Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(12), 97-103
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1512298

Hans汉斯

双等差数列的性质及其应用

肖劲森[1]，**苏文耀**[2*]

[1]广东石油化工学院理学院，广东 茂名
[2]高州市第一职业技术学校，广东 茂名

收稿日期：2025年10月27日；录用日期：2025年11月28日；发布日期：2025年12月18日

摘 要

双等差数列作为一类具有交替变化特性的特殊数列，在理论研究和实际应用中具有重要意义。本文系统研究了双等差数列的性质：首先证明了数列构成双等差数列的充要条件是其奇数项子列与偶数项子列均为等差数列且公差相同；其次建立了按固定间隔提取子列时的等差或双等差特性，并研究了前n项和序列的相应性质。本文还引入了双等差数列的生成函数，分析不同公差关系下数列的渐近行为与周期性。最后，通过精密激光切割设备工作台位移建模等实例，展示双等差数列在工程应用中的独特价值。

关键词

等差数列，双等差数列，性质，生成函数

On the Properties and Applications of Bi-Arithmetic Sequences

Jinsen Xiao[1], **Wenyao Su**[2*]

[1]School of Sciences, Guangdong University of Petrochemical Technology, Maoming Guangdong
[2]Gaozhou No. 1 Vocational Technical School, Maoming Guangdong

Received: October 27, 2025; accepted: November 28, 2025; published: December 18, 2025

Abstract

Bi-arithmetic sequences, as a special class of sequences with alternating variation characteristics, hold significant importance in both theoretical research and practical applications. This paper systematically investigates the fundamental properties of bi-arithmetic sequences. We first prove that a necessary and sufficient condition for a sequence to be bi-arithmetic is that both its odd-term and even-term subsequences are arithmetic sequences with a common difference. In addition, we

*通讯作者。

文章引用: 肖劲森, 苏文耀. 双等差数列的性质及其应用[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 97-103.
DOI: 10.12677/pm.2025.1512298

establish the arithmetic or bi-arithmetic characteristics of subsequences extracted at fixed intervals, and study the corresponding properties of partial sum sequences. We also introduce the generating function of bi-arithmetic sequences and analyze their asymptotic behavior and periodicity under different common difference relationships.. Finally, through examples such as displacement modeling of precision laser cutting equipment worktables, we demonstrate the unique value of bi-arithmetic sequences in engineering applications.

Keywords

Arithmetic Sequence, Bi-Arithmetic Sequence, Property, Generating Function

1. 引言

数列作为数学领域的重要研究对象，在数学理论发展与工程实际问题中均具有重要地位。等差数列与等比数列作为最基本的数列类型，其性质与应用已被广泛研究。随着数学理论的不断发展，新定义数列逐渐成为拓展数列理论的重要方向[1]-[3]。

双等差数列的概念最早由高鸿宾[1]于 1995 年提出，其定义为一个具有两个交替公差的特殊数列。此后，胡国强[4]和徐希扬[5]分别给出了不含取整符号的通项公式，为双等差数列的研究奠定了基础。现有文献对双等差数列的子列特性、生成函数及渐近行为等方面的研究尚不完善。

本文在已有研究成果的基础上梳理与拓展双等差数列的理论体系。首先探讨其奇子列与偶子列的性质，并分析子列及部分和序列在特定间隔下的结构特征，为双等差数列的实际应用提供理论依据。其次，引入生成函数作为分析工具，研究不同公差关系下数列的生成机制及其渐近行为。最后，通过 3 个实例，展示相关理论在工程与建模问题中的应用价值。

2. 预备知识

若数列 $\{a_n\}$ 满足条件

$$\begin{cases} a_{2m}-a_{2m-1}=d_1, \\ a_{2m+1}-a_{2m}=d_2, \end{cases} \left(m\in\mathbb{Z}^+\right), \tag{1}$$

则称数列 $\{a_n\}$ 为双等差数列，d_1,d_2 分别称为第一公差和第二公差[1]。特别地，当 $d_1=d_2$ 时，$\{a_n\}$ 为退化为普通等差数列。双等差数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为：

$$a_n=a_1+\left[\frac{n}{2}\right]d_1+\left[\frac{n-1}{2}\right]d_2, \tag{2}$$

其中 $[x]$ 表示不超过实数 x 的最大整数。

后续学者围绕通项公式展开优化，胡国强[4]提出不含取整符号的通项公式：

$$a_n=a_1+\frac{(n-1)(d_1+d_2)}{2}+\frac{d_1-d_2}{2}\cdot\frac{1+(-1)^n}{2}.$$

徐希扬[5]给出了分奇偶项的通项公式：

$$a_n=\begin{cases}a_1+(k-1)d_1+(k-1)d_2, & n=2k-1,\\ a_1+kd_1+(k-1)d_2, & n=2k.\end{cases}\quad (k\in\mathbb{Z}^+).$$

3. 性质定理

设 $\mathbb{Z}_o^+$ 与 $\mathbb{Z}_e^+$ 分别表示正奇数集与正偶数集，则有如下性质。

定理 1 设 $\{a_n\}$ 是双等差数列，对任意 $m,n\in\mathbb{Z}^+$，若 $n-m\in\mathbb{Z}_e^+$，则

$$a_n=a_m+\frac{n-m}{2}(d_1+d_2).$$

证 若 $n-m\in\mathbb{Z}_e^+$，设 $n=m+2k,(k\in\mathbb{Z}^+)$，则有

$$\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{m}{2}\right]=\left[\frac{n-1}{2}\right]-\left[\frac{m-1}{2}\right]=\frac{n-m}{2}=k.$$

由上式以及通项公式(2)可得

$$a_n-a_m=a_1+\left[\frac{n}{2}\right]d_1+\left[\frac{n-1}{2}\right]d_2-\left(a_1+\left[\frac{m}{2}\right]d_1+\left[\frac{m-1}{2}\right]d_2\right)=\frac{n-m}{2}(d_1+d_2).$$

定理得证。

定理 2 数列 $\{a_n\}$ 是双等差数列的充要条件是它的奇子数列 $\{a_{2m-1}\}$ 和偶子列 $\{a_{2m}\}$ 都是等差数列，且公差相等。

证 (必要性) 设 $\{a_n\}$ 为双等差数列，d_1,d_2 分别为第一公差和第二公差。由定理 1 (或式子(1))易得

$$\begin{cases}a_{2m+1}-a_{2m-1}=d_1+d_2,\\ a_{2m+2}-a_{2m}=d_1+d_2,\end{cases}\ (m\in\mathbb{Z}^+).$$

显然数列 $\{a_{2m-1}\}$ 与 $\{a_{2m}\}$ 都是以公差为 d_1+d_2 的等差数列。

(充分性) 设 $\{a_n\}$ 的两子列 $\{a_{2m-1}\}$ 与 $\{a_{2m}\}$ 均是公差为 d 的等差数列，即

$$\begin{cases}a_{2m+1}-a_{2m-1}=d,\\ a_{2m+2}-a_{2m}=d.\end{cases}\tag{3}$$

下面使用数学归纳法证明存在常数 d_1,d_2，使得对于所有 $m\in\mathbb{Z}^+$，有(1)成立。当 $m=1$ 时，由(3)有 $a_3-a_1=d$. 由于 $a_3-a_1=(a_3-a_2)+(a_2-a_1)$, 令 $a_2-a_1=d_1$, $a_3-a_2=d_2$. 则 $d=d_1+d_2$, 且有

$$\begin{cases}a_2-a_1=d_1,\\ a_3-a_2=d_2.\end{cases}$$

假设 $m=k$ 时(1)成立，即：

$$\begin{cases}a_{2k}-a_{2k-1}=d_1,\\ a_{2k+1}-a_{2k}=d_2.\end{cases}$$

当 $m=k+1$ 时，由(3)有：

$$a_{2m}-a_{2m-1}=a_{2k+2}-a_{2k+1}=(a_{2k+2}-a_{2k})-(a_{2k+1}-a_{2k})=d-d_2=d_1,$$

$$a_{2m+1}-a_{2m}=a_{2k+3}-a_{2k+2}=(a_{2k+3}-a_{2k+1})-(a_{2k+2}-a_{2k+1})=d-d_1=d_2.$$

因此当 $m=k+1$ 时也有(1)成立。证毕。

定理 3 设 $\{a_m\}$ 是双等差数列，对任意 $m,k\in\mathbb{Z}^+$，取子列

$$a_m,a_{m+k},a_{m+2k},\cdots,a_{m+nk},\cdots.\tag{4}$$

则：(i) 若 $k\in\mathbb{Z}_e^+$, 该子列为等差数列，且公差为 $k\left(d_1+d_2\right)/2$；(ii) 若 $k\in\mathbb{Z}_o^+$，该子列为双等差数列。

证 当 $k\in\mathbb{Z}_e^+$ 时，由于 $m+(n+1)k-(m+nk)=k$，由定理 1 得：

$$a_{m+(n+1)k}-a_{m+nk}=\frac{k}{2}\left(d_1+d_2\right).$$

因此数列(4)是公差为 $k\left(d_1+d_2\right)/2$ 的等差数列。

下面证明(ii)。由定理 2 知只需证当 $k\in\mathbb{Z}_o^+$ 时，数列(4)的两个子数列 $\left\{a_{m+(2n-1)k}\right\}$ 与 $\left\{a_{m+2nk}\right\}$ 是公差相等的等差数列。注意到对任意 $k\in\mathbb{Z}_o^+$，我们有

$$m+2(n+1)k-(m+2nk)=2k, m+(2n+1)k-\left(m+(2n-1)k\right)=2k.$$

由定理 1 得

$$a_{m+2(n+1)k}-a_{m+2nk}=k\left(d_1+d_2\right),$$
$$a_{m+(2n+1)k}-a_{m+(2n-1)k}=k\left(d_1+d_2\right).$$

因此数列(4)为双等差数列。

定理 4 设 $\{a_n\}$ 是双等差数列，S_n 为其前 n 项和，定义数列

$$S_k, S_{2k}-S_k, S_{3k}-S_{2k},\cdots. \tag{5}$$

则：(i) 若 $k\in\mathbb{Z}_e^+$，数列(5)为等差数列，且公差为 $k^2\left(d_1+d_2\right)/2$；(ii) 若 $k\in\mathbb{Z}_o^+$，数列(5)为双等差数列。

证 先证(i)。设

$$b_1=S_k, b_2=S_{2k}-S_k,\cdots,\ b_n=S_{nk}-S_{(n-1)k},\cdots. \tag{6}$$

若 $k\in\mathbb{Z}_e^+$, 我们有

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=S_{(n+1)k}-S_{nk}-\left(S_{nk}-S_{(n-1)k}\right)\\&=a_{nk+1}+a_{nk+2}+\cdots+a_{(n+1)k}-\left(a_{(n-1)k+1}+a_{(n-1)k+2}+\cdots+a_{nk}\right)\\&=\left(a_{nk+1}-a_{(n-1)k+1}\right)+\left(a_{nk+2}-a_{(n-1)k+2}\right)+\cdots+\left(a_{(n+1)k}-a_{nk}\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}\left(a_{nk+i}-a_{(n-1)k+i}\right).\end{aligned}$$

对任意 $i=1,2,\cdots,k$，有 $nk+i-\left((n-1)k+i\right)=k\in\mathbb{Z}_e^+$，由定理 1 可得 $b_{n+1}-b_n=k^2\left(d_1+d_2\right)/2$。

下证(ii)：若 $k\in\mathbb{Z}_o^+$ 时，数列(5)为双等差数列。由定理 2 知只需证 $k\in\mathbb{Z}_o^+$ 时，数列(6)的两个子数列 $\{b_{2n}\}$ 与 $\{b_{2n-1}\}$ 都是等差数列，且公差相等。对于偶子列 $\{b_{2n}\}$，我们有：

$$\begin{aligned}&b_{2(n+1)}-b_{2n}\\&=S_{(2n+2)k}-S_{(2n+1)k}-\left(S_{2nk}-S_{(2n-1)k}\right)\\&=a_{(2n+1)k+1}+a_{(2n+1)k+2}+\cdots+a_{2(n+1)k}-\left(a_{(2n-1)k+1}+a_{(2n-1)k+2}+\cdots+a_{2nk}\right)\\&=\sum_{i=1}^{k}\left(a_{(2n+1)k+i}-a_{(2n-1)k+i}\right).\end{aligned}$$

对任意 $i=1,2,\cdots,k$，$(2n+1)k+i-\left((2n-1)k+i\right)=2k\in\mathbb{Z}_e^+$，从而有 $b_{2(n+1)}-b_{2n}=k^2\left(d_1+d_2\right)$。

类似可证奇子列 $\{b_{2n-1}\}$ 也是一个公差为 $k^2\left(d_1+d_2\right)$ 的等差数列。因此(ii)成立。

4. 生成函数与渐近性质

为深入剖析双等差数列的结构特征与变化规律，本节引入生成函数这一分析工具，探究双等差数列

的生成机制，并结合公差关系分析数列的渐近行为与周期性特征，为后续工程应用中的趋势预测与建模分析提供理论支撑。

对给定数列 $\{a_n\}$，我们称幂级数

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n$$

为这个数列的生成函数[6]。若 $\{a_n\}$ 为双等差数列，则有

定理 5 设双等差数列 $\{a_n\}$ 的第一公差与第二公差分别为 d_1,d_2，记 $D=d_1+d_2$，则其生成函数为：

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\frac{a_1x+a_2x^2}{1-x^2}+\frac{Dx^3}{(1-x^2)(1-x)},\quad |x|<1.$$

证 由定理 1 可得通项公式 $a_{2k-1}=a_1+(k-1)D$ 与 $a_{2k}=a_2+(k-1)D$。按项的奇偶性拆分为奇数项生成函数 $G_{\text{odd}}(x)$ 和偶数项生成函数 $G_{\text{even}}(x)$，即：

$$G(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n=\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k-1}x^{2k-1}+\sum_{k=1}^{\infty}a_{2k}x^{2k}=G_{\text{odd}}(x)+G_{\text{even}}(x).$$

根据无穷等比级数求和公式：

$\sum_{k=1}^{\infty}t^{k-1}=\frac{1}{1-t},\ (|t|<1)$，变形得 $\sum_{k=1}^{\infty}t^k=\frac{t}{1-t}$；

$\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)t^{k-1}=\frac{t}{(1-t)^2},\ (|t|<1)$，变形得 $\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)t^k=\frac{t^2}{(1-t)^2}$。

通过计算可得：

$$G_{\text{odd}}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_1+(k-1)D\right]x^{2k-1}=a_1\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k-1}+D\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)x^{2k-1}=a_1\cdot\frac{x}{1-x^2}+D\cdot\frac{x^3}{(1-x^2)^2},$$

$$G_{\text{even}}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\left[a_1+d_1+(k-1)D\right]x^{2k}=a_2\sum_{k=1}^{\infty}x^{2k}+D\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)x^{2k}=a_2\cdot\frac{x^2}{1-x^2}+D\cdot\frac{x^4}{(1-x^2)^2}.$$

因此可得：

$$G(x)=\frac{a_1x+a_2x^2}{1-x^2}+D\cdot\frac{x^3+x^4}{(1-x^2)^2}=\frac{a_1x+a_2x^2}{1-x^2}+\frac{Dx^3}{(1-x^2)(1-x)}.$$

定理 6 设双等差数列 $\{a_n\}$ 的第一公差与第二公差分别为 d_1,d_2，记 $D=d_1+d_2$，则数列的渐近行为与周期性由 D 的取值唯一决定，具体如下：

(i) 周期情形：当 $D=0$ 时，$\{a_n\}$ 是以 2 为周期的周期数列，并在 a_1 与 a_2 之间振荡；

(ii) 增长情形：当 $D>0$ 时，$a_n\sim\frac{D}{2}n\ (n\to\infty)$，数列呈线性增长趋势；

(iii) 衰减情形：当 $D<0$ 时，$a_n\sim\frac{D}{2}n\ (n\to\infty)$，数列呈线性衰减趋势。

证 由通项公式 $a_{2k-1}=a_1+(k-1)D,\ a_{2k}=a_2+(k-1)D$ 可得：

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k-1}}{2k-1}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_1+(k-1)D}{2k-1}=\frac{D}{2},\quad \lim_{k\to\infty}\frac{a_{2k}}{2k}=\lim_{k\to\infty}\frac{a_2+(k-1)D}{2k}=\frac{D}{2}.$$

因此，当 $n\to\infty$，$\frac{a_n}{n}\to\frac{D}{2}$，即 $a_n\sim\frac{D}{2}n,\ (n\to\infty)$。

当 $D>0$ 时，$\frac{D}{2}>0$，数列呈线性增长趋势；当 $D<0$ 时，$\frac{D}{2}<0$，数列呈线性衰减趋势。特别地，当 $D=0$ 时，$a_{2k-1}\equiv a_1, a_{2k}\equiv a_2$，数列具有周期性。

5. 应用实例

例 1 (生产计划的交替增产分析)某电子设备制造工厂同时生产型号 A 和型号 B 两种智能手表，为匹配市场需求波动，制定交替增产计划：型号 A 手表首月产量为 500 只，从次月起，奇数月比前月增产 80 只，偶数月比前月增产 60 只，产量序列 $\{a_n\}$ 构成双等差数列。型号 B 手表首月产量为 400 只，从次月起，奇数月比前月增产 70 只，偶数月比前月增产 50 只，产量序列 $\{b_n\}$ 同样为双等差数列。

利用定理 2，分离两种型号手表产量的奇项子列(第 $1,3,5\cdots$ 月)与偶项子列(第 $2,4,6\cdots$ 月)，均为等差数列且公差分别为 $80+60=140$ 和 $70+50=120$。借助定理 3，若以每 3 个月为一个统计周期(间隔 $k=3\in\mathbb{Z}_o^+$ 的产量子列)，该子列仍保持双等差数列的规律。据此可精准预测各季度的产量波动区间，为原材料采购的批量规划、产线产能的动态调配提供量化依据。

例 2 (结构工程的交替载荷应力计算)一座跨海大桥，在运营过程中，由于潮汐和过往船只产生的水流冲击，桥梁结构承受的载荷呈现交替变化的特点。假设在奇数周期(如以一周为一个周期)，桥梁承受的额外载荷增量为 1000 kN，在偶数周期，额外载荷增量为 800 kN，那么桥梁结构在不同周期所承受的总载荷形成了一个双等差数列。

根据定理 4，若以每两个周期(间隔 $k=2\in\mathbb{Z}_e^+$)为一个研究阶段，计算这期间桥梁所承受的总载荷，其构成的数列是等差数列，公差为 $2^2(1000+800)/2=3600\text{ kN}$。工程师们利用这一规律，可以快速计算特定时间段内桥梁承受的总载荷情况，进而准确分析结构内部的应力分布。这对于评估桥梁的疲劳强度、确定维护周期以及预测结构的使用寿命至关重要，能够提前发现潜在的安全隐患，确保桥梁的长期稳定运行。

例 3 (精密激光切割设备工作台位移建模分析)某精密激光切割设备工作台受“下压定位－抬升复位”交替动作影响，1 Hz 采样的 20 组位移数据(单位：cm)见表 1：

Table 1. Sampling data of the worktable of a precision laser cutting device
表 1. 精密激光切割设备工作台采样数据

采样时刻 n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
位移 a_n	2	2.23	2.39	2.62	2.78	3.01	3.17	3.4	3.56	3.79
采样时刻 n	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
位移 a_n	3.95	4.18	4.34	4.57	4.73	4.96	5.12	5.35	5.51	5.74

该数列的奇偶子列公差均为 0.39 cm，由定理 2 知该数列为双等差数列。计算相邻数据差值得到第一公差 $d_1=0.23$ (奇数→偶数时刻，下压定位)，第二公差 $d_2=0.16$ (偶数→奇数时刻，抬升复位)代入公式(2)可得双等差数列模型：

$$a_n=a_1+\left[\frac{n}{2}\right]\times 0.23+\left[\frac{n-1}{2}\right]\times 0.16.$$

若假设位移线性增长，通过最小二乘法拟合得线性回归模型：$\tilde{a}_n=1.82+0.195n$，拟合误差约 0.018 cm。下表 2 从拟合精度等四个维度对以上两种模型进行对比。

Table 2. Comparison between the bi-arithmetic sequence model and the linear regression model
表 2. 双等差数列模型与线性回归模型对比

对比维度	双等差数列模型	线性回归模型	核心优势总结
拟合精度	拟合误差为 0 cm，贴合实测数据	拟合误差约 0.018 cm，存在系统性偏差	双等差数列模型能精准捕捉由交替工况引起的位移波动，拟合偏差较小
物理意义适配性	双公差对应“下压－抬升”两种交替工况的位移增量，物理意义清晰	单一斜率仅为一种平均效应，无法区分和解释两种不同的物理过程	模型结构与实际物理过程高度契合，具备良好的解释性
长期预测能力	能进行阶段化预测，精确预测未来任意时刻工作台处于“下压”或“抬升”阶段的位置	仅能提供平均趋势预测，会平滑掉交替动作的细节，长期预测偏差会累积	预测结果更贴合设备的实际动作规律，对于精密控制至关重要
子列分析能力	根据定理 3，间隔为奇数的子列仍为双等差数列，可用于分段监测设备的振动周期或动作稳定性	任何等间隔子列均为单一等差数列，其特性与实际设备的交替运动规律不符，分析价值有限	支持对设备工作周期进行更精细化的监测与诊断

在本例中，双等差数列模型不仅在数学上实现了对实测数据的完美拟合，更重要的是，其理论框架与设备“下压－抬升”的交替工作机理完美对应。相较于传统的线性回归模型，它能提供更具物理意义、更精确且更细致的分析与预测，充分展示了双等差数列理论在解决特定类型工程问题中的独特价值与优势。

基金项目

广东省教育科学规划课题(2024GXJK561)；茂名市教育科学“十四五”规划课题(mjy2023179)；广东石油化工学院教育教学改革研究项目(710136090421)。

参考文献

[1] 高鸿宾. 双等差数列[J]. 数学通报, 1995(7): 14-16.
[2] 侯新昌. 周期跳跃数列[J]. 数学通报, 1997(3): 16-18.
[3] 黄加卫, 徐晓红. 培养学生迁移能力的好素材——新定义型数列[J]. 中学数学, 2005(11): 40-41.
[4] 胡国强. 双等差数列的又一通项公式[J]. 数学通报, 1997(1): 24.
[5] 徐希扬. 双等差数列及其性质[J]. 中学生数学, 2009(377): 30-31.
[6] 史济怀. 母函数[M]. 第 2 版. 合肥: 中国科学技术大学出版社, 2014.