

关于两个中心四腿蜘蛛的Erdős-Sós猜想

张 扬, 周垂香

福州大学数学与统计学院, 福建 福州

收稿日期: 2025年10月27日; 录用日期: 2025年11月28日; 发布日期: 2025年12月16日

摘要

Erdős-Sós猜想是极值图论的一个经典问题, 围绕此猜想有许多相关结论。猜想的内容是: 如果一个图 G 有 n 个点且 $e(G) > \frac{(k-1)n}{2}$, 则 G 包含任何 k 条边的树。蜘蛛是指最多有一个点度数超过2的树, 2-中心蜘蛛是指只有两个点的度数超过2的树。Erdős-Sós猜想已经被证明对于3条腿的蜘蛛成立, 在此方法上, 本文利用图的结构进行分类讨论并证明了猜想对于每一中心有一条2长腿的2-中心4腿蜘蛛成立。

关键词

Erdős-Sós猜想, 树, 蜘蛛树, 圈, 路

On the Erdős-Sós Conjecture for 2-Center 4-Leg Spiders

Yang Zhang, Chuixiang Zhou

School of Mathematics and Statistics, Fuzhou University, Fuzhou Fujian

Received: October 27, 2025; accepted: November 28, 2025; published: December 16, 2025

Abstract

The Erdős-Sós conjecture is a classic problem in extremal graph theory, with many related conclusions surrounding it. The Erdős-Sós conjecture states that every graph with n vertices and $e(G) > \frac{(k-1)n}{2}$ contains every tree with k edges. A spider is defined as a tree with at most one vertex of degree greater than 2. A 2-center spider is a tree which has only two vertices degrees greater than 2. The Erdős-Sós conjecture has been proven for spiders with 3 legs. Basing on the method of constructing, we prove that the conjecture is true for spiders of 2-center spider with 4 legs and each center has a leg of length 2.

文章引用: 张扬, 周垂香. 关于两个中心四腿蜘蛛的 Erdős-Sós 猜想[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 34-40.
DOI: [10.12677/pm.2025.1512291](https://doi.org/10.12677/pm.2025.1512291)

Keywords

Erdős-Sós Conjecture, Tree, Spider, Cycle, Path

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

对于图 G , $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示图的点集和边集。将 $|E(G)|$ 与 $|V(G)|$ 分别记作 $e(G)$ 与 $v(G)$ 。令 $v \in V(G)$, v 的度数是指与 v 关联的边的个数, 记作 $d(v)$ 。 $G - v$ 是图 G 去掉点 v 以及与其相连的所有边得到的图。 $\delta(G)$ 和 $\Delta(G)$ 分别表示图的最小度和最大度。

令 C 是图 G 中的一个圈且 $u, v \in V(C)$, 我们用 $C[u, v]$ 表示圈 C 上按顺时针方向从 u 到 v 的路。

蜘蛛是指最多有一个点的度数大于 2 的树。在蜘蛛的概念上扩展, 2-中心蜘蛛是有两个相邻的度数大于 2 的点的树。这两个度数大于 2 的点称为 2-中心蜘蛛的中心。蜘蛛的腿是指从蜘蛛的中心到 1 度点且不经过其他中心的路。2-中心蜘蛛的每个中心至少有两条腿。 k 边蜘蛛即边数为 k 的蜘蛛。2-中心 4-腿蜘蛛即有四条腿的 2-中心蜘蛛。我们称图 H 可嵌入到图 G 中指图 G 中包含一个同构于 H 的子图。关于树的嵌入, 有以下著名的 Erdős-Sós 猜想:

猜想 1 [1] 如果一个图 G 有 n 个点且 $e(G) > \frac{(k-1)n}{2}$, 则 G 包含任何 k 条边的树。

Erdős-Sós 猜想距今已有 60 多年的历史, 虽然仍未取得突破性进展, 仍吸引了大量的数学家从事这个问题的研究。已知的结论主要集中在两个方面: 特殊的图 G 以及特殊的树。从图 G 的角度, Brandt 和 Dobson 证明当图 G 的围长为 5 时猜想 1 成立[2]; Eaton 和 Tiner 证明猜想 1 当图 G 不含 $k+4$ 长的路时成立[3]; Yin 和 Li 证明当图 G 的补不含 C_4 时猜想成立[4]。从树的角度考虑, Erdős 和 Gallai 证明了对于树为 P_k 时猜想 1 也成立[5]; McLennan 证明了如果树的半径为 4 时猜想 1 成立[6]; 范更华等人证明了猜想 1 对于蜘蛛成立[7]-[9]; 王仕成和侯新民证明了猜想对所有腿长不超过 2 的 2-中心蜘蛛成立[10]。Erdős-Sós 猜想已经被证明对于 3 条腿的蜘蛛成立, 在此方法上, 本文利用图的结构进行分类讨论并证明了猜想对于每一中心各有一条 2 长腿的 2-中心 4-腿蜘蛛成立, 即:

定理 1 如果一个图 G 有 n 个点且 $e(G) > \frac{(k-1)n}{2}$, 则 G 包含任何 k 条边的每个中心各有一个 2 长腿的 2-中心 4-腿蜘蛛。

2. 基本引理

在证明定理 1 之前我们先给出以下需要用到的引理。

引理 1 [6] 如果 G 是 n 个点的图且 $e(G) > \frac{(k-1)n}{2}$, 则存在一个子图 $H \subset G$ 满足 $e(H) > \frac{(k-1)v(H)}{2}$

且 $\delta(H) \geq \frac{k}{2}$ 。

引理 2 [10] 如果 G 是 n 个点的图且 $e(G) > \frac{(k-1)n}{2}$, 则 G 包含任意 k 条边且腿长不超过 2 的 2-中心蜘蛛。

文献[5]中的定理 2.7 证明了如果图 G 是 n 个点的图且 $e(G) > \frac{(n-1)l}{2}$, 那么图 G 中存在一个长度至少为 $l+1$ 的圈。由于 $\frac{(l-1)n}{2} \geq \frac{(l-1)(n-1)}{2}$, 所以当 $e(G) > \frac{(l-1)n}{2}$ 时, G 中存在一个长度至少为 l 的圈。当为了方便我们将其描述为:

引理 3 [5] 如果图 G 是 n 个点的图且 $e(G) > \frac{(k-1)n}{2}$, 那么图 G 中存在一个长度至少为 k 的圈。

3. 主要结果

本节我们证明主要结论: 定理 1。

定理 1 如果一个图 G 有 n 个点且 $e(G) > \frac{(k-1)n}{2}$, 则 G 包含任何 k 条边的每个中心各有一个 2 长腿的 2-中心 4-腿蜘蛛。

证明 根据引理 1, 我们不妨假设图 G 满足 $\delta(G) \geq \frac{k}{2}$ 。

如果 $\Delta(G) \leq k-1$, 则

$$e(G) = \frac{\sum_{v \in V(G)} d(v)}{2} \leq \frac{n(k-1)}{2}$$

与已知条件矛盾。因此, 我们可得 $\Delta(G) \geq k$ 。

令 T 是一个 2-中心 4 条腿的蜘蛛且边数为 k 。设 L_1, L_2, L_3, L_4 为 T 的四条腿, L_1 和 L_3 联接中心 c_1 , L_2 和 L_4 联接另一个中心 c_2 。记 $e(L_i) = l_i$ ($i=1, 2, 3, 4$)。设 $l_3 = l_4 = 2$, $l_1 \leq l_2$ 。则 $l_1 + l_2 + 5 = k$ 。根据引理 2, 我们可以假设 $l_1 \geq 2, l_2 \geq 3$ 。

令 C 是 G 中的最长圈。根据引理 3, 我们有 $|C| \geq k$ 。

情形 1 C 是 G 中的哈密顿圈

令 $C = v_0v_1 \cdots v_{n-1}v_0$ 且我们假定 $d(v_0) = \Delta(G)$ 。则 $d(v_0) \geq k$ 。选择最小的指标 i 使满足 $v_0v_i \in E(G)$ 且 $i \geq l_1 + 3$, 由 $d(v_0) \geq k$ 且 $l_1 + 3 < k$ 可知 i 一定存在。于是 v_0 和 v_i 将圈 C 分成两段路 $P_1 = v_0v_1 \cdots v_i$ 和 $P_2 = v_iv_{i+1} \cdots v_{n-1}v_0$ 。根据 i 的选择, v_0 至多有 $l_1 + 2$ 个邻点在 $P_1 - v_{i-1}v_i$ 上。那么路的 P_2 长度至少为 $d(v_0) - (l_1 + 2) \geq l_2 + 3$, 因此可以 v_0 为中心 c_1 嵌入 L_1 (在 P_1 上) 和 L_3 (在 P_2 上), 以 v_i 为中心 c_2 嵌入 L_2 (在 P_2 上) 和 L_4 (在 P_1 上)。

情形 2 C 不是哈密顿圈

令 $C = v_0v_1 \cdots v_{s-1}v_0, s \geq k$ 。由于 C 不是哈密顿圈, 那么 $G - V(C)$ 有一个连通分支 H , 且 $V(H) \geq 1$ 。又因为 G 是连通的, 我们不妨假设 $v_0 \in C, u_1 \in H$ 使得 $v_0u_1 \in E(G)$ 。令

$$P = u_1u_2 \cdots u_l$$

为 H 中从 u_1 出发的最长路, 由于 P 为最长路, 所以 u_l 的邻点要么在 P 上要么在 C 上。令 x_1, x_2, \dots, x_p 为 u_l 在路 $P + v_0u_1$ 上的邻点, 它们以 $x_1 = u_{l-1}$ 沿着路 $u_{l-1}u_{l-2} \cdots u_1v_0$ 依次排布。

情况 2.1 $N(u_l) \cap V(C - v_0) \neq \emptyset$

设 y_1, y_2, \dots, y_q ($q \geq 1$) 为 u_l 在 $V(C) - v_0$ 上的邻点, 它们沿着圈 C 按顺时针顺序依次排布。我们有 $p + q = d(u_l) \geq \frac{k}{2}$ 。

接下来我们根据 P 的长度以及 u_l 在路 $P + v_0u_1$ 上的邻点个数 p 进行分类讨论。

(1) $l < l_2$

此时 L_2 无法嵌入 P , 再根据 p 与 L_1 的长度考虑 L_1 的嵌入情形。

(i) $p \leq l_1$

因为 C 是最长圈, 所以 C 上任意两点 x, y 之间的与 C 边不交路 Q 的长度不能超过 $C[x, y]$ 的长度, 否则我们可以将 $C[x, y]$ 替换成 Q 得到一个比 C 更长的圈, 产生矛盾。因此我们对圈 C 及 u_l 在 C 上的邻点可得以下性质:

$$\begin{aligned} (\mathcal{P}_1) \quad & |E(C[v_0, y_1])| \geq l+1, \quad |E(C[y_q, v_0])| \geq l+1; \\ (\mathcal{P}_2) \quad & |E(C[y_i, y_{i+1}])| \geq 2 \quad (i=1, 2, \dots, q-1). \end{aligned}$$

令 $C_b = u_l u_{l-1} \cdots u_1 v_0 \cdots y_1 \cdots y_b u_l$ 。根据以上性质对于任意 b , $1 \leq b \leq q$,

$$|E(C_b)| \geq 2(l+1) + 2(b-1) \geq 2(p+b).$$

从 p, q, k 的取值范围, 我们有 $q \geq \frac{k}{2} - p \geq \frac{l_1 + l_2 + 5}{2} - p$ 。于是

$$|E(C_q)| \geq 2(p+q) = 2p + 2q \geq 2p + l_1 + l_2 + 5 - 2p = l_1 + l_2 + 5.$$

因此我们可以选择最小的指标 b 使 $|E(C_b)| \geq l_1 + 3$ 。根据 b 的极小性, $b < \frac{l_1 + 3}{2} - p$ 。利用 $q \geq \frac{k}{2} - p$,

$$q - b \geq \frac{k}{2} - p - b > \frac{l_2 + 2}{2} > 2$$

则路 $y_{b+2} \cdots y_q \cdots v_{s-1}$ 的距离至少为 $2(q-b-2) + l > l_2 + l - 2 \geq l_2$ 。设点 y_b 为 v_i , 路 $C[v_{i-1}, y_{b+2}]$ 的长度至少为 2 且 $|E(C_b)| \geq l_1 + 3$ 。因此可以以 u_l 为中心 c_1 嵌入 L_1 和 L_3 , 以 y_{b+2} 为另一中心 c_2 嵌入 L_2 和 L_4 (如图 1)。

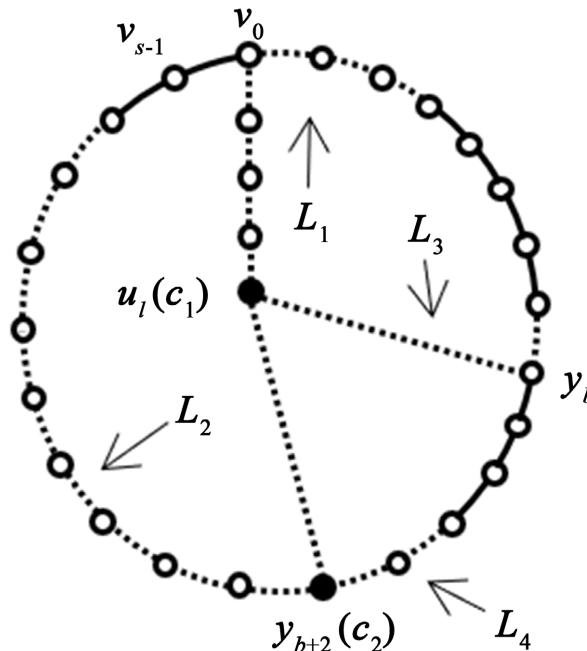


Figure 1. The embedding of T in case 2.1 (1) (i) $p \leq l_1$. The dashed line represents T , with the two centers being u_l and y_{b+2} .

图 1. 情况 2.1 中(1)(i) $p \leq l_1$ 时 T 的嵌入, 其中虚线表示 T , 两个中心分别为 u_l 和 y_{b+2}

(ii) $p > l_1$

此时, 我们可以选择 u_l 为一个中心 c_1 , 将 L_1 嵌入 P 。接下来寻找 u_l 的某个邻点为另一个中心 c_2 。由于 $p > l_1$, 所以 $P[u_l, x_{l_1}]$ 的长度至少为 l_1 。考虑 u_l 在 P 上的下一个邻点 x_{l_1+1} 。令 $C_b = u_l x_{l_1+1} \cdots u_1 v_0 \cdots y_b u_l$ 。 C

是最长圈保证情况(i)中的性质 (\mathcal{P}_1) 和 (\mathcal{P}_2) 都成立。因此, 对于任意 b , $1 \leq b \leq q$

$$|E(C_b)| \geq (p-l_1+1)+(l+1)+2(b-1)+1 \geq 2p+2b-l_1+1$$

选择极小的 b 使得 $|E(C_b)| \geq l_2+4$ 。我们要说明 b 一定存在。若找不到 b , 那么 C_q 的长度也小于 l_2+4 , 即 $2p+2q-l_1+1 \leq |E(C_q)| < l_2+4$, 即 $2(p+q) < l_1+l_2+3$ 。由 $p+q=d(u_l) \geq \frac{k}{2}$ 以及 $l_1+l_2+5=k$ 可得 $2 \times \frac{k}{2} = k < k-2$, 矛盾。所以可以取得 b 满足 $|E(C_b)| \geq l_2+4$ 。

经过计算可得路 $C[y_b, v_{s-1}]$ 的长度至少为 $2(q-b)+l > l_1 \geq 2$ 。由此我们可以将 y_b 作为中心点 c_2 , 将 L_4 嵌入 $C[y_b, v_{s-1}]$, 以 y_b 为起点逆时针方向将 L_2 嵌入 C (同时也在 C_b 上), 根据 C_b 的长度, 嵌入是可以实现的。设点 x_{l_1+1} 为 u_i , 路 $u_i u_{i-1} \cdots u_{i-1}$ 的长度至少为 l_1 , 以 u_i 为中心 c_1 , 将 L_1 嵌入路 $u_i u_{i-1} \cdots u_{i-1}$ 上, 再将 L_3 在 C_b 上沿 $u_i x_{l_1+1} \cdots$ 方向嵌入 C_b 。再根据 C_b 的长度可得此嵌入可实现且与 L_2 的嵌入不相交(如图2)。

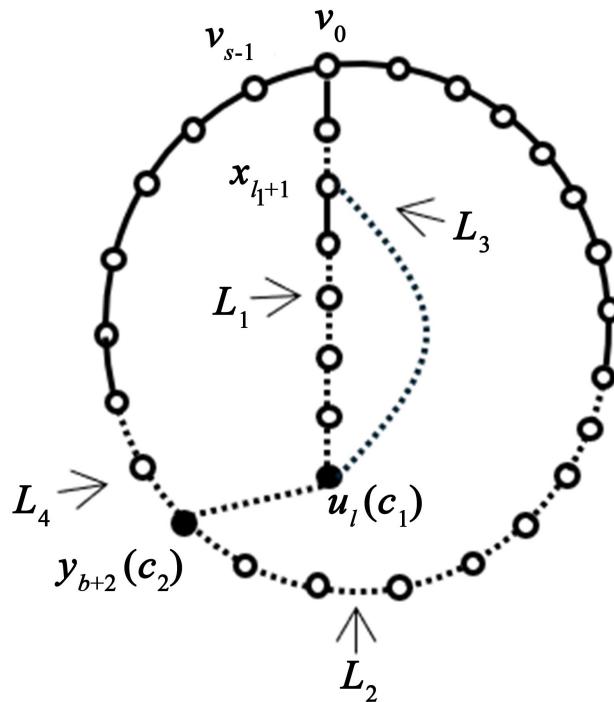


Figure 2. The embedding of T in case 2.1 (1) (ii) $p > l_1$. The dashed line represents T , with the two centers being u_l and y_b .

图 2. 情况 2.1 中(1) (ii) $p > l_1$ 时 T 的嵌入, 其中虚线表示 T , 两个中心分别为 u_l 和 y_b

(2) $l > l_2$

(I) v_1 的邻点满足 $N(v_1) \setminus V(C) \neq \emptyset$

假设 $P' = v_1 w_1 \cdots w_t$ 为最长路满足 $V(P') \cap V(C) = \{v_1\}$ 。

由于 C 是最长圈, 所以 $V(P') \cap V(P) = \emptyset$ 且 $w_i (i=1, 2, \dots, t)$ 与 $u_j (j=1, 2, \dots, l)$ 不相邻。由于 P' 为最长路, 所以 w_i 的邻点只能在 $V(P') \cup V(C)$ 中。

(i) $t \geq 2$

因为 $l > l_2$, 所以我们可以以 v_0 为中心 c_2 嵌入 L_2 和 L_4 , 其中 L_2 嵌入 P 上, L_4 嵌入 $v_0 v_{s-1} v_{s-2}$ 中。又由圈 C 的长度 $s \geq k \geq l_1 + 4$, 因此可以以 v_1 为中心 c_1 嵌入 L_1 和 L_3 , 其中 L_3 嵌入 P' 上, L_1 嵌入 $v_1 v_2 \cdots v_{l_1+1}$ 。

(ii) $t = 1$

根据引理, $d(w_1) \geq \delta(G) \geq \frac{k}{2}$, 设 z_1, z_2, \dots, z_r 为 w_1 在 $C - v_1$ 上的邻点, 它们沿着圈 C 的顺时针顺序分布, $r \geq \frac{k}{2} - 1$ 。因为 C 是最长圈, 所以以下性质成立。

$$(\mathcal{P}_3) |E(C[v_1, z_1])| \geq 2, |E(C[z_r, v_1])| \geq 2;$$

$$(\mathcal{P}_4) |E(C[z_i, z_{i+1}])| \geq 2 (i = 1, 2, \dots, r-1).$$

根据 (\mathcal{P}_3) 和 (\mathcal{P}_4) 我们可得路 $v_1 w_1 z_2 C[z_2, v_0]$ 的长度至少为 $2(r-2)+3 \geq 2\left(\frac{k}{2}-3\right)+3=l_1+l_2+2 \geq l_1+3$ 。

设点 z_2 为 v_i , 则路 $v_1 v_2 \cdots z_1 \cdots v_{i-1}$ 的长度至少为 2。因此可以以 v_1 为中心 c_1 嵌入 L_1 和 L_3 , 其中 L_1 嵌入路 $v_1 w_1 z_2 C[z_2, v_{s-3}]$ 上, L_3 嵌入路 $v_1 v_2 \cdots z_1 \cdots v_{i-1}$ 上。以 v_0 为中心 c_2 嵌入 L_2 和 L_4 , 其中 L_2 嵌入 P 上, L_4 嵌入路 $v_0 v_{s-1} v_{s-2}$ 上(如图 3)。

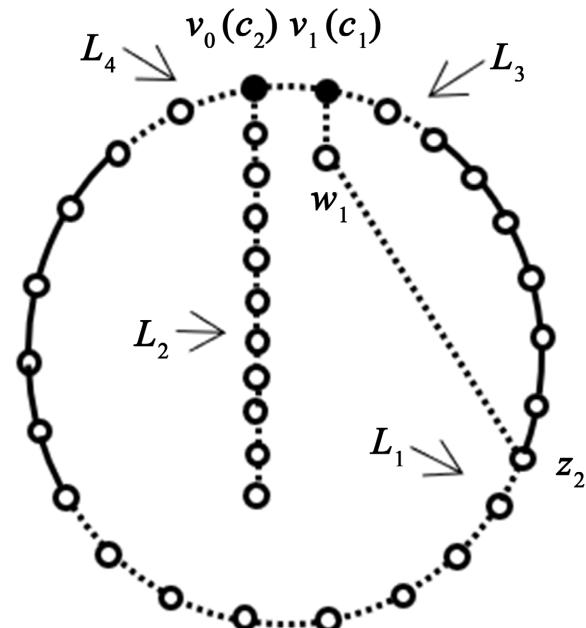


Figure 3. The embedding of T in case 2.1 (2) (I) (i) $t=1$. The dashed line represents T , with the two centers being v_0 and v_1

(II) v_1 的邻点满足 $N(v_1) \setminus V(C) = \emptyset$
此时与上面的方法类似, 我们以 v_0 为中心 c_2 嵌入 L_2 和 L_4 。以 v_1 为中心 c_1 先将 L_3 嵌入路 $v_1 v_2 v_3$ 上。接下来我们寻找 P_1 的嵌入。注意到 $d(v_1) \geq \delta(G) \geq \frac{k}{2} > 5$ 。若 v_1 没有邻点到 v_4 或 v_{s-3} 的距离大于等于 $l_1 - 1$, 则 $s \leq 2(l_1 - 2) + 3 + 4 \leq 2l_1 + 3$, 而 $s \geq k \geq l_1 + l_2 + 5$, 矛盾。所以可以找到 v_1 邻点到 v_4 或 v_{s-3} 的距离大于等于 $l_1 - 1$ 。不妨设 v_1 的这个邻点为 v_i 且 v_i 到 v_4 的距离不小于 $l_1 - 1$ 。于是我们可将 P_1 嵌入路 $v_1 v_i C[v_4, v_i]$ 上(如图 4)。

情况 2.2 $N(u_i) \cap V(C - v_0) = \emptyset$

则 u_i 的所有邻点都在路 $P + v_0 u_i$ 上, 所以 $P + v_0 u_i$ 的长度 $l \geq d(v_0) \geq \frac{k}{2} > l_2$, 因此我们以 v_0 为中心 c_2 嵌入 L_2 和 L_4 , 其中 L_2 嵌入 P 上。接下来考虑以点 v_1 为中心 c_1 嵌入 L_1 和 L_3 。根据情形 2.1 中(2)的相同步骤, 我们可以得到 L_1 和 L_3 的嵌入。

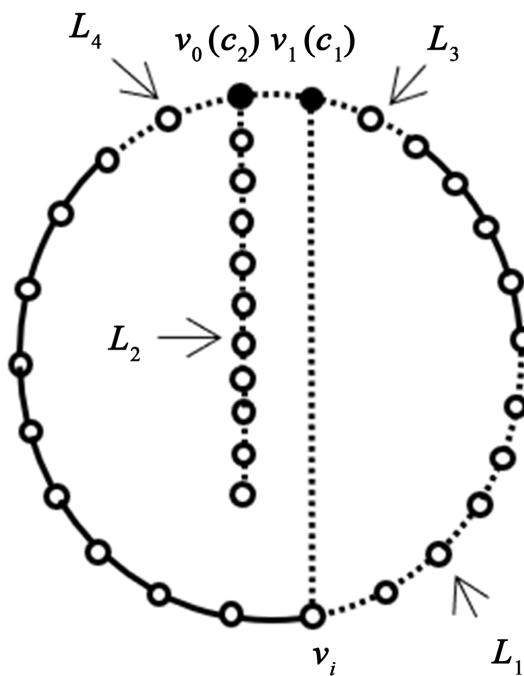


Figure 4. The embedding of T in case 2.1 (2) (II). The dashed line represents T , with the two centers being v_0 and v_1

图 4. 情况 2.1 中(2)(II)中 T 的嵌入, 其中虚线表示 T , 两个中心分别为 v_0 和 v_1

定理 1 证毕。

基金项目

国家自然科学基金(12271099), 福建省自然科学基金(2023J01413)。

参考文献

- [1] Erdős, P. (1965) Extremal Problem in Graph Theory. In: Fiedler, Ed., *Theory of Graphs and Its Applications*, Academic Press, 29-36.
- [2] Brandt, S. and Dobson, E. (1996) The Erdős-Sós Conjecture for Graphs of Girth 5. *Discrete Mathematics*, **150**, 411-414. [https://doi.org/10.1016/0012-365x\(95\)00207-d](https://doi.org/10.1016/0012-365x(95)00207-d)
- [3] Eaton, N. and Tiner, G. (2013) On the Erdős-Sós Conjecture for Graphs Having No Path with $k + 4$ Vertices. *Discrete Mathematics*, **313**, 1621-1629. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2013.04.024>
- [4] Yin, J. and Li, J. (2004) The Erdős-Sós Conjecture for Graphs Whose Complements Contain No C 4. *Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series*, **20**, 397-400. <https://doi.org/10.1007/s10255-004-0178-7>
- [5] Erdős, P. and Gallai, T. (1959) On Maximal Paths and Circuits of Graphs. *Acta Mathematica Academiae Scientiarum Hungaricae*, **10**, 337-356. <https://doi.org/10.1007/bf02024498>
- [6] McLennan, A. (2005) The Erdős-Sós Conjecture for Trees of Diameter Four. *Journal of Graph Theory*, **49**, 291-301. <https://doi.org/10.1002/jgt.20083>
- [7] Fan, G., Hong, Y. and Liu, Q. (2018) The Erdős-Sós Conjecture for Spiders.
- [8] Fan, G. and Sun, L. (2007) The Erdős-Sós Conjecture for Spiders. *Discrete Mathematics*, **307**, 3055-3062. <https://doi.org/10.1016/j.disc.2007.03.018>
- [9] Fan, G. and Huo, Z. (2016) The Erdős-Sós Conjecture for Spiders of Four Legs. *Journal of Combinatorics*, **7**, 271-283. <https://doi.org/10.4310/joc.2016.v7.n2.a4>
- [10] 王仕成, 侯新民. 关于 2-中心蜘蛛树的 Erdős-Sós 猜想[J]. 中国科学技术大学学报, 2020, 50(3): 289-293.