

# 单调洛必达法则在解决一类高考导数恒成立问题中的应用

薛雅中<sup>1</sup>, 钟德光<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>深圳职业技术大学电子信息工程学院, 广东 深圳

<sup>2</sup>深圳职业技术大学应用数学研究中心, 广东 深圳

收稿日期: 2025年10月14日; 录用日期: 2025年11月18日; 发布日期: 2025年11月25日

## 摘 要

本文利用高等数学的洛必达法则与单调洛必达法则, 讨论了一类高考数学导数压轴题的一个完整解答。

## 关键词

洛必达法则, 单调洛必达法则, 导数压轴题, 分离参数法

# The Application of Monotonic L'Hospital's Rule Law in Solving a Class of Derivative Constancy Problems in College Entrance Examination

Yazhong Xue<sup>1</sup>, Deguang Zhong<sup>2\*</sup>

<sup>1</sup>Electronic Information Engineering College, Shenzhen Polytechnic University, Shenzhen Guangdong

<sup>2</sup>Institute of Applied Mathematics, Shenzhen Polytechnic University, Shenzhen Guangdong

Received: October 14, 2025; accepted: November 18, 2025; published: November 25, 2025

## Abstract

This article discusses a complete solution to a kind of high school entrance exam mathematical derivative finale questions by using the L'Hospital's rule and monotonic L'Hospital's rule in advance mathematics.

\*通讯作者。

文章引用: 薛雅中, 钟德光. 单调洛必达法则在解决一类高考导数恒成立问题中的应用[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 1-6.  
DOI: 10.12677/pm.2025.1512288

## Keywords

L'Hospital's Rule, Monotonic L'Hospital's Rule, The Derivative Finalization Question, The Method of Separation Parameter

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 问题重现与分离参数法

2023 年全国甲卷高考数学导数压轴如下:

**题 1:** 已知  $f(x) = ax - \frac{\sin x}{\cos^3 x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

(1) 若  $a = 8$ , 讨论  $f(x)$  的单调性;

(2) 若  $f(x) < \sin 2x$  恒成立, 求  $a$  的取值范围.

在此我们只讨论第(2)问. 标准答案对于第(2)问所给的方法为分类讨论, 过程有点复杂, 所得到的结果为  $a \in (-\infty, 3]$ , 具体过程可参见参考文献[1]. 此外, 文献[1]也利用导数的极限定义对其进行求解, 但是求解的答案是  $a < 3$ , 这离标准答案  $a \leq 3$  还差一个  $a = 3$  的情形. 于是对于  $a = 3$ , 文献[1]再次将  $a = 3$  代入原不等式, 然后证明其亦符合不等式, 因此最终得到  $a \leq 3$  的答案. 那么能不能有其他方法绕开分类讨论呢? 由于此问是求参数  $a$  的范围. 因此, 我们自然而然地想到了分离参数法. 具体探索过程如下: 首先, 由于不等式  $f(x) < \sin 2x$  对于所有  $x \in (0, \pi/2)$  恒成立, 所以有

$$a < \frac{\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \sin 2x}{x}. \quad (*)$$

引入函数:

$$\phi(x) = \frac{\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \sin 2x}{x}, \quad x \in (0, \pi/2).$$

因此, 为了求  $a$  的取值范围, 我们需要求  $\phi(x)$  在  $(0, \pi/2)$  上的最小值. 为此, 对  $\phi(x)$  求导可得

$$\phi'(x) = \frac{\left(\frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x} + 2\cos 2x\right) \cdot x - \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \sin 2x\right)}{x^2}.$$

显然, 不能直接判断  $\phi'(x)$  在  $(0, \pi/2)$  的符号. 因此, 再次引入函数

$$F(x) = \left(\frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x} + 2\cos 2x\right) \cdot x - \left(\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \sin 2x\right),$$

并且求导可得

$$\begin{aligned}
F'(x) &= \left( \frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x} + 2\cos 2x \right)' \cdot x + \left( \frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x} + 2\cos 2x \right) - \left( \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \sin 2x \right)' \\
&= \left( \frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x} + 2\cos 2x \right)' \cdot x + \left( \frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x} + 2\cos 2x \right) - \left( \frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x} + 2\cos 2x \right) \\
&= -4x \cdot \sin x \cdot \frac{2\cos^6 x + \cos^2 x - 3}{\cos^5 x} > 0.
\end{aligned}$$

这说明了函数  $F(x)$  在  $(0, \pi/2)$  是单调增函数, 从而有  $F(x) > F(0^+) = 0$ ; 故  $\phi'(x)$  在  $(0, \pi/2)$  恒正。因此, 函数  $\phi(x)$  在  $(0, \pi/2)$  是单调增的。从而可知,  $\phi(x)$  在  $(0, \pi/2)$  上的最小值在  $x=0$  处取得。

## 2. 分离参数法所引发的问题

但是,  $\phi(x)$  在  $x=0$  处没有定义。于是, 利用经典的分离参数法解决文首的题型时, 会产生如下问题 1:

**问题 1:** 如何计算  $\phi(x)$  在  $x=0$  处的值?

根据高等数学[2]的知识可知, 可用极限计算  $\phi(x)$  在  $x=0$  处的值。实际上由洛必达法则可得

$$\phi(0^+) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \sin 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{3-2\cos^2 x}{\cos^4 x} + 2\cos 2x}{1} = 3.$$

因此, 问题 1 利用洛必达法则即可解决。但是, 利用分离参数法和洛必达法则我们似乎只得到了  $a < 3$ , 这离标准答案  $a \leq 3$  还差一个  $a=3$  的情形。于是, 利用洛必达法则, 我们又产生如下问题 2:

**问题 2:** 为何利用洛必达法则, 会漏掉  $a=3$  的情形?

其实并不是由于我们使用了洛必达法则而导致了漏掉  $a=3$  的情形, 而是我们使用洛必达法则时, 只是在(\*)式右边取了极限。这当然有所不妥。准确的做法应该是对(\*)式两边取极限。再结合极限的保不等式性我们即可得到正确答案。所谓函数极限的保不等式性指的是如下的一个结果:

**命题 1** [2] [3]: 设极限  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  和  $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$  都存在, 且存在  $\delta > 0$  使得当  $0 < |x-a| < \delta$  时恒有  $f(x) < g(x)$ , 则  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow a} g(x)$ 。

命题 1 告诉我们, 如果两个函数局部上存在严格不等号, 若它们极限存在, 则极限严格保号的同时, 其结果亦可取等式。对于可以取等号的情形, 一个简单的例子就是当  $x > 0$  时, 恒有

$$f(x) = 1/(1+x) < g(x) = 1/x.$$

但是,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$ 。

现在我们对(\*)式两边取极限, 并且由极限的保不等式性, 可得

$$a = \lim_{x \rightarrow 0^+} a \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \sin 2x}{x} = 3.$$

因此, 利用极限的保不等式性, 可以保证问题 2 的解决。

从上述计算过程可知, 为了求参数  $a$  的范围, 我们构造了两次函数以及求了两次导数, 以判断某个函数的单调性。这种判断函数的单调性, 其所涉及到的计算量无疑也是复杂的。因此, 自然地提出如下问题 3:

**问题 3:** 是否有其他快速判断函数单调性方法, 以替代上述计算中所出现的多次构造函数和多次求导的繁杂过程?

### 3. 单调洛必达法则

问题 3 的答案是肯定的。单调洛必达法则正是解决这一困难的一个有效工具。所谓判断函数单调性的单调洛必达法则, 指的是如下的一个结果。

**单调洛必达法则**[4][5] 若函数  $f(x), g(x)$  在  $(a, b)$  上可导, 且  $f(a^+) = g(a^+) = 0$  或  $f(b^-) = g(b^-) = 0$ , 且  $g'(x)$  在  $(a, b)$  不为零。若  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  在  $(a, b)$  单调递增(或者单调递减), 则  $\frac{f(x)}{g(x)}$  也在  $(a, b)$  单调递增(或者单调递减)。

一般来说, 判断两个可导函数  $f(x), g(x)$  的商  $\frac{f(x)}{g(x)}$  的单调性, 需要对  $\frac{f(x)}{g(x)}$  求导, 可得其导数为  $\frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}$ ; 然后再判断函数  $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$  的符号即可。上述法则表明, 欲判断  $\frac{f(x)}{g(x)}$  的单调性, 我们只需要考察  $\frac{f'(x)}{g'(x)}$  的单调性即可。这往往比判断  $f'(x)g(x) - f(x)g'(x)$  的符号来得容易。现在我们利用该法则以判断函数

$$\phi(x) = \frac{\frac{\sin x}{\cos^3 x} + \sin 2x}{x}, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

的单调性。为此, 引入函数:

$$f_1(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x} + \sin 2x, f_2(x) = x, x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

显然  $f_1(x), f_2(x)$  在  $x \in (0, \pi/2)$  内可导, 且满足  $f_2'(x) = 1 > 0$ ,  $f_1(0^+) = f_2(0^+) = 0$ 。因此可用上述的单调洛必达法则。通过计算, 可得

$$\begin{aligned} \frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} &= \frac{\frac{\cos^4 x - \sin x \cdot [3\cos^2 x \cdot (-\sin x)]}{\cos^6 x} + 2\cos 2x}{1} \\ &= \frac{\cos^2 x + 3\sin^2 x}{\cos^4 x} + 4\cos^2 x - 2 \\ &= \frac{3 - 2\cos^2 x}{\cos^4 x} + 4\cos^2 x - 2 \\ &= \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} + 4\cos^2 x - 2. \end{aligned}$$

考察函数  $\gamma(t) = \frac{3}{t^4} - \frac{2}{t^2} + 4t^2 - 2$ ,  $t \in (0, 1)$ 。则

$$\gamma'(t) = -12t^{-5} + 4t^{-3} + 8t = \frac{4(-3 + t^2 + 2t^6)}{t^5} < 0.$$

而余弦函数  $\cos x$  在  $x \in (0, \pi/2)$  内单调递减。因此, 根据复合函数的单调性法则可知, 函数

$$\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)} = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} + 4\cos^2 x - 2$$

在  $x \in (0, \pi/2)$  上单调递增。所以, 根据单调洛必达法则可知,  $\phi(x)$  在  $x \in (0, \pi/2)$  上单调递增。

#### 4. 单调洛必达法则的应用再一举例

貌似上述例子还看不出单调洛必达法则在求解高中数学这类题型的快速应用, 为此我们再看看如下一个例子:

**题 2:** (2010 年新课标全国卷理科数学第 21 题) 设函数  $f(x) = e^x - 1 - x - ax^2$ 。

(1) 若  $a = 0$ , 求  $f(x)$  的单调区间;

(2) 若当  $x \geq 0$  时  $f(x) \geq 0$ , 求  $a$  的取值范围。

我们只看第(2)问。显然, 当  $x = 0$  时, 对于所有的实数  $a$ , 恒有  $f(x) \geq 0$ 。因此, 我们仅讨论  $x > 0$  的情形。此时, 因为  $f(x) \geq 0$  对于所有的  $x > 0$  恒成立。所以, 分离参数可得

$$a \leq \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

所以

$$a \leq \min_{x \in (0, +\infty)} \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

接下来, 我们采用单调洛必达法则, 以求  $a$  的最大值。为此, 考虑函数  $f_1(x) = x^2$ ,  $f_2(x) = e^x - 1 - x$ 。显然, 对于所有的  $x > 0$ , 有  $f_1'(x) = 2x \neq 0$ 。且  $f_1(0^+) = f_2(0^+) = 0$ 。使用单调洛必达法则, 可得

$$\frac{f_2'(x)}{f_1'(x)} = \frac{e^x - 1}{2x}.$$

又因为  $f_2''(x) = e^x \neq 0$ , 且  $f_1'(0^+) = f_2'(0^+) = 0$ , 因此再次使用单调洛必达法则, 可得

$$\frac{f_2''(x)}{f_1''(x)} = \frac{e^x}{2}.$$

而函数  $\frac{f_2''(x)}{f_1''(x)}$  显然在  $x > 0$  是单调递增的, 所以由单调洛必达法则, 可知函数  $\frac{f_2'(x)}{f_1'(x)}$  在  $x > 0$  是单调

递增的; 从而, 再次根据单调洛必达法则, 可得函数  $\frac{f_2(x)}{f_1(x)}$  在  $x > 0$  是单调递增的。所以,  $a$  的取值范围满足:

$$a \leq \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}.$$

#### 5. 求解过程的归纳总结

总之, 对于上述类型的高考题, 我们的处理方法是: 先分离参数; 然后利用单调洛必达法则判断函数的单调性, 这里可能会多次用到该法则; 最后用洛必达法则。这样即可完整求解这类求参数题目的解, 而且做到不重不漏。在此, 我们将上述讨论的两道高考题及其结果化为如下一般的命题:

**命题 1** 设函数  $f_1(x), f_2(x)$  在区间  $(a, b)$  上连续可导(其中  $b$  可能为  $+\infty$ ), 且满足  $f(a^+) = g(a^+) = 0$  和

$\forall x \in (a, b), f_2'(x) \neq 0$ 。若对于所有的  $x \in (a, b)$ , 不等式  $M < \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$  (或  $M \leq \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ) 恒成立。则当函数  $\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$  在  $(a, b)$  上单调递增, 有

$$M \in \left( -\infty, \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right].$$

**命题 2** 设函数  $f_1(x), f_2(x)$  在区间  $(a, b)$  上连续可导(其中  $b$  可能为  $+\infty$ ), 且满足  $f_1(b^-) = f_2(b^-) = 0$  和  $\forall x \in (a, b), f_2'(x) \neq 0$ 。若对于所有的  $x \in (a, b)$ , 不等式  $M < \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$  (或  $M \leq \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$ ) 恒成立。则当函数

$\frac{f_1'(x)}{f_2'(x)}$  在  $(a, b)$  上单调递减, 有

$$M \in \left( -\infty, \lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} \right].$$

## 基金项目

广东省基础与应用基础研究基金: No. 2022A1515110967; 深圳职业技术大学配套项目: No. 6024310047K。

## 参考文献

- [1] 蒋依格, 马绍文. 2023 年全国高考数学甲卷理科导数题解法探究[J]. 数理化解题研究, 2023(34): 73-75.
- [2] 数学分析[M]. 华东师范大学数学系, 编. 北京: 高等教育出版社, 2001.
- [3] 许绍元, 钟争艳. 关于极限的保号性与保不等式性的注记[J]. 赣南师范学院学报, 2011, 32(3): 7-9.
- [4] 裘松良. 单调性 L'Hospital 法则及其应用[J]. 杭州电子工业学院学报, 1995(4): 23-30.
- [5] 韩淑霞, 王德荣, 黄永忠. 单调性 L'Hospital 法则的扩展及应用[J]. 大学数学, 2019(35): 94-99.