，当边数 n 趋于无穷大时，有

$$\lim_{n\to+\infty}2n\sin\frac{c}{2n}=c \tag{5}$$

令 $x=\frac{c}{2n}$，当 $n\to+\infty$ 时，$x\to0^{+}$，由(5)式可知

$$\lim_{n\to+\infty}2n\sin\frac{c}{2n}=\lim_{n\to+\infty}c\frac{\sin\frac{c}{2n}}{\frac{c}{2n}}=c\lim_{n\to+\infty}\frac{\sin\frac{c}{2n}}{\frac{c}{2n}}=c\lim_{x\to0^{+}}\frac{\sin x}{x}=c \tag{6}$$

(6) 式表明 $c\lim\limits_{x\to0^{+}}\frac{\sin x}{x}=c$，两端同除以非零常数 c，可得 $\lim\limits_{x\to0^{+}}\frac{\sin x}{x}=1$。

因 $\frac{\sin x}{x}$ 是偶函数，所以 $\lim\limits_{x\to0^{-}}\frac{\sin x}{x}=1$，故

$$\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$$

由此可见：基于古老“割圆术”思想的重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的推导过程，融合了现代极限理论，避开了循环论证的矛盾，且具有几何直观性，过程也比较简洁。若将其运用到教学中，也是一个新颖的教学视角，可以开阔学生的思路。

4. 总结

本文尝试将古代数学思想“割圆术”与近代数学的核心概念“极限”进行巧妙融合，用圆内接正多边形的周长随着边数的增加无限逼近圆的周长的方法，结合正弦函数，给出了重要极限 $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1$ 的一种新的证明方法。此方法具有几何直观性，简洁明了，且避开了循环论证的矛盾，是重要极限证明方法

的有益补充和尝试，为重要极限这一经典论题提供一个新颖的、富含历史底蕴的教学视角。

基金项目

国家自然科学基金资助项目(42174036)；信息工程大学基金项目(a8224,1018201)；信息工程大学教育教学课题(JXYJ2025C006)。

参考文献

[1] 阿德里安·班纳. 普林斯顿微积分读本[M]. 第2版. 杨爽, 赵晓婷, 高璞, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2016: 121-124.

[2] 同济大学数学科学学院, 编. 高等数学[M]. 第8版. 北京: 高等教育出版社, 2023: 44-46.

[3] 常心怡. “闲谈”两个重要极限[J]. 高等数学研究, 2008, 11(4): 83-88.

[4] 刘连福. 两个重要极限的简便证法及评析[J]. 沈阳师范大学学报(自然科学版), 2010, 28(3): 360-362.

[5] 杨东成. 两个重要极限的新证法及推广[J]. 保山学院学报, 2012, 31(5): 57-59.

[6] 汤茂林. 一个重要极限的证明策略[J]. 保山师专学报, 2009, 28(2): 15-16.

[7] 威廉·邓纳姆. 数学那些事[M]. 冯速, 译. 北京: 人民邮电出版社, 2022: 29-33.