Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(12), 41-47
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1512292

浅谈洛必达法则及其在高中数学解题中的应用

李光洁，王军威，杨　超

广东外语外贸大学数学与统计学院，广东 广州

收稿日期：2025年10月22日；录用日期：2025年11月24日；发布日期：2025年12月16日

摘　要

洛必达法则是求函数极限的一种简单有效的方法。本文先阐述了洛必达法则的内容以及使用洛必达法则时的注意事项。其次，进一步介绍了通过变换可使用洛必达法则的其他型未定式。同时，本文也讨论了洛必达法则在高中数学解题中的应用。在高中数学中，常遇到这种求参数取值范围的经典大题，通过分离变量法，再结合洛必达法则往往能迅速高效地求解，这就为高中生解决这类问题提供了一种有效的辅助解题策略。本文的探讨将为洛必达法则的学习及应用提供参考。

关键词

洛必达法则，导数，极限，应用

A Brief Discussion on L'Hôpital's Rule and Its Application in Solving Problems in High School Mathematics

Guangjie Li, Junwei Wang, Chao Yang

School of Mathematics and Statistics, Guangdong University of Foreign Studies, Guangzhou Guangdong

Received: October 22, 2025; accepted: November 24, 2025; published: December 16, 2025

Abstract

L'Hôpital's Rule is a simple and effective method for calculating the limits of functions. First, this paper expounds on the content of L'Hôpital's Rule and the precautions to be observed when applying it. Secondly, it further introduces other indeterminate forms that can be solved using L'Hôpital's Rule through appropriate transformations. Meanwhile, this paper also discusses the application of L'Hôpital's Rule in solving problems in high school mathematics. In high school mathematics, students often encounter classic major problems that require determining the range of parameter

文章引用: 李光洁, 王军威, 杨超. 浅谈洛必达法则及其在高中数学解题中的应用[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 41-47.
DOI: 10.12677/pm.2025.1512292

values; by means of the variable separation method combined with L'Hôpital's Rule, such problems can often be solved quickly and efficiently, which provides high school students with an effective auxiliary problem-solving strategy for such questions. The discussion in this paper will provide a reference for the learning and application of L'Hôpital's Rule.

Keywords

L'Hôpital's Rule, Derivatives, Limits, Applications

1. 引言

洛必达法则是一种高效求解未定式极限的方法，在计算未定式极限中扮演着十分重要的角色。常见的基本型未定式有 0/0 型和∞/∞型。未定式的极限有可能存在也有可能不存在，即使极限存在也无法利用“商的极限等于极限的商”的规则进行求解，需要探讨一种有效的求解未定式极限的方法——洛必达法则。该法则不仅可以求解两类基本型未定式的极限，也可以解决其他型未定式的极限，如：$0\cdot\infty$ 型、$\infty-\infty$ 型、0^0 型、∞^0 型、1^∞ 型的极限。冯志敏和薛瑞阐述了洛必达法则在求未定式极限中的应用以及需要注意的问题[1]。陈作清针对学生在应用洛必达法则求极限的过程中易出现的错误进行了简单总结[2]。蒲松和夏嫦通过实例也归纳了洛必达法则使用过程中学生容易犯的错误，避免他们在后续求解此类问题的极限时继续犯错[3]。近年来，杨雄和周立芬较全面地讨论了洛必达法则的内容和证明并给出了相关的推广法则，同时结合例子也说明了法则应用时需注意的事项以及其它未定式类型转换成基本未定式类型的方法[4]。

洛必达法则不仅在高等数学的极限求解中发挥着突出作用，在高中数学解题中也崭露头角[5] [6]。纵观近几十年来各省的文理数学试题，导数应用相关问题常以大题形式出现。这类题目综合性较强，其中“求参数的取值范围”是常出题型。在解决此类问题时，学生一般采用分离变量法进行求解，但该方法涉及分类讨论的情形较多、解题过程也比较繁杂，导致学生考虑不全面出现漏解。此外，部分题型通过分离变量法求解时，还会出现 0/0 型和∞/∞型等函数值无法直接判定，针对此类型未定式运用洛必达法则可快速高效地解决。

本文余下结构：第二部分阐述了洛必达法则的内容，并给出了法则的几点说明；第三部分介绍了可化为基本型的其他型未定式；第四部分从一道高考数学题出发讨论了洛必达法则在高中数学解题中的应用。

2. 洛必达法则介绍(0/0 型和∞/∞型)

定理 1 (洛必达法则 1)若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足如下条件：

(1) 当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 及 $F(x)$ 的极限都为 0；

(2) 在点 x_0 的某去心邻域 $U_0(x_0,\delta)$ 内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在，

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}。$$

证明：取

$$f_1(x)=\begin{cases}f(x) & x\in U_0(x_0,\delta)\\ 0 & x=x_0\end{cases}，\quad F_1(x)=\begin{cases}F(x) & x\in U_0(x_0,\delta)\\ 0 & x=x_0\end{cases}。$$

易见，$f_1(x)$ 与 $f(x)$、$F_1(x)$ 与 $F(x)$ 在邻域 $U_0(x_0,\delta)$ 内具有完全相同的性质。从而根据柯西中值定理(参阅[7] [8])可得

$$\frac{f(x)}{F(x)}=\frac{f_1(x)-f_1(x_0)}{F_1(x)-F_1(x_0)}=\frac{f_1'(\epsilon)}{F_1'(\epsilon)}=\frac{f'(\epsilon)}{F'(\epsilon)},$$

其中，$x\in U_0(x_0,\delta)$，$\epsilon\in(x,x_0)$ 或 $\epsilon\in(x_0,x)$。对上式两边同时关于 $x\to x_0$ 取极限得

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(\epsilon)}{F'(\epsilon)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}。$$

证毕。

定理 2 (洛必达法则 2)若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足如下条件：

(1) $\lim_{x\to\infty}f(x)=0$、$\lim_{x\to\infty}F(x)=0$；

(2) 存在 $X>0$，当 $|x|>X$ 时，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在，

则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{F'(x)}。$$

定理 3 (洛必达法则 3)若函数 $f(x)$ 和 $F(x)$ 满足如下条件

(1) $\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty$、$\lim_{x\to x_0}F(x)=\infty$；

(2) 在点 x_0 的某去心邻域 $U_0(x_0,\delta)$ 内，$f'(x)$ 及 $F'(x)$ 都存在且 $F'(x)\neq 0$；

(3) $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 存在，

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{F(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{F'(x)}。$$

注：定理 2 和定理 3 的证明与定理 1 类似，不再重复证明。

关于洛必达法则的几点说明：

(1) 使用洛必达法则的重要的前提条件是两个函数的导数及其商的极限必须存在。

(2) 每次使用洛必达法则时，务必要注意验证条件是否成立。条件成立可用，否则不可使用。

(3) 注意在应用洛必达法则时是对分子和分母分别同时求导，切勿与函数商的求导法则混淆。

(4) 定理 1~定理 3 只给出了 $x\to x_0$ 和 $x\to\infty$ 时对应的洛必达法则，但在实际中可以将 $x\to x_0$、$x\to\infty$ 改成 $x\to x_0^+$、$x\to x_0^-$、$x\to+\infty$ 以及 $x\to-\infty$，结论依然适用。

(5) 若 $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 还是 0/0 型或∞/∞型未定式，可对 $\frac{f'(x)}{F'(x)}$ 再次应用洛必达法则，只要其二阶导数及其商的极限存在即可。这也表明只要符合洛必达法则的条件，可连续使用该法则，一直用到求出极限为止。

(6) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}\to\infty$，同样可以推出 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{F(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{F'(x)}\to\infty$。

例 1 求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-3x+2}{x^3-x^2-x+1}$。

解 这是 0/0 型。

$$原式=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-3x+2\right)'}{\left(x^3-x^2-x+1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-3}{3x^2-2x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(3x^2-3\right)'}{\left(3x^2-2x-1\right)'}=\lim_{x\to 1}\frac{6x}{6x-2}=\frac{3}{2}。$$

注意最后一步求极限时不是未定式，不能再使用洛必达法则求解，可直接代入 $x=1$ 得出结果。学生们在使用洛必达法则求极限时经常不注意是否满足条件从而得出本题结果是 1 的错误结论。

例 2 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}}{x-\sin x}$。

解 这是 0/0 型。

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{\sin x}\right)'}{\left(x-\sin x\right)'}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-\cos x\mathrm{e}^{\sin x}}{1-\cos x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\sin x\mathrm{e}^{\sin x}-\cos^2 x\mathrm{e}^{\sin x}}{\sin x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x+\cos x\mathrm{e}^{\sin x}+\sin x\cos x\mathrm{e}^{\sin x}+2\cos x\sin x\mathrm{e}^{\sin x}-\cos^3 x\mathrm{e}^{\sin x}}{\cos x}=1。$$

本题连续利用了 3 次洛必达法则求解，说明了只要满足洛必达法则条件，可连续多次应用该法则，一直用到求出极限为止。

例 3 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\ln\sin(5x)}{\ln\sin(2x)}$。

解 这是∞/∞型。

$$原式=\lim_{x\to 0^+}\frac{\cos(5x)\cdot 5\cdot\sin(2x)}{\sin(5x)\cdot\cos(2x)\cdot 2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{5\cdot\sin(2x)}{\sin(5x)\cdot 2}=\lim_{x\to 0^+}\frac{5\cdot 2\cdot\cos(2x)}{2\cdot 5\cdot\cos(5x)}=1。$$

3. 其他型未定式

除了基本型未定式(0/0 型和∞/∞型)还有其他型未定式(参阅[3] [4])：$0\cdot\infty$ 型、$\infty-\infty$ 型、0^0 型、∞^0 型、1^∞ 型。在遇到这些未定式时，同学们很容易得到 $0\cdot\infty=0$、$\infty-\infty=0$、$0^0=0$、$\infty^0=1$ 以及 $1^\infty=1$ 的错误结论，尤其在高中阶段更容易出错。

常见的变形如下：

i) $0\cdot\infty$ 型：$0\cdot\infty=\dfrac{0}{\frac{1}{\infty}}=\dfrac{0}{0}$ 或 $0\cdot\infty=\dfrac{\infty}{\frac{1}{0}}=\dfrac{\infty}{\infty}$；

ii) $\infty-\infty$ 型：利用通分或提因式转化为 0/0 型和∞/∞型。

iii) 0^0 型，∞^0 型，1^∞ 型：采用取对数的方式，转化成指数函数极限，即 $\lim\limits_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to x_0}v(x)\ln u(x)}$，直接变成了求该函数的极限，其中特别强调指数极限为 $0\cdot\infty$ 型，再化为 0/0 型和∞/∞型的未定式进行计算。

例 4 求 $\lim\limits_{x\to 0^+}x^\mu\cdot\ln x\ (\mu>0)$。

解 这是 $0\cdot\infty$ 型。

原式 $= \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\ln x}{x^{-\mu}} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\frac{1}{x}}{(-\mu)\cdot x^{-\mu-1}} = \lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-x^{\mu}}{\mu} = 0$。

例 5 求 $\lim\limits_{x\to\pi/2}\left(\dfrac{1}{\cos x}-\tan x\right)$。

解 这是 $\infty-\infty$ 型。

原式 $= \lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{1-\sin x}{\cos x} = \lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{-\cos x}{-\sin x} = 0$。

例 6 求 $\lim\limits_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}}$。

解 这是 ∞^0 型。

原式 $= \lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\frac{\ln\cot x}{\ln x}}$。而

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\ln\cot x}{\ln x} = \lim_{x\to0^+}\frac{\tan x\cdot\left(-\dfrac{1}{\sin^2 x}\right)}{\dfrac{1}{x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{-x}{\sin x\cos x} = -1。$$

故

$$\lim_{x\to0^+}(\cot x)^{\frac{1}{\ln x}} = \mathrm{e}^{-1}。$$

例 7 求 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x}$。

解 这是 0^0 型。

原式 $= \lim\limits_{x\to0^+}\mathrm{e}^{\sin x\ln x}$。而

$$\lim_{x\to0^+}\sin x\ln x = \lim_{x\to0^+}\frac{\ln x}{\dfrac{1}{\sin x}} = \lim_{x\to0^+}\frac{\dfrac{1}{x}}{-\dfrac{\cos x}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to0^+}\frac{\sin^2 x}{x\cos x} = -\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{\cos x} = 0。$$

故 $\lim\limits_{x\to0^+}x^{\sin x} = \mathrm{e}^0 = 1$。

4. 洛必达法则在高中数学解题中的应用——以一道高考题为例

例 8 (2016 年高考数学试卷(文) (新课标II)) 已知函数 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$。

(I) 当 $a=4$ 时，求曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,f(1))$ 处的切线方程；

(II) 若当 $x\in(1,+\infty)$ 时，$f(x)>0$，求 a 的取值范围。

解 (I) 当 $a=4$ 时，函数 $f(x)=(x+1)\ln x-4(x-1)$。从而有 $f(1)=0$，点 $(1,f(1))=(1,0)$。对函数 $f(x)$ 关于 x 求导得

$$f'(x)=\ln x+(x+1)\cdot\frac{1}{x}-4,$$

代入 $x=1$ 有

$$f'(1)=\ln 1+(1+1)\cdot\frac{1}{1}-4=-2,$$

即函数在点 $(1,0)$ 处的切线斜率为 $k=f'(1)=-2$。则曲线 $y=f(x)$ 在 $(1,0)$ 处的切线方程为

$$y=-2(x-1)=-2x+2\text{。}$$

(II) 方法一：利用函数的单调性进行求解。

因为 $f(x)=(x+1)\ln x-a(x-1)$，所以

$$f'(x)=1+\frac{1}{x}+\ln x-a\text{，}$$

$$f''(x)=\frac{x-1}{x^2}\text{。}$$

由 $x>1$ 可得 $f''(x)>0$，从而 $f'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增，则

$$f'(x)>f'(1)=2-a\text{。}$$

下面分情况讨论。

(1) 当 $a\le 2$ 时， $f'(x)>f'(1)\ge 0$，故

$f(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上单调递增， $f(x)>f(1)=0$，满足题意。

(2) 当 $a>2$ 时，因二阶导数 $f''(x)$ 存在故一阶导数 $f'(x)$ 可导且连续，故

存在 $x_0\in(1,+\infty)$，使得 $f'(x_0)=0$，从而函数 $f(x)$ 在 $(1,x_0)$ 上单调递减，在 $(x_0,+\infty)$ 上单调递增。因为 $f(1)=0$，所以存在 x_0 满足 $f(x_0)<0$，不合题意。

综上所述， a 的取值范围是 $a\le 2$。

方法二：利用洛必达法则进行求解。

由题意知 $x\in(1,+\infty)$， $f(x)>0$，故

$$(x+1)\ln x-a(x-1)>0\text{，}$$

即

$$a<\frac{(x+1)\ln x}{x-1}\text{。}$$

记 $g(x)=\dfrac{(x+1)\ln x}{x-1}$。至此，只需求出当 $x\in(1,+\infty)$ 时， $g(x)$ 的最小值。对 $g(x)$ 关于 x 求导得

$$g'(x)=\frac{\left[\ln x+\frac{x+1}{x}\right](x-1)-(x+1)\ln x}{(x-1)^2}=\frac{x-\frac{1}{x}-2\ln x}{(x-1)^2}\text{。}$$

记 $h(x)=x-\dfrac{1}{x}-2\ln x$。继续对 $h(x)$ 关于 x 求导得

$$h'(x)=1+\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=\frac{(x-1)^2}{x^2}>0,\quad x>1\text{，}$$

从而有，当 $x>1$ 时， $h(x)$ 单调递增， $h(x)>h(1)=0$。进一步可推出

$$g'(x)=\frac{h(x)}{(x-1)^2}>0,\quad x>1\text{。}$$

则当 $x>1$ 时，函数 $g(x)=\dfrac{(x+1)\ln x}{x-1}$ 也是单调递增的，从而 a 小于等于 $g(x)$ 在 $x=1$ 处的右极限即可。

下面利用洛必达法则求其在 $x=1$ 处的右极限：

$$\lim_{x\to1^+}\frac{(x+1)\ln x}{x-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{\ln x+\frac{x+1}{x}}{1}=\lim_{x\to1^+}\left(\ln x+1+\frac{1}{x}\right)=2,$$

可得当 $x>1$ 时，$g(x)=\frac{(x+1)\ln x}{x-1}>2$ 恒成立。综上得出

$$a\le2。$$

本题主要考查了导数的应用，函数的导数与函数的单调性的关系的应用，考查参数范围的求解，考查学生分析解决问题的能力，有难度。在求解过程中方法一利用了一阶导函数和二阶导函数来判定函数的单调性。具体先求出函数的一阶导函数 $f'(x)$ 和二阶导函数 $f''(x)$，根据二阶导函数的符号判定一阶导函数的符号，分情况讨论出一阶导函数的符号从而给出函数本身的单调性，进而分析出参数的范围；方法二利用变量分离出参数，然后利用一阶导函数 $g'(x)$ 判定函数 $g(x)$ 的单调性分析出只需求出 $g(x)$ 在 $x=1$ 处的右极限。在求右极限时用洛必达法则直接求解。学生在求解这种题目时利用一阶导函数判定函数的单调性比较熟练，而先利用二阶导函数来判定一阶导函数的符号从而分析出函数本身的单调性有时不能做出正确判断。学生若会使用洛必达法则，则可利用方法二无需求解二阶导函数且不需要分情况进行讨论相对比较直观，从而避免在分析问题时漏掉某些需要讨论的情况。

总而言之，纵观近二十年来全国各省市的高考数学试题和模拟题，可借助高等数学思想或基础方法求解的题型已屡见不鲜。这类题目虽能用高中数学知识解决，但通常解题过程繁琐、技巧性要求较高，不少学生面对这类题目时往往望而却步。事实上，若同学们能掌握部分高等数学的基础知识点与核心方法，用以应对这类数学题，往往能大幅简化解题步骤，达到事半功倍的效果。比如，在学生学习完高中的导数知识后，进一步给他们讲解洛必达法则，结合具体例题进行练习。经过针对性的练习，相信绝大部分学生都能熟练运用洛必达法则解决相关的导数大题或难题。

注　释

文中出现的 $U_0(x_0,\delta)$ 表示的是 x_0 的去心 δ 邻域。

基金项目

广东省本科高校教学质量与教学改革工程建设项目“经管类大学数学课程教研室”(2023 年)、“经济统计与数据科学课程教研室”(2024 年)和“数学思维与应用课程教研室”(2022 年)，校级本科课程思政改革示范项目“经管类大学数学课程思政示范团队”(2024 年)，校级教学研究与改革立项建设项目“新文科背景下大学数学课程群数智化改革与实践”(2024 年)。

参考文献

[1] 冯志敏, 薛瑞. 使用洛必达法则的实质及其注意事项[J]. 基础及前沿究, 2009(15): 44-45.
[2] 陈作清. 应用洛必达法则求极限中的常见错误及分析[J]. 数学学习与研究, 2015(17): 82-83.
[3] 蒲松, 夏嫦. 例谈高等数学中洛必达法则应用中的几个问题[J]. 数学学习与研究, 2016(13): 122.
[4] 杨雄, 周立芬. 洛必达法则证明及其应用探讨[J]. 焦作师范高等专科学校学报, 2024, 40(4): 71-76.
[5] 徐东雪. 浅谈洛必达法则在导数大题中的应用[J]. 科技资讯, 2020, 18(32): 138-140.
[6] 周其祥, 纪定春. 洛必达法则在高考数学中的应用[J]. 数理化学习(高一二版), 2021(11): 27-31.
[7] 华东师范大学数学系, 编. 数学分析(上册) [M]. 第 4 版. 北京: 高等教育出版社, 2010.
[8] 同济大学数学科学院, 编. 高等数学(上册) [M]. 第 8 版. 北京: 高等教育出版社, 2023.