Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(12), 165-190
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1512305

Hans汉斯

对2025年新高考I卷第19题的解法探究及推广

殷　雄

南京市第十四中学，江苏 南京

收稿日期：2025年11月3日；录用日期：2025年12月6日；发布日期：2025年12月23日

摘　要

对2025年新高考I卷第19题的解法进行了多角度探究，并将其中的结论进行了推广。

关键词

不等式，周期性，单位圆，极值点，不定方程

Exploration and Extension of Solutions to Question 19 in the 2025 New College Entrance Examination Volume I

Xiong Yin

Nanjing No.14 High School, Nanjing Jiangsu

Received: November 3, 2025; accepted: December 6, 2025; published: December 23, 2025

Abstract

A multi-dimensional exploration was conducted on the solution to question 19 of the 2025 National College Entrance Examination Volume I, and the conclusions were generalized.

Keywords

Inequality, Periodicity, Unit Circle, Extremal Point, Diophantine Equation

文章引用: 殷雄. 对 2025 年新高考 I 卷第 19 题的解法探究及推广[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 165-190.
DOI: 10.12677/pm.2025.1512305

1. 引言

高考数学试题命制注重对学生数学核心素养和创新能力的考查，发挥选拔人才的作用，对高考数学教学起到指挥棒作用，考查学生对基本知识和基本方法的深刻理解，倒逼学生跳出题海战术，死记题型模板的学习方式，从而引导教师把教学重点从总结解题技巧转向培养学生思维能力。

试题 (2025 年新高考 I 卷第 19 题) 已知函数 $f(x)=5\cos x-\cos 5x$

(1) 求函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值；

(2) 给定 $\theta\in(0,\pi)$ 和 $a\in\mathbb{R}$，证明：存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$，使得 $\cos y\le\cos\theta$；

(3) 设 $b\in\mathbb{R}$，若存在 $\varphi\in\mathbb{R}$ 使得 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)\le b$ 对 $x\in\mathbb{R}$ 恒成立，求 b 的最小值。

本题突破以往以幂指对函数为情境，极值点偏移，构造函数等经典方法为主线的导数命题方式，以三角函数为情境，考察内容与解题思路比较基础，但突出数学问题本质。第(1)小问是一个最值问题，解决时有两个角度，第一个便是对 $f(x)$ 求导，通过判断单调性找最值，第二个便是用不等式直接对 $f(x)$ 进行求最值。第(2)小问是一个不等式问题，解决时依然有两个角度，第一个便是通过对余弦函数图像进行分析，接着将图像语言转化成符号语言，第二个便是通过余弦函数在单位圆中的定义，借助单位圆图像进行分析，最后将其转化成符号语言。第(3)小问是一个双参数 min-max 问题，解决时依然有两个大角度，第一个便是先猜后证，通过第(1)小问的结果，猜测并证明 $b\ge 3\sqrt{3}$，第二个便是直接计算 $5\cos x-\cos(5x+\varphi)$ 的最大值，然后再从中选取最小的最大值便可。

从此题的解法中，提炼出了基于单位圆，结合三角函数周期性的核心方法，对该题进行了深度推广，首先考虑到叙述方便，先给出一个定义，即：

定义 1.1： 令 $g_{\varphi,n}(x)=n\cos x-\cos(nx+\varphi)$，由于函数 $g_{\varphi,n}(x)$ 的周期 $T=2\pi$，故不妨只考虑 $\varphi\in[0,2\pi]$，即

$$g_{\varphi,n}(x)=n\cos x-\cos(nx+\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi]$$

定义 1.2： 令 $h_{\varphi,n}(x)=n\sin x-\sin(nx+\varphi)$，由于函数 $h_{\varphi,n}(x)$ 的周期 $T=2\pi$，故不妨只考虑 $\varphi\in[0,2\pi]$，即

$$h_{\varphi,n}(x)=n\sin x-\sin(nx+\varphi),\quad \varphi\in[0,2\pi]$$

其次给出三个引理，即

引理 1.1： 已知 $n\in\mathbb{N}^*$， $g_{0,n}(x)=n\cos x-\cos(nx),x\in\mathbb{R}$，则

$$\left[g_{0,n}(x)\right]_{\max}=(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}\tag{1}$$

引理 1.2： 已知 $n\in\mathbb{N}^*$，则对 $\varphi\in[0,2\pi]$ 和 $x\in\mathbb{R}$，有

$$\min_{\varphi\in[0,2\pi]}\left\{\max_{x\in\mathbb{R}}\left\{g_{\varphi,n}(x)\right\}\right\}=(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}\tag{2}$$

引理 1.3： 已知 $n=\frac{q}{p}\in\mathbb{Q}^+$， $(p,q)=1$，且 $p,q\in\mathbb{N}^*$，则

当 p 为奇数时

$$\left[g_{0,n}(x)\right]_{\max}=(n+1)\cos\frac{\pi}{p+q} \tag{3}$$

当 p 为偶数时

$$\left[g_{\frac{\pi}{p},n}(x)\right]_{\max}=(n+1)\cos\frac{\pi}{p+q} \tag{4}$$

其中**引理 1.3** 完全蕴涵**引理 1.1**，但此两引理的证明思路完全不同，**引理 1.1** 所使用的三角函数周期性和单调性的证明思路进一步拓宽并结合单位圆相关内容便可证明**定理 1.1**，即：

定理 1.1：对于函数 $g_{\varphi,n}(x)$，$x\in\mathbb{R}$，$\varphi\in[0,2\pi]$，$n\in\mathbb{N}^*$，当给定 φ 和 n 时，有

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\max}=(n+1)\cos\frac{\pi-\varphi}{n+1} \tag{5}$$

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\min}=\begin{cases}-(n+1)\cos\dfrac{\pi-\varphi}{n+1},n=2p-1,p\in\mathbb{N}^*,\varphi\in[0,2\pi]\\[2ex]-(n+1)\cos\dfrac{\varphi}{n+1},n=2p,p\in\mathbb{N}^*,\varphi\in[-\pi,\pi]\end{cases} \tag{6}$$

其中**引理 1.2** 在推导**定理 1.2** 时基本没有使用，但仍然使其以引理的形式出现，并展示其证明过程有两个原因，其一是若 $n\in\mathbb{N}^*$，则使用 Jensen 不等式证明相对简单，其二是借此说明直接运用 Jensen 不等式的想法对于 $n=\dfrac{q}{p}\in\mathbb{Q}^+$ 的情况已不是很适用。故通过调整思路，结合不定方程的相关数论知识，并利用**引理 1.3** 便可证明**定理 1.2**，即：

定理 1.2：已知 $n=\dfrac{q}{p}\in\mathbb{Q}^+$，$(p,q)=1$，且 $p,q\in\mathbb{N}^*$，则对任意给定的 $\varphi\in[0,2\pi]$，使得对 $x\in\mathbb{R}$，有

$$\min_{\varphi\in[0,2\pi]}\left\{\max_{x\in\mathbb{R}}\left\{g_{\varphi,n}(x)\right\}\right\}=(n+1)\cos\frac{\pi}{p+q} \tag{7}$$

若抛开这道题，对于定义 1.2 中的式子，文献[5]给出了当 $\varphi=0$ 时，类似于定理 1.1 的结果。本文将其推广至一般情形，即定理 1.3。推广方法与推导定理 1.1 的相同，但考虑到篇幅，本文直接给出结果，不予论证，即：

定理 1.3：对于函数 $h_{\varphi,n}(x)$，$x\in\mathbb{R}$，$\varphi\in[0,2\pi]$，$n\in\mathbb{N}^*$，当给定 φ 和 n 时，有

$$\left[h_{\varphi,n}(x)\right]_{\max}=\begin{cases}(n+1)\cos\left(\dfrac{\pi+2\varphi}{2(n+1)}\right),\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],n=4p,p\in\mathbb{N}^*\\[2ex](n+1)\cos\left(\dfrac{2\varphi-3\pi}{2(n+1)}\right),\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{2},2\pi\right],n=4p,p\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

$$\left[h_{\varphi,n}(x)\right]_{\min}=\begin{cases}-(n+1)\cos\left(\dfrac{\pi-2\varphi}{2(n+1)}\right),\varphi\in\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right],n=4p,p\in\mathbb{N}^*\\[2ex]-(n+1)\cos\left(\dfrac{5\pi-2\varphi}{2(n+1)}\right),\varphi\in\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right],n=4p,p\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

$$\left[h_{\varphi,n}(x)\right]_{\max}=(n+1)\cos\left(\frac{\pi-\varphi}{n+1}\right),n=4p+1,p\in\mathbb{N}^*$$

$$\left[h_{\varphi,n}(x)\right]_{\min}=-(n+1)\cos\left(\frac{\pi-\varphi}{n+1}\right),n=4p+1,p\in\mathbb{N}^*$$

$$\left[h_{\varphi,n}(x)\right]_{\max}=\begin{cases}(n+1)\cos\left(\dfrac{\pi-2\varphi}{2(n+1)}\right),\varphi\in\left[0,\dfrac{3\pi}{2}\right],n=4p+2,p\in\mathbb{N}^*\\(n+1)\cos\left(\dfrac{5\pi-2\varphi}{2(n+1)}\right),\varphi\in\left[\dfrac{3\pi}{2},2\pi\right],n=4p+2,p\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

$$\left[h_{\varphi,n}(x)\right]_{\min}=\begin{cases}-(n+1)\cos\left(\dfrac{2\varphi+\pi}{2(n+1)}\right),\varphi\in\left[0,\dfrac{\pi}{2}\right],n=4p+2,p\in\mathbb{N}^*\\-(n+1)\cos\left(\dfrac{2\varphi-3\pi}{2(n+1)}\right),\varphi\in\left[\dfrac{\pi}{2},2\pi\right],n=4p+2,p\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

$$\left[h_{\varphi,n}(x)\right]_{\max}=\begin{cases}(n+1)\cos\left(\dfrac{\varphi}{n+1}\right),\varphi\in[0,\pi],n=4p+3,p\in\mathbb{N}^*\\(n+1)\cos\left(\dfrac{2\pi-\varphi}{n+1}\right),\varphi\in[\pi,2\pi],n=4p+3,p\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

$$\left[h_{\varphi,n}(x)\right]_{\min}=\begin{cases}-(n+1)\cos\left(\dfrac{\varphi}{n+1}\right),\varphi\in[0,\pi],n=4p+3,p\in\mathbb{N}^*\\-(n+1)\cos\left(\dfrac{2\pi-\varphi}{n+1}\right),\varphi\in[\pi,2\pi],n=4p+3,p\in\mathbb{N}^*\end{cases}$$

通过定理 1.3 不难得知，当 $n\geq 4$ 且 $n\in\mathbb{N}^*$ 时，有

$$\min_{\varphi\in[0,2\pi]}\left\{\max_{x\in\mathbb{R}}\left\{h_{\varphi,n}(x)\right\}\right\}=(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}$$

但很遗憾，对于 $n=\frac{q}{p}\in\mathbb{Q}^+$，$(p,q)=1$，且 $p,q\in\mathbb{N}^*$，时，是否有类似于定理 1.2 的结果，本文并未推导得出，但随着对这类问题的研究深入，所使用的数学工具更新，或许会有新结果。

2. 预备知识

本节给出文中所需要的基本引理。

引理 2.1 (Chebyshev 多项式) [1]：若 $T_n=\cos nx$，则

$$T_n+T_{n-2}=2\cos x\cdot T_{n-1},n\geq 2\text{ 且 }n\in\mathbb{N}^* \tag{8}$$

引理 2.2 (DeMoivre 公式) [1]：已知 $z_1=r_1\mathrm{e}^{\theta_1},z_2=r_2\mathrm{e}^{\theta_2}$，则 $z_1z_2=r_1r_2\mathrm{e}^{\theta_1+\theta_2}$。

引理 2.3 (Jensen 不等式) [1]：若 $p(x)$ 在区间 I 上 $p''(x)\leq 0$，则对 $\forall x_i\in I,\forall\lambda_i>0$，$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1$，其中 $i=1,2,\cdots,n$，有

$$p\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i\right)\geq\sum_{i=1}^{n}\lambda_i p(x_i)$$

当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$ 时，等号成立。

引理 2.4 (均值不等式) [1]：若 $a_i>0(i=1,\cdots,n)$，则

$$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leq\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$$

当且仅当 $a_1=\cdots=a_n$ 时，等号成立。

引理 2.5 (最值定理) [2]：若 $f(x)\in C^{\infty}[a,b]$，且 $x_i, i\in\{1,\cdots,n\}$ 为 $f'(x)=0$ 的根，则

$$[f(x)]_{\max}=\max\{f(a),f(x_1),\cdots,f(x_n),f(b)\}$$
$$[f(x)]_{\min}=\min\{f(a),f(x_1),\cdots,f(x_n),f(b)\}$$

引理 2.6 (带余除法) [4]：设 a,b 是两个整数，$a\neq 0$，则存在唯一的一对整数 q 和 r，满足

$$b=aq+r,0\le r<|a|$$

其中 q 称为 b 除以 a 所得的商，r 称为 b 除以 a 所得的余数。

引理 2.7 (Bezout 定理) [4]：对于不定方程 $ax+by=c$ 有整数解的充分必要条件是 $(a,b)|c$，其中 a,b,c 为整数，且 a,b 不为零。

3. 试题主要解法

3.1. 第(1)小问

角度 1 (单调区间)： 通过 $f'(x)$ 求解出单调区间，最后计算出最值。一般是将 $f'(x)$ 化简成乘积的形式，方便判断正负。对于 $f'(x)=-5\sin x+5\sin x$，若采用和差化积，则可化简为 $f'(x)=10\cos 3x\sin 2x$，即**解法 1**。若采用因式分解，则可化简为 $f'(x)=20\sin x\cos^2 x(1-2\sin x)(1+2\sin x)$，即**解法 2**。

解法 1： 对函数 $f(x)$ 求导得

$$f'(x)=-5\sin x+5\sin 5x=-5\sin(3x-2x)+5\sin(3x+2x)=10\cos 3x\sin 2x$$

则当 $0\le x\le\frac{\pi}{6}$ 时，$f'(x)\ge 0$，即 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{6}\right]$ 单调递增；

当 $\frac{\pi}{6}<x\le\frac{\pi}{4}$ 时，$f'(x)<0$，即 $f(x)$ 在区间 $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right]$ 单调递减。

故 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$。

解法 2： 对函数 $f(x)$ 求导得

$$\begin{aligned}f'(x)&=5\sin 5x-5\sin x=5(\sin 5x-\sin x)\\&=5[\sin(x+4x)-\sin x]\\&=5\sin x(\cos 4x+4\cos^2 x\cos 2x-1)\\&=20\sin x\cos^2 x(1-4\sin 2x)\\&=20\sin x\cos^2 x(1-2\sin x)(1+2\sin x)\end{aligned}$$

因为 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，所以 $\sin x>0,\cos^2 x>0$，所以 $1+2\sin x>0$，故导数正负由 $1-2\sin x$ 决定，下同解法 1。

角度 2 (不等式)： 将 $f(x)$ 进行化简整理，使得满足所使用的不等式的要求。其中最关键的便是对 $\cos 5x$ 的化简。对于 $\cos 5x$，若使用引理 2.4 求最值，则可用引理 2.1，令 $n=3,4,5$ 代入(8)式得到方程组求解。或可用引理 2.2 得到 $\cos 5x=\mathrm{Re}(\cos 5x+i\sin 5x)=\mathrm{Re}\left[(\cos x+i\sin x)^5\right]$，并二项式定理将其化简进一步整理即**解法 3**。

若使用引理 2.3 求最值，则可将 $f(x)$ 化简为

$$\frac{f(x)}{6}=\frac{5\cos x+\cos(\pi-5x)}{6},\quad x\in\left[\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{4}\right] \tag{9}$$

令 $p(x)=\cos x$ 由于 $p''(x)\le 0, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，故(9)式中 x 的范围是由(10)式计算出，即

$$\begin{cases} 0\le x\le \dfrac{\pi}{4} \\ -\dfrac{\pi}{2}\le \pi-5x\le \dfrac{\pi}{2} \end{cases} \tag{10}$$

再计算在区间 $x\in\left[0,\frac{\pi}{10}\right]$ 上的最大值，将两者进行比较便可，即**解法 4**。

解法 3：将 $\cos 5x$ 展开成关于 $\cos x$ 的形式

方法一：由引理 2.1 知，令 $n=3,4,5$ 代入(9)式得

$$\begin{cases} T_5+T_3=2\cos x\cdot T_4 \\ T_4+T_2=2\cos x\cdot T_3 \\ T_3+T_1=2\cos x\cdot T_2 \end{cases}$$

解得

$$\cos 5x=T_5=16\cos^5 x-20\cos^3 x+\cos x$$

方法二：由引理 2.2 和二项式定理得

$$\begin{aligned}\cos 5x&=\mathrm{Re}(\cos 5x+i\sin 5x)=\mathrm{Re}\left[(\cos x+i\sin x)^5\right]\\ &=\cos^5 x-10\cos^3 x\sin^2 x+5\cos x\sin^4 x\\ &=16\cos^5 x-20\cos^3 x+\cos x\end{aligned}$$

由于 $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$，则 $\cos^2 x>0,\frac{15}{8}-\frac{3}{2}\cos^2 x>0$，于是由引理 2.4 得

$$\begin{aligned}\left[5\cos x-\cos(5x)\right]^2&=\left[5\cos x-\left(16\cos^5 x-20\cos^3 x+\cos x\right)\right]^2\\ &=\frac{2^{10}}{9}\left(\cos^2 x\right)^3\cdot\left(\frac{15}{8}-\frac{3}{2}\cos^2 x\right)^2\\ &=\frac{2^{10}}{9}\left(\cos^2 x\right)\left(\cos^2 x\right)\left(\cos^2 x\right)\left(\frac{15}{8}-\frac{3}{2}\cos^2 x\right)\left(\frac{15}{8}-\frac{3}{2}\cos^2 x\right)\\ &\le\frac{2^{10}}{9}\cdot\left[\frac{3\cos^2 x+2\left(\frac{15}{8}-\frac{3}{2}\cos^2 x\right)}{5}\right]^5=2\end{aligned}$$

当且仅当 $\cos^2 x=\frac{3}{4}$，即 $x=\frac{\pi}{6}$ 时等号成立。

于是 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值为 $f\left(\frac{\pi}{6}\right)=3\sqrt{3}$。

解法 4：当 $x\in\left[0,\frac{\pi}{10}\right]$ 时，$\cos 5x\ge 0$，故

$$5\cos x-\cos 5x\le 5\cos x\le 5<3\sqrt{3}$$

当 $x\in\left[\frac{\pi}{10},\frac{\pi}{4}\right]$ 时， $p''(x)=-\cos x\le 0$ ，且 $\pi-5x\in\left[-\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right]$ ，于是由引理 2.3 得

$$\frac{5\cos x-\cos 5x}{6}=\frac{5\cos x+\cos(\pi-5x)}{6}\le\cos\left(\frac{5x+\pi-5x}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

当且仅当 $x=\frac{\pi}{6}$ 时等号成立，即 $f(x)$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 的最大值为 $3\sqrt{3}$ 。

3.2. 第(2)小问

角度 1 (函数 $\cos x$ 图像): 将函数 $\cos x$ 图像画出，由于 $\cos x$ 是偶函数，故 $\cos\theta=\cos(-\theta)$ ，所以 $\cos x$ 在 $(-\theta,\theta)$ 上是关于 y 轴对称，见图 1。而 $\|[a-\theta,a+\theta]\|=\|(-\theta,\theta)\|$ ，所以要么正好如图 1 那样， $\cos x$ 在 $[a-\theta,a+\theta]$ 上关于 $x=a$ 对称，则只要取 $y=a+\theta$ 或 $a-\theta$ ，使得 $\cos y=\cos\theta$ 。要么正好如图 2 那样 $[a-\theta,a+\theta]$ 上 $\cos x$ 图像就必然有一端比 $\cos\theta$ 高，有一端比 $\cos\theta$ 低，那么必然在低的那一端存在 $y\in[a-\theta,a+\theta]$ ，使得 $\cos y\le\cos\theta$ 。将其转化成符号语言便是解法 1。

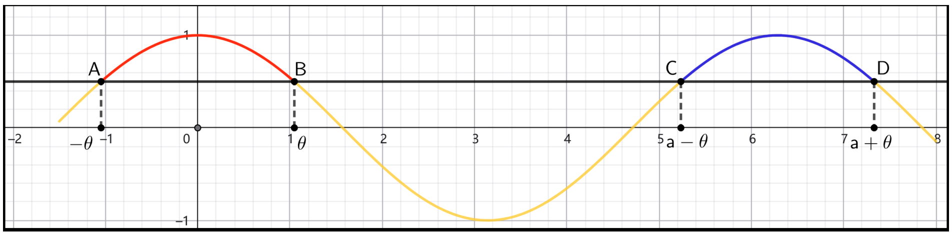

Figure 1. The picture of $\forall y\in[a-\theta,a+\theta],\cos y\ge\cos\theta$

图 1. $\forall y\in[a-\theta,a+\theta],\cos y\ge\cos\theta$ 图

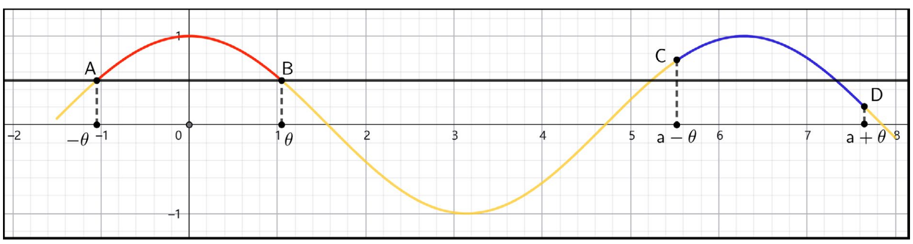

Figure 2. The picture of $\exists y\in[a-\theta,a+\theta],\cos y\le\cos\theta$

图 2. $\exists y\in[a-\theta,a+\theta],\cos y\le\cos\theta$ 图

解法 1： 若存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得 $\pi+2k\pi\in[a-\theta,a+\theta]$ ，则取 $y=\pi+2k\pi$ ，有

$$\cos y=-1\le\cos\theta$$

若不存在 $k\in\mathbb{Z}$ 使得 $\pi+2k\pi\in[a-\theta,a+\theta]$ ，又 $\theta\in(0,\pi)$ ，则存在 $\lambda\in\mathbb{Z}$ ，使得

$$[a-\theta,a+\theta]\subseteq[-\pi+2\lambda\pi,\pi+2\lambda\pi]$$

由于 $\theta\in(0,\pi)$ ，故

$$[2\lambda\pi-\theta,2\lambda\pi+\theta]\subseteq[-\pi+2\lambda\pi,\pi+2\lambda\pi]$$

而

$$\|[a-\theta,a+\theta]\|=\|[2\lambda\pi-\theta,2\lambda\pi+\theta]\|$$

DOI: 10.12677/pm.2025.1512305

故 $a-\theta \le 2\lambda\pi-\theta$ 或 $a+\theta \ge 2\lambda\pi+\theta$，不妨设 $a+\theta \ge 2\lambda\pi+\theta$，又 $y=\cos\theta$ 在 $\left[2\lambda\pi, \pi+2\lambda\pi\right]$ 上单调递减，故 $\cos\left(a+\theta\right) \le \cos\left(2\lambda\pi+\theta\right)$，故取 $y=a+\theta$ 可成立。

角度 2 (单位圆)： 从 $\cos x$ 的定义可知，在图 3 中 $\cos x$ 的值就是其角 $x=\theta$ 时的终边与单位圆交点 A 的横坐标 x_A，且将终边进行逆时针旋转时(以第一象限为例)，x_A 越来越小，即此时 $\cos x$ 单调递减。在图 4 中不妨设区域 Λ 为 $y\in\left[-\theta,\theta\right]$ 终边所在区域，若 $a>0$，则 $y\in\left[a-\theta,a+\theta\right]$ 终边所在的区域相当于将区域 Λ 沿着圆周逆时针旋转 a 弧度，旋转至区域 Θ。若 $a<0$，则相当于顺时针旋转 $-a$ 弧度，旋转至区域 Π。于是从图 4 中不难看出，若 $y\in$ 区域 $\Lambda\cap$ 区域 Θ，则 $\cos y>\cos\theta$。若 $y\in$ 区域 Θ/Λ，则 $\cos y\le\cos\theta$. 将其转化成符号语言便是解法 2。

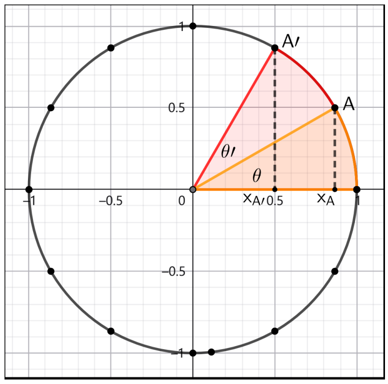

Figure 3. The geometric significance of $\cos x$

图 3. $\cos x$ 几何意义

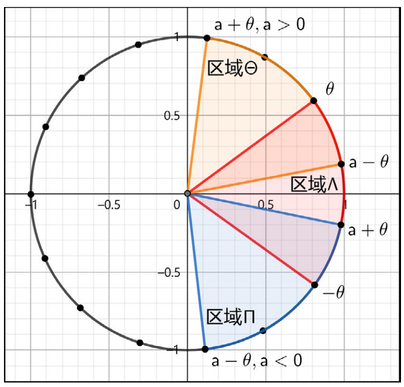

Figure 4. Region Λ rotates $|a|$ radians

图 4. 区域 Λ 旋转 $|a|$ 弧度

解法 2： 定义 $I\triangleq\left\{y\middle|\cos y>\cos\theta\right\}, I'\triangleq\left[a-\theta,a+\theta\right]$，则

$$I=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\left(2k\pi-\theta,2k\pi+\theta\right)=\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}I_k\text{，且 }\left\|I_k\right\|=\left\|I'\right\|=2\theta$$

于是对 $\forall k\in\mathbb{Z}$，$I'\not\subset I_k$，即 $I'\cap C_{\mathbb{R}}I=\left\{y\middle|\cos y\le\cos\theta\right\}\ne\varnothing$。

综上 $\exists y\in\left[a-\theta,a+\theta\right]$，使得 $\cos y\le\cos\theta$。

3.3. 第(3)小问

角度 1 (先猜后证)： 通过第(1)小问知 $\left[g_{0,5}\left(x\right)\right]_{\max}=3\sqrt{3}$，不难猜测 $b_{\min}=3\sqrt{3}$，接下来只要证明

$\varphi\in[0,2\pi]$时，$b\ge 3\sqrt{3}$即可。通过第(2)小问令$\theta=\frac{5\pi}{6}$，可得到$\cos y_0\le\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$，其中$x_0=\frac{y_0-\varphi}{5}$，然后再将$x_0$代入$g_{\varphi,5}(x)$便可得出结果，即解法1。

解法1： 由第(1)小问得，$\left[g_{0,5}(x)\right]_{\max}=3\sqrt{3}$。

由第(2)小问得，取$\theta=\frac{5\pi}{6}$，对给定的φ，$\exists y_0\in\left[\varphi-\frac{5\pi}{6},\varphi+\frac{5\pi}{6}\right]$，使得

$$\cos y_0\le\cos\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

令$x_0=\frac{y_0-\varphi}{5}$，则$x_0\in\left[-\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}\right]$，于是有

$$\begin{aligned}g_{\varphi,5}(x_0)&=5\cos x_0-\cos(5x_0+\varphi)=5\cos x_0-\cos y_0\\&\ge\frac{5\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}\end{aligned}$$

结合两小问得$b_{\min}=3\sqrt{3}$。

角度2 (求导求最值)： 对于给定的函数$g_{\varphi,5}(x)$，可对它直接求导然后找极值点，$g'_{\varphi,5}(x)=0$便可得出$\sin(5x+\varphi)=\sin x$，借助断言1便可计算出两组极值点x'_k和x_k，结合引理2.5可知最值点必然在极值点中产生，为了方便比较大小，可将两组极值点代入函数$g_{\varphi,5}(x)$并进行等量替换，得到$g_{\varphi,5}(x_k)=6\cos x_k$，最后利用余弦函数的单调性便可得出结果，即解法2。

断言1： 若$\sin\alpha=\sin\beta$，则$\alpha=\beta+2k\pi$或$\alpha+\beta=\pi+2k\pi$

解法2： 对于给定的φ，令$g'_{\varphi,5}(x)=0$可得$\sin(5x+\varphi)=\sin x$，于是

$$5x+\varphi=x+2k\pi\text{或}5x+\varphi+x=\pi+2k\pi(k\in\mathbb{Z})$$

于是有

$$x'_k=-\frac{\varphi}{4}+\frac{k\pi}{2},\quad k\in\{0,1,2,3\}$$

$$x_k=-\frac{\varphi}{6}+\frac{(2k+1)\pi}{6},\quad k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

由于

$$\begin{aligned}g_{\varphi,5}(x_k)&=5\cos x_k-\cos(5x_k+\varphi)\\&=5\cos x_k-\cos(\pi-x_k+2k\pi)=6\cos x_k\end{aligned}$$

于是由$y=\cos x$的单调性可知

$$g_{\varphi,5}(x_0)=6\cos\frac{\pi-\varphi}{6}>4\text{，且 }g_{\varphi}(x_0)>g_{\varphi}(x_k),k\in\{0,1,2,3,4,5\}$$

注意到

$$g_{\varphi,5}(x'_k)=4\cos x'_k\le 4,\quad k\in\{0,1,2,3\}$$

于是结合引理2.5得

$$\left[g_{\varphi,5}(x)\right]_{\max}=6\cos\frac{\pi-\varphi}{6},\quad\varphi\in[0,2\pi]$$

于是有

$$\left[g_{0,5}(x)\right]_{\max}=3\sqrt{3}\le\left[g_{\varphi,5}(x)\right]_{\max}=6\cos\frac{\pi-\varphi}{6},\quad \varphi\in[0,2\pi]$$

故 $b_{\min}=3\sqrt{3}$。

4. 主要引理和推广定理证明

4.1. 主要引理证明

对于**引理 1.1** 证明，对函数 $g_{0,n}(x)$ 求导得

$$g'_{0,n}(x)=n\left(\sin(nx)-\sin(x)\right)$$

则 $g'_{0,n}(x)=0$ 知

$$nx=2k\pi+x \text{ 或 } nx=(2k+1)\pi-x,\quad k\in\mathbb{Z}\text{。}$$

于是有

$$x'_k=\frac{2k\pi}{n-1},k\in\{0,1,\cdots,n-2\} \text{ 或 } x_k=\frac{\pi+2k\pi}{n+1},k\in\{0,1,\cdots,n\}$$

由引理 2.5 可知 $g_{0,n}(x)$ 的最大值必在 $g'_{0,n}(x)=0$ 的根处取到，于是有

若 $nx=2k\pi+x$，则

$$\begin{aligned}g_{0,n}(x)&=n\cos(x)-\cos(nx)\\&=n\cos(x)-\cos(2k\pi+x)=(n-1)\cos x\end{aligned}$$

于是当 $x'_k=\frac{2k\pi}{n-1},k\in\{0,1,\cdots,n-2\}$ 时，结合断言 2 有

$$g_{0,n}(x'_k)=(n-1)\cos x\le n-1<(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}$$

若 $nx=(2k+1)\pi-x$，则

$$\begin{aligned}g_{0,n}(x)&=n\cos(x)-\cos(nx)\\&=n\cos(x)-\cos\left[(2k+1)\pi-x\right]=(n+1)\cos x\end{aligned}$$

于是当 $x_k=\frac{\pi+2k\pi}{n+1},k\in\{0,1,\cdots,n\}$ 时，有

$$g_{0,n}(x_k)=(n+1)\cos x_k\le(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}$$

其中 $x_0=\frac{\pi}{n+1}$ 时等号成立，即(1)式得证。

断言 2： 当 $n=\frac{q}{p}\in\mathbb{Q}^{+}$，$(p,q)=1$，$p,q\in\mathbb{N}^{*}$，且 $\varphi\in[0,2\pi]$ 时

$$|n-1|<(n+1)\cos\frac{\pi}{p+q}\le(n+1)\cos\frac{-\varphi+\pi}{p+q}.$$

证： 令 $p(x)=\cos\pi x$，由于当 $x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$ 时，函数 $p''(x)=-\pi^2\cos x\pi\le0$，于是令

$$\lambda_1=1-\frac{2}{p+q},\lambda_2=\frac{2}{p+q},x_1=0,x_2=\frac{1}{2}$$

代入引理 2.3 得

$$
\begin{aligned}
(n+1)p\left(\frac{1}{p+q}\right) &> (n+1)\left[\left(1-\frac{2}{p+q}\right)p(x)+\left(\frac{2}{p+q}\right)p\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] \\
&= (n+1)\left(1-\frac{2}{p+q}\right)=\frac{p+q-2}{p} \\
&\geq \left|\frac{q-p}{p}\right| = |n-1|
\end{aligned}
$$

于是左式得证，对于右式，令

$$h(\varphi)=\cos\frac{-\varphi+\pi}{p+q},\quad \varphi\in[0,2\pi]$$

考察函数 $h(\varphi)$ 在 $[0,2\pi]$ 上的单调性便可得证。

对于**引理 1.2** 的证明，结合引理 2.3，令 $p(x)=\cos x, x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$，由于 $p''(x)\leq 0$，于是令

$$\begin{cases} -\frac{\pi}{2}\leq x\leq\frac{\pi}{2} \\ -\frac{\pi}{2}\leq \pi-(nx+\varphi)\leq\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

解得

$$x\in\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),\frac{1}{n}\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)\right]\subseteq\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right], n\geq 3, \varphi\in[0,2\pi]$$

为方便叙述，定义

$$\Lambda\triangleq\left[\frac{1}{n}\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right),\frac{1}{n}\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)\right]$$

则当 $x\in\Lambda$ 时，由于

$$g_{\varphi,n}(x)=n\cos(x)-\cos(nx+\varphi)=n\cos(x)+\cos\left[\pi-(nx+\varphi)\right]$$

于是有

$$\frac{g_{\varphi,n}(x)}{n+1}\leq\cos\left(\frac{\pi-(nx+\varphi)+nx}{n+1}\right)=\cos\frac{\pi-\varphi}{n+1}$$

当且仅当 $x=\frac{\pi-\varphi}{n+1}$ 时等号成立，且 $x=\frac{\pi-\varphi}{n+1}\in\Lambda$，于是有

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\text{极max}}=(n+1)\cos\frac{\pi-\varphi}{n+1}, x\in\Lambda$$

由于 $\cos\frac{\pi-\varphi}{n+1}\geq\cos\frac{\pi}{n+1}, \varphi\in[0,2\pi]$，则对给定的 φ，有

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\max}\geq\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\text{极max}}\geq(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}, x\in[-\pi,\pi]$$

当 $n=1$ 或 2 时，可单独证明或由定理 1.1 可得。当 $n\geq 3$ 时，结合引理 1.1，则(2)式得证。

对于**引理 1.3** 的证明，对于给定的 φ，令 $g'_{\varphi,n}(x)=0$ 可得 $\sin(nx+\varphi)=\sin x$，于是

$$nx+\varphi=x+2k\pi \text{ 或 } nx+\varphi+x=\pi+2k\pi\,(k\in\mathbb{Z})$$

于是有

$$x_k' = \frac{2kp\pi - p\varphi}{q-p} \text{ 或 } x_k = \frac{(2k+1)p\pi - p\varphi}{p+q} \tag{11}$$

由引理 2.5 可知 $g_{\varphi,n}(x)$ 最大值必在 $g_{\varphi,n}'(x)=0$ 的根处取到，则当 p 为奇数时，令 $\varphi=0$，下证(4)式成立。当 $x_k' = \dfrac{2kp\pi}{q-p}$ 时，由断言 2 可得

$$g_{0,n}(x_k') = (n-1)\cos x_k' < n-1 < (n+1)\cos\frac{\pi}{p+q} \tag{12}$$

当 $x_k = \dfrac{(2k+1)p\pi}{p+q}$ 时，给定 $k\in\mathbb{Z}$，由引理 2.6 可得，对于整数 $(2k+1)p$ 和 $2(p+q)$，存在唯一整数 k_2,k_3 使得

$$(2k+1)p = 2(p+q)k_2 + k_3, 0 \le k_3 < 2(p+q)$$

于是

$$\cos x_k = \cos\left(\frac{(2k+1)p\pi}{p+q}\right) = \cos\left(\frac{2k_2(p+q)\pi + k_3\pi}{p+q}\right) = \cos\left(\frac{k_3\pi}{p+q} + 2k_2\pi\right) = \cos\left(\frac{k_3\pi}{p+q}\right)$$

当 $k_3=0$ 时，由于 p 为奇数，故 $(2k+1)p$ 为奇数，$2(p+q)$ 为偶数，于是有

$$k_1 = \frac{(2k+1)p}{2(p+q)} \notin \mathbb{Z}\text{，故舍去。}$$

当 $k_3=1$ 时，考虑以下不定方程的整数解

$$(2p)x + 2(p+q)y = 1-p$$

由于 $(p,q)=1$，则 $(p,p+q)=1$，于是有

$$(2p, 2(p+q)) = 2(p, p+q) = 2$$

结合 p 为奇数，则存在 $v\in\mathbb{Z}$ 使得 $2v=1-p$，于是有

$$(2p, 2(p+q)) \mid 1-p$$

则该不定方程有一组整数解 $x=k_4, y=k_2$，于是当 $k=k_4$ 时，有

$$g_{0,n}(x_k) = (n+1)\cos x_{k_4} = (n+1)\cos\left(\frac{\pi}{p+q}\right)$$

结合余弦函数在单位圆的几何意义可知当 $k_3=1$ 时，(3)式成立。

当 p 为偶数时，令 $\varphi=\dfrac{\pi}{p}$，下证(4)式成立。

当 $x_k' = \dfrac{2kp\pi - \pi}{q-p}$ 时，证明与(12)式相同，故省略。

当 $x_k = \dfrac{(2k+1)p\pi - \pi}{p+q}$ 时，给定 $k\in\mathbb{Z}$，由引理 2.6 可得，对于整数 $(2k+1)p-1$ 和 $2(p+q)$，存在唯一整数 k_6,k_7 使得

$$(2k+1)p - 1 = 2(p+q)k_6 + k_7, 0 \le k_7 < 2(p+q)$$

于是

$$\cos x_k=\cos\left(\frac{(2k+1)p\pi-\pi}{p+q}\right)=\cos\left(\frac{2k_6(p+q)\pi+k_7\pi}{p+q}\right)=\cos\left(\frac{k_7\pi}{p+q}\right)$$

当 $k_7=0$ 时，由于 p 为偶数，故 $(2k+1)p-1$ 为奇数，$2(p+q)$ 为偶数，于是有

$$k_6=\frac{(2k+1)p-1}{2(p+q)}\notin\mathbb{Z}，故舍去。$$

当 $k_7=1$ 时，结合 p 为奇数时的证明可知(5)式成立。

4.2. 推广定理证明

4.2.1. 定理 1.1 证明思路分析

对于定理 1.1 的证明，综合运用了前面做法，首先是对 $g_{\varphi,n}(x)$ 进行求导，由断言 1 得出了两组极值点，即

$$x_k'=-\frac{\varphi}{n-1}+\frac{2k\pi}{n-1},k\in\{0,1,\cdots,n-2\}$$

并将其简记为 $\{x_k'\}$ 组

$$x_k=\frac{-\varphi+\pi}{n+1}+\frac{2k\pi}{n+1},k\in\{0,1,\cdots,n\}$$

并将其简记为 $\{x_k\}$ 组

由引理 2.5 可知，最值点一定出现在这两组极值点中，将其代入函数 $g_{\varphi,n}(x)$ 并进行等量替换，对于 $\{x_k'\}$ 组而言

$$g_{\varphi,n}(x_k')=(n-1)\cos x_k',k\in\{0,1,\cdots,n-2\} \tag{13}$$

对于 $\{x_k\}$ 组而言

$$g_{\varphi,n}(x_k)=(n+1)\cos x_k,k\in\{0,1,\cdots,n\} \tag{14}$$

由于此时(13)式和(14)式带双参数 φ,n，为了更加直观找出最值点，于是通过 $\cos x$ 在单位圆上的几何意义来找出该点。由于有两组极值点。故分别对圆进行划分，其中 $\{x_k'\}$ 组需将单位圆进行 $n-1$ 等分，$\{x_k\}$ 组需将单位圆进行 $n+1$ 等分。但通过简单的计算不难发现，对于求最大值而言，n 取的不同，并不影响通过图像给出解答，但求最小值而言，不难发现，n 的奇偶性会影响图像的形态，因为若想计算出最小值，能出现最小值的区域必然包含 π，故可以先利用(15)式和(17)式计算出符合的区域，以(16)式为例，若 n 为奇数，则 k 取 $\frac{n-1}{2}$ 和 $\frac{n+1}{2}$ 即可，此时这两块区域类似于图 8。若 n 为偶数，则 k 取 $\frac{n}{2}$，但此时需注意，要考察 π 所在的 y 轴与转轴 OI 和 OJ 夹角的弧度大小，即

$$\measuredangle IOy=\pi-\left(-\frac{2\pi}{n-1}+\frac{n\pi}{n-1}\right)\text{和}\measuredangle yOJ=-\frac{2\pi}{n-1}+\frac{(n+2)\pi}{n-1}-\pi$$

若弧度大小相等，即两端对称，类似于图 5，则此时取最小值的极值点的 k 便为 $\frac{n}{2}$，(16)式便是如此。

若弧度大小不等，则需要进行二次讨论，以 $\measuredangle IOy<\measuredangle yOJ$ 为例：

为了方便叙述且防止记号混淆，其一记任意一点横坐标写法，例如 A 的横坐标记为 x^A，其二以图 9 中的扇形区域 OCK 为例，将扇形区域 OCK 记为区域 $\frac{4\pi}{5}\frown\frac{6\pi}{5}$。在图 5 中，区域 $\theta\frown\vartheta$ 包含 π，当转轴

逆时针旋转时，刚转动一小部分时，由图 6 可知，转轴 OL 在区域 $\theta \frown \vartheta$ 中转动，转轴 OJ 在区域 $\vartheta \frown \rho$ 中转动，此时 $x^J < x^L$，继续转动时，由图 7 可知，此时 $x^J = x^L$，再继续转动时，如图 8，此时 $x^J > x^L$。

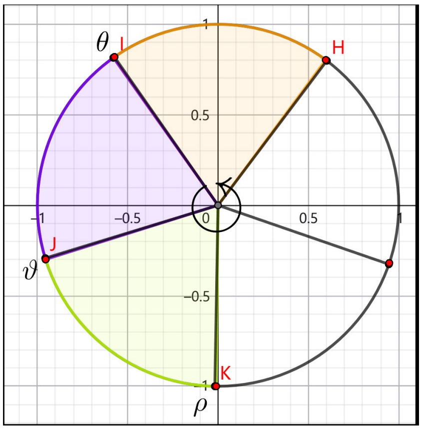

Figure 5. Initial image
图 5. 初始图

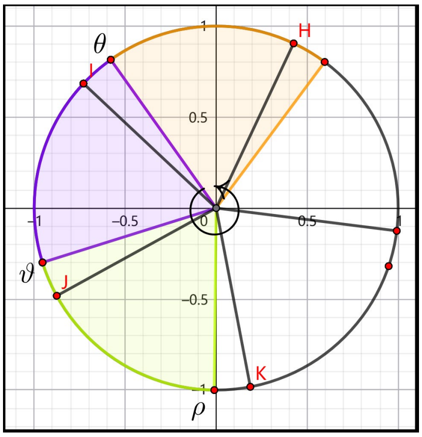

Figure 6. $x^J < x^L$
图 6. $x^J < x^L$

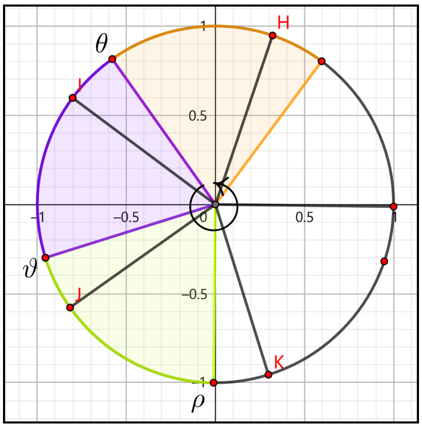

Figure 7. $x^J = x^L$
图 7. $x^J = x^L$

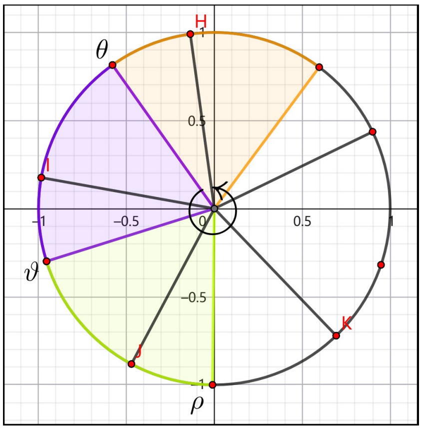

Figure 8. $x^J > x^L$

图 8. $x^J > x^L$

当然在本文中并未出现此种情况，若读者有意，可自行证明定理 1.3，该定理的证明会不断出现此种情况。接下来正式叙述定理 1.1 的证明思路，将 n 进行赋值，当 n 为偶数时，不妨令 $n=6$，对于 $\{x_k'\}$ 组，由图 9 可知，区域 $\frac{4\pi}{5} \frown \frac{6\pi}{5}$ 包含了 π，当 φ 从 $2\pi \to 0$ 赋值时，图 9 中的 5 个区域也以逆时针方向随之转动。

当 $\varphi \in [\pi, 2\pi]$ 时，由图 10 可知，转轴 OC 在区域 $\frac{4\pi}{5} \frown \frac{5\pi}{5}$ 转动，x^C 在单调递减，即 $\cos x$ 在单调递减。

当 $\varphi \in [0, \pi]$ 时，由图 11 可知，转轴 OC 在区域 $\frac{5\pi}{5} \frown \frac{6\pi}{5}$ 转动，x^C 在单调递增，即 $\cos x$ 在单调递增。但无论 φ 取何值，只要转轴 OC 在区域 $\frac{4\pi}{5} \frown \frac{6\pi}{5}$ 中旋转，相比于其他转轴，所算出的 $\cos x$ 的值一定是最小的。同时转轴 OC 为第 4 根转轴，故 $k=3$ 时，x_3' 为所找极值点，即

$$\left[g_{\varphi,6}\left(x_3'\right)\right]_{极\min} = 5\cos\left(\frac{-\varphi+6\pi}{5}\right) = -5\cos\left(\frac{-\varphi+\pi}{5}\right)$$

对于 $\{x_k\}$ 组由图 12 可知，区域 $\frac{5\pi}{7} \frown \frac{7\pi}{7}$ 和区域 $\frac{7\pi}{7} \frown \frac{9\pi}{7}$ 包含了 π，当 φ 从 $2\pi \to 0$ 赋值时，图 12 中的 7 个区域也以逆时针方向随之转动。

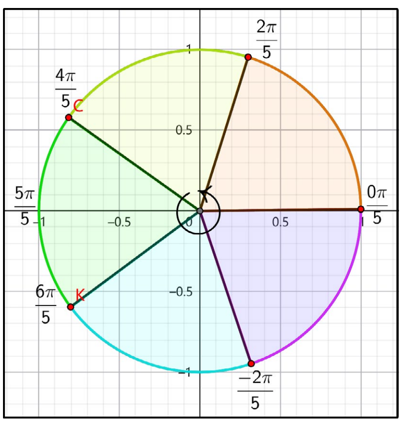

Figure 9. Initial image of group $\{x_k'\}$, $n=6$

图 9. $n=6$，$\{x_k'\}$ 组初始图

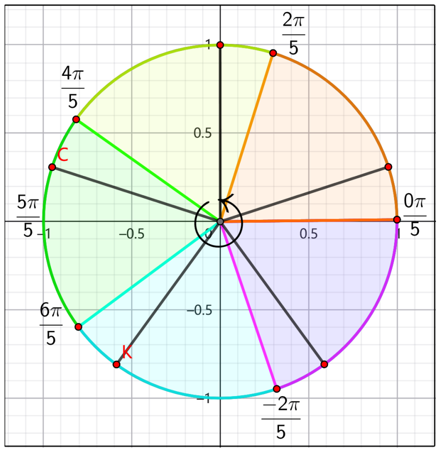

Figure 10. Rotation of the upper half area of axis OC in group $\{x_k'\}$, $n=6$

图 10. $n=6$，$\{x_k'\}$组转轴 OC 上半区域转动

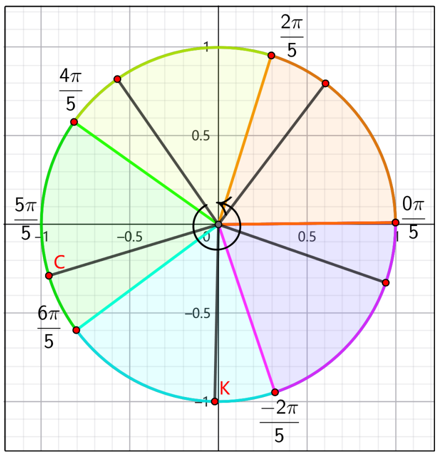

Figure 11. Rotation of axis OC in the lower half of group $\{x_k'\}$, $n=6$

图 11. $n=6$，$\{x_k'\}$组转轴 OC 下半区域转动

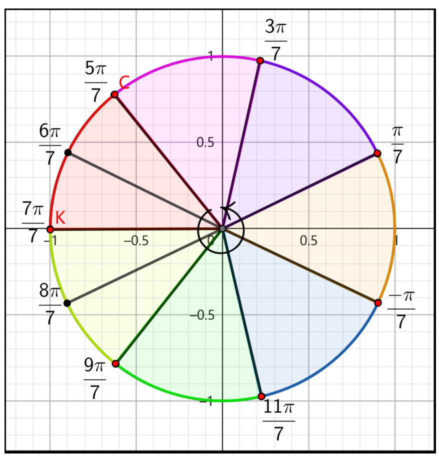

Figure 12. Initial image of group $\{x_k\}$, $n=6$

图 12. $n=6$，$\{x_k\}$组初始图

当 $\varphi\in\left(\pi,2\pi\right]$ 时，由图 13 可知，转轴 OC 在区域 $\frac{5\pi}{7}\frown\frac{6\pi}{7}$ 转动，转轴 OK 在区域 $\frac{8\pi}{7}\frown\frac{9\pi}{7}$ 转动，x^C 在单调递减，x^K 在单调递增，但 $x^K<x^C$，于是 $\cos x^K<\cos x^C$。此时转轴 OK 为第 5 根转轴，故 $k=4$ 时，x_4 为所找极值点，即 $\left[g_{\varphi,6}\left(x_4\right)\right]_{极\min}=7\cos\left(\frac{-\varphi+9\pi}{7}\right)=-7\cos\left(\frac{-\varphi+2\pi}{7}\right)$。

当 $\varphi=\pi$ 时，由图 14 可知，$x^K=x^C$，故此时相等。当 $\varphi\in\left[0,\pi\right)$ 时，由图 15 可知，x^C 在单调递减，x^K 在单调递增，但 $x^K>x^C$，于是 $\cos x^K>\cos x^C$。此时转轴 OC 为第 4 根转轴，故 $k=3$ 时，x_3 为所找极值点，即 $g_{\varphi,6}\left(x_3\right)_{极\max}=7\cos\left(\frac{-\varphi+7\pi}{7}\right)=-7\cos\left(\frac{-\varphi}{7}\right)$。于是有

$$\left[g_{\varphi,6}\left(x\right)\right]_{极\min}=\begin{cases}-7\cos\frac{-\varphi}{7},\varphi\in\left[0,\pi\right]\\-7\cos\frac{-\varphi+2\pi}{7},\varphi\in\left(\pi,2\pi\right]\end{cases}=-7\cos\frac{\varphi'}{7},\varphi'\in\left[-\pi,\pi\right]$$

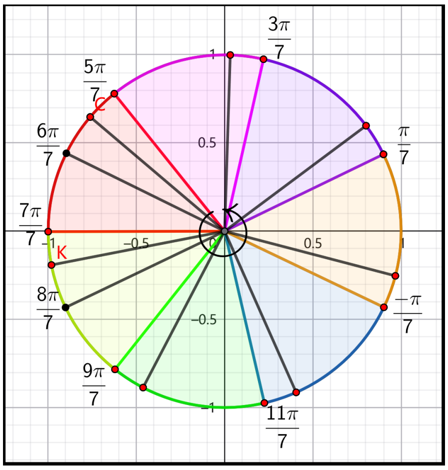

Figure 13. $x^K<x^C$ in group $\left\{x_k\right\}$, $n=6$

图 13. $n=6$，$\left\{x_k\right\}$ 组 $x^K<x^C$

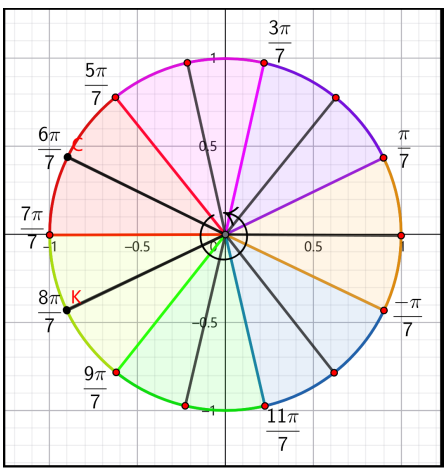

Figure 14. $x^K=x^C$ in group $\left\{x_k\right\}$, $n=6$

图 14. $n=6$，$\left\{x_k\right\}$ 组 $x^K=x^C$

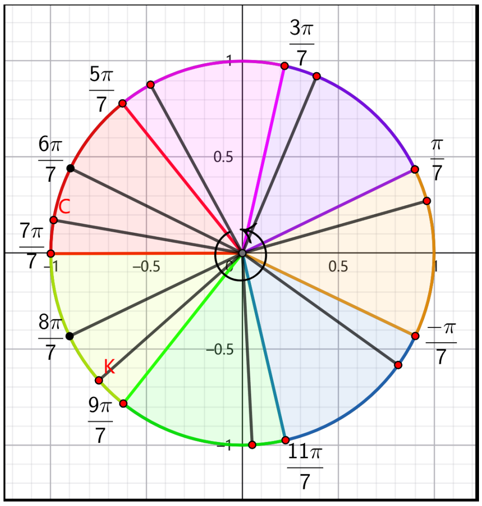

Figure 15. $x^K > x^C$ in group $\{x_k\}$, $n=6$

图 15. $n=6$，$\{x_k\}$ 组 $x^K > x^C$

由于 $\left[g_{\varphi,6}(x)\right]_{极\min} < \left[g_{\varphi,6}(x_3')\right]_{极\min}$，于是当 $n=6$ 时，$\left[g_{\varphi,6}(x)\right]_{\min} = -7\cos\frac{\varphi'}{7}, \varphi' \in [-\pi,\pi]$。

当 n 为奇数时，不妨令 $n=7$，对于 $\{x_k'\}$ 组，由图 16 可知，区域 $\frac{2\pi}{3} \frown \frac{3\pi}{3}$ 和区域 $\frac{3\pi}{3} \frown \frac{4\pi}{3}$ 包含了 π，当 φ 从 $2\pi \to 0$ 赋值时，图 16 中的 6 个区域也以逆时针方向随之转动。当 $\varphi \in (\pi, 2\pi]$ 时，由图 17 可知，转轴 OC 在区域 $\frac{2\pi}{3} \frown \frac{5\pi}{6}$ 转动，转轴 OK 在区域 $\frac{3\pi}{3} \frown \frac{7\pi}{6}$ 转动，x^C 在单调递减，x^K 在单调递增，但 $x^K < x^C$，于是 $\cos x^K < \cos x^C$。同时转轴 OK 为第 5 根转轴，故 $k=4$ 时，x_4' 为所找极值点，即

$$\left[g_{\varphi,7}(x_4')\right]_{极\min} = 6\cos\left(\frac{-\varphi+8\pi}{6}\right) = -6\cos\left(\frac{-\varphi+2\pi}{6}\right)$$

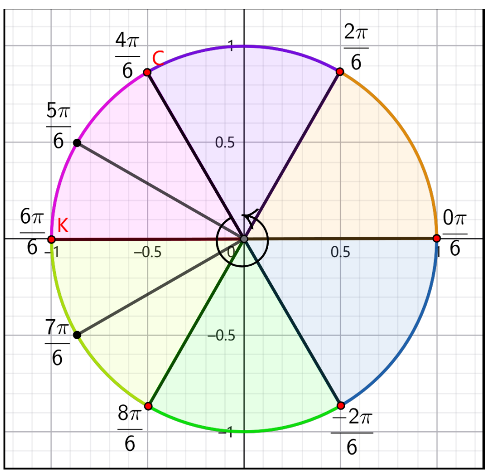

Figure 16. Initial image of group $\{x_k'\}$, $n=7$

图 16. $n=7$，$\{x_k'\}$ 组初始图

当 $\varphi=\pi$ 时，由图 18 可知，$x^K = x^C$，故此时相等，但当 $\varphi \in [0,\pi)$ 时，由图 19 可知，x^C 在单调递减，

x^K 在单调递增，但 $x^K > x^C$，于是 $\cos x^K > \cos x^C$。同时转轴 OC 为第 4 根转轴，故 $k=3$ 时，x_3' 为所找极值点，即

$\left[g_{\varphi,7}\left(x_3'\right)\right]_{极\min} = 6\cos\left(\dfrac{-\varphi+6\pi}{6}\right) = -6\cos\left(\dfrac{-\varphi}{6}\right)$，于是有

$$\left[g_{\varphi,7}(x)\right]_{极\min} = \begin{cases} -6\cos\dfrac{-\varphi}{6}, \varphi\in[0,\pi] \\ -6\cos\dfrac{-\varphi+2\pi}{6}, \varphi\in(\pi,2\pi] \end{cases} = -6\cos\dfrac{\varphi'}{6}, \varphi'\in[-\pi,\pi]$$

对于 $\{x_k\}$ 组由图 20 可知，区域 $\dfrac{7\pi}{8}\frown\dfrac{9\pi}{8}$ 包含了 π，当 φ 从 $2\pi\to 0$ 赋值时，图 20 中的 8 个区域也以逆时针方向随之转动。当 $\varphi\in[\pi,2\pi]$ 时，由图 21 可知，转轴 OC 在区域 $\dfrac{7\pi}{8}\frown\dfrac{8\pi}{8}$ 转动，x^C 在单调递减，即 $\cos x^C$ 单调递减。

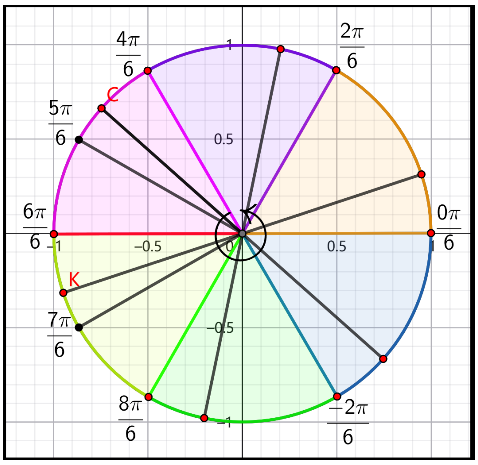

Figure 17. $x^K < x^C$ in group $\{x_k'\}$，$n=7$

图 17. $n=7$，$\{x_k'\}$ 组 $x^K < x^C$

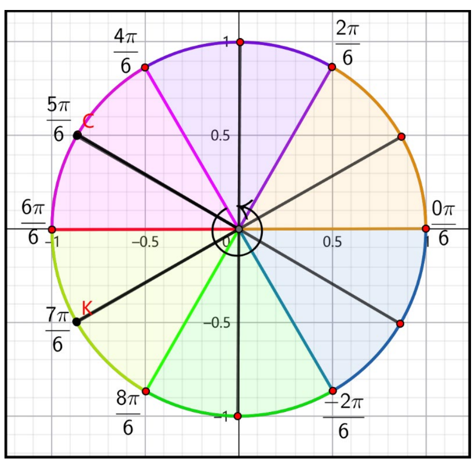

Figure 18. $x^K = x^C$ in group $\{x_k'\}$，$n=7$

图 18. $n=7$，$\{x_k'\}$ 组 $x^K = x^C$

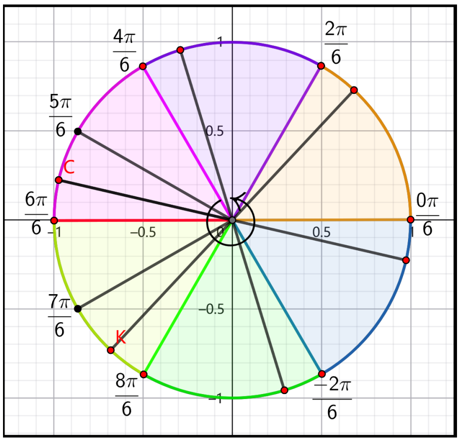

Figure 19. $x^K > x^C$ in group $\{x'_k\}$, $n=7$

图 19. $n=7$，$\{x'_k\}$ 组 $x^K > x^C$

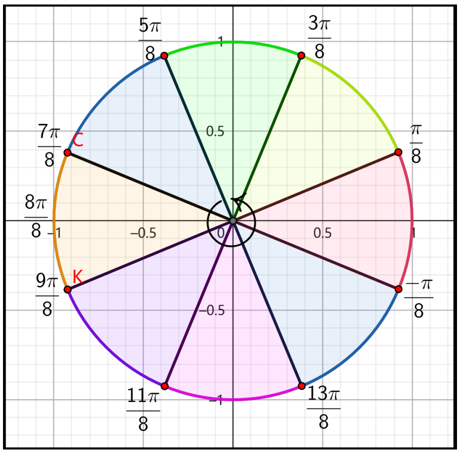

Figure 20. Initial image of group $\{x_k\}$, $n=7$

图 20. $n=7$，$\{x_k\}$ 组初始图

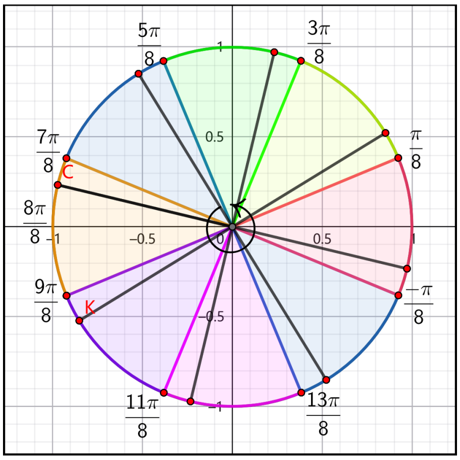

Figure 21. Rotation of the upper half area of axis OC in group $\{x_k\}$, $n=7$

图 21. $n=7$，$\{x_k\}$ 组转轴 OC 上半区域转动

当$\varphi\in[0,\pi]$时，由图 22 可知，转轴OC在区域$\frac{8\pi}{8}\frown\frac{9\pi}{8}$转动，$x^C$在单调递增，即$\cos x^C$单调递增。但无论$\varphi$取何值，只要转轴$OC$在区域$\frac{7\pi}{8}\frown\frac{9\pi}{8}$中旋转，相比于其他转轴，所算出的$\cos x$的值一定是最小的。同时转轴$OC$为第 5 根转轴，故$k=4$时，$x_4$为所找极值点，即

$$\left[g_{\varphi,7}\left(x_4\right)\right]_{极\min}=8\cos\left(\frac{-\varphi+9\pi}{8}\right)=-8\cos\left(\frac{\pi-\varphi}{8}\right)$$

由于$\left[g_{\varphi,7}\left(x_4\right)\right]_{极\min}<g_{\varphi,7}\left(x\right)_{极\min}$，于是当$n=7$时，$\left[g_{\varphi,7}\left(x\right)\right]_{\min}=-8\cos\left(\frac{\pi-\varphi}{8}\right)$。

综上所述

$$\left[g_{\varphi,n}\left(x\right)\right]_{\min}=\begin{cases}-8\cos\frac{\pi-\varphi}{8},n=7,\varphi\in[0,2\pi]\\ -7\cos\frac{\varphi}{7},n=6,\varphi\in[-\pi,\pi]\end{cases}$$

但在实际证明定理 1.1 时，可借助断言 2 将证明简化，无需严格按照思路分析去解答。

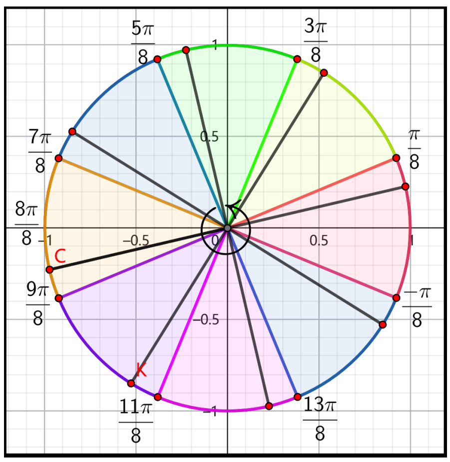

Figure 22. Rotation of axis OC in the lower half of group $\{x_k\}$, $n=7$

图 22. $n=7$，$\{x_k\}$组转轴OC下半区域转动

4.2.2. 定理 1.1 证明

对定理 1.1 证明，对于给定的φ，令$g'_{\varphi,n}(x)=0$可得$\sin(nx+\varphi)=\sin x$，于是

$$nx+\varphi=x+2k\pi\text{ 或 }nx+\varphi+x=\pi+2k\pi\left(k\in\mathbb{Z}\right)$$

当$\Omega'=\left[-\frac{2\pi}{n-1},\frac{(2n-4)\pi}{n-1}\right]$时，解得

$$x'_k=-\frac{\varphi}{n-1}+\frac{2k\pi}{n-1},k\in\{0,1,\cdots,n-2\}$$

于是由$\cos x$在单位圆中的几何意义得，当$x'=x'_0$或$x'=x'_1$时

$$\left[g_{\varphi,n}\left(x'\right)\right]_{极\max}=\max\left\{(n-1)\cos\frac{\varphi}{n-1},(n-1)\cos\frac{2\pi-\varphi}{n-1}\right\}$$

当 $\Omega=\left[-\frac{\pi}{n+1},\frac{(2n+1)\pi}{n+1}\right]$ 时，解得

$$x_k=\frac{-\varphi+\pi}{n+1}+\frac{2k\pi}{n+1},k\in\{0,1,\cdots,n\}$$

于是由 $\cos x$ 在单位圆中的几何意义得，当 $x_0=\frac{-\varphi+\pi}{n+1}$ 时

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{极\max}=(n+1)\cos\frac{\pi-\varphi}{n+1}$$

由于当 $\varphi\in[0,2\pi]$ 时

$$\left[\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{极\max}\right]_{\min}=(n+1)\cos\frac{\pi}{n+1}>\left[\left[g_{\varphi,n}(x')\right]_{极\max}\right]_{\max}=n-1$$

于是 $\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\max}$ 便计算出，即

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\max}=\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{极\max}=(n+1)\cos\frac{\pi-\varphi}{n+1}$$

接下来计算 $\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\min}$，由单位圆图像分析可得，能够使得函数 $g_{\varphi,n}(x)$ 取得最小值的极值点一定分布在含 π 的区域中，故先计算两组含 π 的区域的转轴编号。先计算 $\{x'_k\}$ 组的转轴编号，于是有

$$-\frac{2\pi}{n-1}+\frac{2k\pi}{n-1}\le\pi\le-\frac{2\pi}{n-1}+\frac{2(k+1)\pi}{n-1} \tag{15}$$

解得

$$k\in\left[\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}\right] \tag{16}$$

再计算 $\{x_k\}$ 组的转轴编号，于是有

$$-\frac{\pi}{n+1}+\frac{2k\pi}{n+1}\le\pi\le-\frac{\pi}{n+1}+\frac{2(k+1)\pi}{n+1} \tag{17}$$

解得

$$k\in\left[\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\right]$$

于是当 n 为奇数时，对于 $\{x'_k\}$ 组，此时 $k\in\left\{\frac{n-1}{2},\frac{n+1}{2}\right\}$，得

$$\left[g_{\varphi,n}(x')\right]_{极\min}=\min\left\{-(n-1)\cos\frac{-\varphi}{n-1},-(n-1)\cos\frac{-\varphi+2\pi}{n-1}\right\}$$

对于 $\{x_k\}$ 组，此时 $k=\frac{n+1}{2}$，得

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{极\min}=-(n+1)\cos\frac{-\varphi+\pi}{n+1}$$

由于 $\varphi\in[0,2\pi]$，且 $\left[g_{\varphi,n}(x')\right]_{极\min}\ge-(n-1)$，则由断言 2 可知

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{极\min}<-(n-1)\le\left[g_{\varphi,n}(x')\right]_{极\min} \tag{18}$$

于是有

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\min} = -(n+1)\cos\frac{-\varphi+\pi}{n+1}$$

当 n 为偶数时，对于 $\{x_k'\}$ 组，此时 $k=\frac{n}{2}$，得

$$\left[g_{\varphi,n}(x')\right]_{极\min} = -(n-1)\cos\frac{-\varphi+\pi}{n-1}$$

对于 $\{x_k\}$ 组，此时 $k\in\left\{\frac{n}{2},\frac{n}{2}+1\right\}$，得

$$\begin{aligned}\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{极\min} &= \min\left\{-(n+1)\cos\frac{-\varphi}{n+1},-(n+1)\cos\frac{-\varphi+2\pi}{n+1}\right\}\\ &=\begin{cases}-(n+1)\cos\frac{-\varphi}{n+1},\varphi\in[0,\pi]\\ -(n+1)\cos\frac{-\varphi+2\pi}{n+1},\varphi\in(\pi,2\pi]\end{cases}\\ &=-(n+1)\cos\frac{\varphi'}{n+1},\varphi'\in[-\pi,\pi]\end{aligned}$$

由于 $\varphi\in[0,2\pi]$，同(18)式的证明可知

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{极\min} < \left[g_{\varphi,n}(x')\right]_{极\min}$$

于是(5)式，(6)式得证。

4.2.3. 定理 1.2 证明思路分析

对于定理 1.2 的证明，第一个想法是直接求出像定理 1.1 那样的 $g_{\varphi,n}(x)$ 的解析式，再求最小的最大值，但由于 $n\in\mathbb{Q}^+$，依然沿着之前的做法在技术上有一定难度，主要原因就是此时计算出的极值点组，即(11)式相对复杂，分类较多，无法对单位圆进行有效划分。以 $\{x_k\}$ 组为例，首先求解包含 π 的区域，即

$$\frac{(2k+1)p\pi-2p\pi}{p+q}\le\pi\le\frac{(2k+3)p\pi-2p\pi}{p+q}$$

解得 $\frac{q}{2p}\le k\le 1+\frac{q}{2p}$，且 $k\in\mathbb{N}$.注意到此时需要对 $\frac{q}{2p}$ 是否取整进行讨论，若 $\frac{q}{2p}\in\mathbb{N}^*$，则令 $k_1=\frac{q}{2p}$ 和 $k_2=1+\frac{q}{2p}$ 代入 $g_{\varphi,n}(x_k)$ 进行比较即可，若 $\frac{q}{2p}\notin\mathbb{N}^*$，则令 $k_3=\left[\frac{q}{2p}\right]$ 和 $k_4=\left[\frac{q}{2p}\right]+1$，此时还需考虑 π 所在的 y 轴到区域 $x_{k_3}\frown x_{k_4}$ 两端端弧度大小，并基于此进行分类，显然处理难度已经很大，故此想法可以搁置。

第二个想法便是利用第(3)小问的角度 1 (先猜后证)的思想，可以先对条件进行化简，在化简中寻找可能的最值。在化简推导的过程中，首先依然是对 $g_{\varphi,n}(x)$ 进行求导，得出(11)式。结合之前的推导，不难发现算最大值，选择的极值点组为 $\{x_k\}$ 组，当然选另一组也可以，在处理上并无本质区别，只不过最后取最大的而已。将 x_k 代入式子得到

$$g_{\varphi,n}(x_k)=(n+1)\cos x_k=(n+1)\cos\left(\frac{(2k+1)p\pi-p\varphi}{p+q}\right) \tag{19}$$

但在(19)式中，有两大问题需要注意，其一便是 $p\varphi$ 的范围不可得知，其二是 x_k 的解析式相对复杂，不易处理。对于第一个问题，由于 $\varphi\in[0,2\pi]$，故可对整个实数集 $\mathbb{R}$ 以 2π 为周期进行划分，即必存在 t 使得 $p\varphi\in[2t\pi,(2t+2)\pi],t\in\mathbb{Z}$，从而相对控制了 $p\varphi$ 的范围。对于第二个问题此时可利用三角函数周期性将

重复的 2π 去掉，于是将 x_k 的分子部分写成如下形式，即

$$(2k+1)p\pi - p\varphi = -2(p+q)y\pi + u\pi - p\varphi, k\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z} \tag{20}$$

再将(20)式代入(19)式，不难发现，起作用的是 $u\pi - p\varphi$ 部分，于是很自然的想法是让 u 和 $p\varphi$ 产生联系，于是进一步化简得

$$(2k+1)p + 2(p+q)y = u, k\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z} \tag{21}$$

但在(21)式中，若是先给定 k 的值，去计算 u 和 y 的值，则并无大的意义，仅仅是换了一个表达形式，且此时 u 和 $p\varphi$ 并无联系。故可以反向思考，可以先给定 u 的值，且假定与 $p\varphi$ 有关，去计算 k 与 y 的值，于是将(21)式进一步化简得

$$(2p)k + 2(p+q)y = u - p, k\in\mathbb{Z}, y\in\mathbb{Z} \tag{22}$$

不难发现，此时(22)式是一个关于 k，y 的不定方程，且由于 $(2p, 2(p+q)) = 2(p, p+q) = 2$，故此不定方程若有解，由引理 2.7 可知，$u-p$ 为偶数。故将 p 分为奇数和偶数，不妨以奇数为例，若 p 为奇数，则 u 也为奇数，而 $p\varphi\in[2t\pi, (2t+2)\pi]$，故不妨设 $u = 2t+1$，其中 t 建立了 u 和 $p\varphi$ 之间的联系，它们和 $g_{\varphi,n}(x_k)$ 之间的联系可以用以下的箭头表示，即

$$p\varphi \xrightarrow{\text{决定}} t \xrightarrow{\text{决定}} u = 2t+1 \xrightarrow{\text{决定}} k \xrightarrow{\text{决定}} g_{\varphi,n}(x_k)$$

于是将 $u = 2t+1$ 代入(20)式进行计算得到化简的(23)式，即对确定的 t_1，有：

$$\cos x_{k_1} = \cos\left(\frac{(2t_1+1)\pi - p\varphi}{p+q}\right), p\varphi\in[2t_1\pi, (2t_1+2)\pi] \tag{23}$$

从(23)式得到 $x_{k_1}\in\left[\frac{-\pi}{p+q}, \frac{\pi}{p+q}\right]$，但需注意，此处的 k_1 并不能遍历 $\mathbb{N}$，即计算出的(24)式中的 $g_{\varphi,n}(x_{k_1})$ 为极大值，并非一定为最大值。但由引理 1.3 便可知

$$[g_{0,n}(x)]_{\max} \le [g_{\varphi,n}(x_{k_1})]_{\text{极}\max} \le [g_{\varphi,n}(x)]_{\max}$$

而引理 1.3 的证明思路也是如此，但由于引理 1.3 的 φ 是确定的，故用引理 2.6 会更加简便。同样当 p 为偶数时也相同，此处不再赘述。

4.2.4. 定理 1.2 证明

对**定理 1.2** 的证明，对于给定的 φ，由(11)式可得 $g'_{\varphi,n}(x) = 0$ 的根。由引理 2.5 可知 $g_{\varphi,n}(x)$ 最大值必在 $g'_{\varphi,n}(x) = 0$ 的根处取到，则当 p 为奇数时，设 $p\varphi\in[2t\pi, (2t+2)\pi], t\in\mathbb{Z}$ 时，考虑以下不定方程的整数解

$$(2p)x + 2(p+q)y = 2t+1-p$$

对于确定的 t_1，结合 p 为奇数，则存在 $z\in\mathbb{Z}$ 使得 $2z = 2t_1+1-p$，于是有

$$(2p, 2(p+q)) \mid 2t_1+1-p$$

则由引理 2.7 得，存在整数 $x = k_1, y = m_1$ 使得

$$(2k_1+1)p\pi + 2(p+q)m_1\pi = (2t_1+1)\pi$$

于是有

$$\cos x_{k_1}=\cos\left(\frac{(2k_1+1)p\pi-p\varphi}{p+q}\right)=\cos\left(\frac{(2t_1+1)\pi-2(p+q)m_1\pi-p\varphi}{p+q}\right)$$
$$=\cos\left(\frac{(2t_1+1)\pi-p\varphi}{p+q}-2m_1\pi\right)$$
$$=\cos\left(\frac{(2t_1+1)\pi-p\varphi}{p+q}\right)$$

由于 $p\varphi\in[2t_1\pi,(2t_1+2)\pi]$，则

$$\frac{(2t_1+1)\pi-p\varphi}{p+q}\in\left[\frac{-\pi}{p+q},\frac{\pi}{p+q}\right]$$

从而

$$\left[g_{\varphi,n}\left(x_{k_1}\right)\right]_{\text{极}\max}=(n+1)\cos x_{k_1}\geq(n+1)\cos\frac{\pi}{p+q} \tag{24}$$

即对任意给定的 $\varphi\in[0,2\pi]$，有

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\max}\geq(n+1)\cos\frac{\pi}{p+q}$$

由引理 1.3 可知

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\max}\geq(n+1)\cos\frac{\pi}{p+q}=\left[g_{0,n}(x)\right]_{\max}$$

当 p 为偶数时，设 $p\varphi\in[(2\mu-1)\pi,(2\mu+1)\pi],\mu\in\mathbb{Z}$，考虑以下不定方程的整数解

$$(2p)x+2(p+q)y=2\mu-p$$

结合 p 为奇数时的证明思路由引理 2.7 得，存在整数 $x=k_5,y=m_2$ 使得

$$(2k_5+1)p\pi+2(p+q)m_2\pi=2\mu\pi$$

于是有

$$\cos x_{k_5}=\cos\left(\frac{(2k_5+1)p\pi-p\varphi}{p+q}\right)=\cos\left(\frac{2\mu\pi-2(p+q)m_2\pi-p\varphi}{p+q}\right)=\cos\left(\frac{2\mu\pi-p\varphi}{p+q}\right)$$

由于 $p\varphi\in[(2\mu-1)\pi,(2\mu+1)\pi]$，则

$$\frac{2\mu\pi-p\varphi}{p+q}\in\left[\frac{-\pi}{p+q},\frac{\pi}{p+q}\right]$$

从而

$$\left[g_{\varphi,n}\left(x_{k_5}\right)\right]_{\text{极}\max}=(n+1)\cos x_{k_5}\geq(n+1)\cos\frac{\pi}{p+q}$$

即对任意给定的 $\varphi\in[0,2\pi]$，有

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\max}\geq(n+1)\cos\frac{\pi}{p+q}$$

由引理 1.3 可知

$$\left[g_{\varphi,n}(x)\right]_{\max} \geq (n+1)\cos\frac{\pi}{p+q} = \left[g_{\frac{\pi}{p},n}(x)\right]_{\max}$$

于是(7)式得证。

基金项目

南京市教学研究项目：基于“赋能型作业”的高中数学教学设计优化研究，编号(2023NJJK15-L45)。

参考文献

[1] 徐森林. 数学分析(第一册) [M]. 北京: 清华大学出版社, 2006.

[2] 张筑生. 数学分析新讲(重排版) [M]. 北京: 北京大学出版社, 2021.

[3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017 年版 2020 年修订) [M]. 北京: 人民教育出版社, 2020.

[4] 冯志刚. 整除、同余与不定方程[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020.

[5] 童继稀. 2025 年高考数学全国 I 卷第 19 题的解法分析与推广探究[J]. 数学通讯, 2025(10): 40-44.