Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(12), 92-96
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1512297

浅析高斯公式在第二类曲面积分中的应用

韩艺兵，文生兰，贾瑞玲

信息工程大学基础部，河南 郑州

收稿日期：2025年10月30日；录用日期：2025年11月28日；发布日期：2025年12月17日

摘　要

第二类曲面积分的计算是高等数学多元函数积分学中的核心难点内容，最重要的计算方法是高斯公式。本文通过典型题目的变型拓展，分析总结了运用高斯公式计算第二类曲面积分的常见计算错误，并结合具体问题给出相应的解决策略，希望读者通过阅读本文可以进一步扎实理论根基，提升科学素养。

关键词

第二类曲面积分，高斯公式

A Brief Analysis of the Application of Gauss's Theorem in Surface Integrals of the Second Kind

Yibing Han, Shenglan Wen, Ruiling Jia

Basis Department of Information Engineering University, Zhengzhou Henan

Received: October 30, 2025; accepted: November 28, 2025; published: December 17, 2025

Abstract

The calculation of surface integrals of the second kind is a core and challenging topic in multivariable integral calculus of advanced mathematics, and the most important calculation method is Gauss's theorem. This paper analyzes and summarizes common calculation errors in applying Gauss's theorem to surface integrals of the second kind through variations and extensions of typical problems, and provides corresponding solutions based on specific problems. It is hoped that readers can further solidify their theoretical foundation and improve their scientific literacy by reading this article.

文章引用: 韩艺兵, 文生兰, 贾瑞玲. 浅析高斯公式在第二类曲面积分中的应用[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 92-96.
DOI: 10.12677/pm.2025.1512297

Keywords

Surface Integral of the Second Kind, Gauss's Theorem

1. 引言

第二类曲面积分是《高等数学》[1]课程中的核心难点之一，与之相关的题目综合性强，难度高，方法多变，计算过程复杂而冗长，对学生而言又是一个比较难掌握的知识点。而高斯公式作为沟通曲面积分与三重积分的重要桥梁，极大地简化了第二类曲面积分的计算，大大降低第二类曲面积分的计算难度。但学生在应用高斯公式时，往往停留在机械记忆步骤的层面，对公式的成立条件、适用边界以及特殊问题处理技巧(如“挖洞法”[2])的内在数学原理理解不足，导致在解决复杂问题时错误频出。本文旨在超越单纯的计算技巧罗列，通过典型例题说明高斯公式在第二类曲面积分中的应用，从高斯公式的数学本质出发，深入剖析其应用条件与“挖洞法”的理论基础，通过系统性地辨析常见错误，从而深化学生的理解，有效化解难点的同时，提高学生分析和解决问题的能力，培养学生严谨的数学思维能力的创新能力。

2. 高斯公式的理论核心与应用条件解读

2.1. 公式内容

设空间闭区域Ω由分片光滑的双侧封闭曲面**Σ**围成，若函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在Ω上连续，且有一阶连续偏导数，则有公式

$$\iiint_{\Omega}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\oiint_{\Sigma_{外}} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中**Σ是**Ω的边界曲面的外侧[3]。

2.2. 公式应用条件的深度解读

高斯公式建立了沿空间闭曲面的曲面积分和三重积分之间的关系，主要用于第二型曲面积分的计算，应注意的条件：① 积分曲面**Σ**为封闭曲面；② 积分曲面**Σ**的侧为外侧；③ 被积函数 $P(x,y,z)$，$Q(x,y,z)$，$R(x,y,z)$ 在Ω上连续，且有一阶连续偏导数。

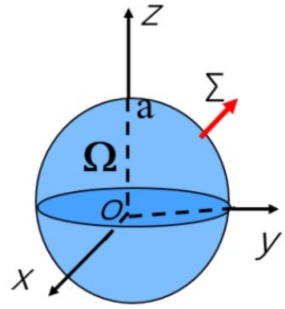
“闭曲面”与“外侧”：高斯公式本质上是关于闭区域Ω的定理。因此，积分曲面**Σ**必须是封闭的，并明确指定其方向为外侧。这是应用公式的先决条件。

“一阶连续偏导数”的来源：此条件并非凭空而来，而是为了保证等式右端三重积分的存在性以及公式证明的严谨性。在证明高斯公式时通常涉及将三重积分化为累次积分，需要用到牛顿–莱布尼茨公式，而该公式要求被积函数(此处即 $\frac{\partial P}{\partial x}$、$\frac{\partial Q}{\partial y}$、$\frac{\partial R}{\partial z}$)连续。若此条件不满足，例如在被积函数的偏导不存在的奇点上，公式可能不成立。

3. 运用高斯公式计算第二类曲面积分的易错点辨析

为了让学生对运用高斯公式计算第二类曲面积分有深刻的理解，本文通过典型题目进行说明。

例1 计算第二类曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 $\Sigma: x^2+y^2+z^2=a^2$ 取外侧。



问题 1：要计算此第二类曲面积分，直接计算较麻烦，考虑能否用高斯公式，首先要看此题是否满足高斯公式的使用条件，显然题中曲面是一个球面，是封闭曲面，而且取外侧，满足定理的前两个条件，观察到这三个被积函数，都有分母 $x^2+y^2+z^2$，而曲面是包含了原点的，那么在原点处分母为零，三个被积函数都没有定义，因此在这点处显然偏导数不连续，不满足定理的第三个条件，所以不能使用高斯公式。导致不能继续用高斯公式的原因偏导数不连续。那这样一个缺陷我们能不能去掉呢？

问题转化：注意到被积函数上的点在积分曲面上，满足曲面的方程。而曲面的方程恰为 $x^2+y^2+z^2=a^2$，这样我们就可以把此方程代入被积函数中，这样分母恰好化为常数 a^2，把常数提到积分号的外面，题目就转化为一个新的第二类曲面积分：

$$I=\frac{1}{a^2}\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\text{。}$$

此时三个被积函数对应的一阶偏导都连续了，刚才的问题就迎刃而解，柳暗花明，新的题目可以使用高斯公式了。此时有

$$\begin{aligned}I&=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{a^2}\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{a^2}\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}V\end{aligned}$$

问题 2：$\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}V=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}3a^2\mathrm{d}V$，此式中再次利用曲面**Σ**的方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 代入化简被积函数为 $3a^2$，是否正确？

问题分析：注意到三重积分的积分区域是空间立体Ω，因此区域上的点不仅可以在曲面**Σ**上取，也可以在Ω内部，它是在整个立体Ω上的积分，因此被积函数 $x^2+y^2+z^2\le a^2$ 不再是一个恒等式了，所以不能把曲面方程 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 代入化简被积函数。所以此转化错误。

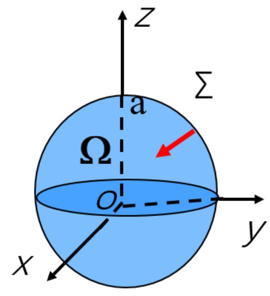
易错点总结：做题时一定要注意新旧知识的区别：只有曲线积分，曲面积分，积分区域的方程是恒等式，可以代入被积函数中简化计算，而重积分不管是二重还是三重它的积分区域都是包含内部的区域，都不是恒等式，所以都不能代入被积函数中简化计算。

正解：观察到此三重积分的积分区域是球体，而被积函数中又出现了 $x^2+y^2+z^2$，根据此特点，非常适合用球坐标来计算。因此可以把它转化为球坐标系下的累次积分如下：

$$I=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}V=\frac{1}{a^2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{a}r^2\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r=\frac{12}{5}\pi a^3$$

到此，我们把一个看似不能用高斯公式的问题，经过简化被积函数，最终利用高斯公式解决了。

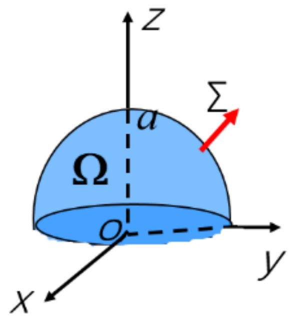
例题变型1：计算第二类曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 $\Sigma:x^2+y^2+z^2=a^2$ 取内侧。



分析：当曲面**Σ**取内侧时，根据第二类曲面积分的性质，当曲面的侧发生变化时，要改变符号，在上述结论中定负号。

正解： $I=-\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}V=-\frac{12}{5}\pi a^3$。

例题变型2：计算第二类曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}$，其中 Σ：$x^2+y^2+z^2=a^2$ 为上半球面，取上侧。



分析：此时曲面**Σ**为上半球面，不再封闭，不满足高斯公式的第二个条件。怎么办呢？

应对策略：补面。注意补面时越简单越好，一般都用平面。所以这里就补一个圆面，把它变成封闭半球体区域。同时注意，补的面要下侧，这样整体就构成曲面的外侧。用高斯公式计算完之后，最后把补上的这个面给减掉即可。

正解：补面 $\Sigma_0:x^2+y^2=a^2$，$(z=0)$，取下侧，

$$I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{a^2}\oiint\limits_{\Sigma}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a^2}\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\frac{1}{a^2}\oiint\limits_{\Sigma_0}x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{a^2}\iiint\limits_{\Omega}\left(3x^2+3y^2+3z^2\right)\mathrm{d}V-0=\frac{6}{5}\pi a^3$$

例题变型3： 计算第二类曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$，其中 $\Sigma:2x^2+2y^2+z^2=a^2$ 为椭球面，取外侧。

分析： 被积函数在原点处无定义，即存在“奇点”。原点位于椭球面**Σ**内部。此时椭球面的方程不能带入到被积函数的分母中去简化计算，因此此时三个被积函数一阶偏导不连续了。不满足高斯公式的使用条件，那么还有办法用高斯公式吗？

应对策略： 类比在格林公式的应用时类似问题的处理方法，通过添加辅助面将“奇点”给挖去后，形象的说就是“挖洞法”，需注意选取合适的曲面及曲面的侧。

正解： 补面 $\Sigma_0:x^2+y^2+z^2=\varepsilon^2,\ (z=0)$，指向内侧，则两次利用高斯公式有

$$
\begin{aligned}
I&=\oiint\limits_{\Sigma+\Sigma_0^-}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}-\oiint\limits_{\Sigma_0}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}\\
&=\iiint\limits_{\Omega_{\Sigma+\Sigma_0}}0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\oiint\limits_{\Sigma_0}\frac{x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\varepsilon^3}\\
&=\frac{1}{\varepsilon^3}\iiint\limits_{\Omega_{\Sigma_0}}3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\frac{3}{\varepsilon^3}\cdot\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}=4\pi
\end{aligned}
$$

4. 总结

高斯公式的应用教学，不应止步于公式本身的记忆和简单套用。本文通过步步设疑，变型拓展，深入解读其应用条件和应用核心，逐步引导读者掌握应用技巧，有效化解应用难点，建立起扎实的理论根基，对于培养读者解决复杂问题的能力和严谨的科学素养具有重要意义。

参考文献

[1] Sobczyk, G. and Sanchez, O.L. (2011) Fundamental Theorem of Calculus. *Advances in Applied Clifford Algebras*, **21**, 221-231. https://doi.org/10.1007/s00006-010-0242-8

[2] 华东师范大学数学系. 数学分析[M]. 第四版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[3] 同济大学数学科学学院. 高等数学(下册) [M]. 第八版. 北京: 高等教育出版社, 2023.