Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(1), 76-85
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.161010

Hans汉斯

关于极限概念的学习

刘　玲

北京信息科技大学理学院，北京

收稿日期：2025年11月10日；录用日期：2025年12月14日；发布日期：2026年1月19日

摘　要

通过“溯源”，建立对抽象的数学概念——极限的直观理解和逻辑认知，从而更好地理解微积分的基石——极限理论。从三个物理与几何背景问题出发，深入浅出地剖析了数列极限严谨定义的由来，极限概念的特性、几何解释等，并进一步推广到了对函数极限概念的理解和相关应用中。

关键词

数列，函数，近似，无限，极限

On Learning of the Concept of Limit

Ling Liu

College of Applied Science, Beijing Information Science and Technology University, Beijing

Received: November 10, 2025; accepted: December 14, 2025; published: January 19, 2026

Abstract

Through tracing the origin, one can develop an intuitive grasp and logical comprehension of the abstract concept of limit, laying a solid foundation for mastering calculus. The paper starts from three problems in physical and geometric backgrounds. It makes an in-depth yet accessible analysis of the origin of the rigorous definition of the limit of a sequence, the characteristics of limit, its geometric interpretation, and so on. Moreover, it further extends these analyses to the understanding of the concept of the limit of a function and relevant applications.

Keywords

Sequence of Numbers, Function, Approximate, Infinity, Limit

文章引用: 刘玲. 关于极限概念的学习[J]. 理论数学, 2026, 16(1): 76-85.
DOI: 10.12677/pm.2026.161010

1. 引言

极限理论是微积分学的基石。它给出了微积分的概念，涵括了微积分学研究的对象，以及用相应的数学语言描述问题、解决问题的基本方法等诸多内容。

“数学是用来书写宇宙的文字。”对于初学者而言，数学是抽象难懂的，其“难”首先表现在语言不通，面对众多数学符号而不知所措。伽利略说：“哲学(自然)是写在那本永远在我们眼前的伟大书本里的(我指的是宇宙)。但是，我们如果不先学会书里所用的语言，掌握书里的符号，就不能了解它。这书是用数学语言写出来的，符号是三角形、圆形和别的几何图形。没有它们的帮助，是连一个字也不会认识的；没有它们，人就在一个黑暗的迷宫里劳而无功地游荡着。”

只有掌握了数学语言——读懂数学符号，才能理解抽象的数学；才能主动学习；才能具备持续学习的能力；才能用数学去研究问题、解决问题。

极限概念的学习是微积分学习的开始，它所使用的语言和研究问题的方法将贯穿微积分始终。因此，学好极限理论是非常重要的[1]。细致剖析并理解极限概念的内涵，才能为后续的理论学习奠定坚实的基础。

在学习一个概念时要注意：概念是怎么引入的，它的实际背景是什么；知道了“源”，也就对“流”有了一个大致的了解。

极限学习的核心难点在于“无限趋近”的抽象性与“$\varepsilon-N/\varepsilon-\delta$”定义的形式化表达之间的矛盾——学生往往依赖“直观感受”(如“n 越来越大，a_n 越来越近 A”)，难以理解定义中“任意 ε 存在 N/δ”的量化逻辑。研究表明，多数初学者仅停留在“过程性理解”，难以上升到“对象性理解”[1] [2]，这也是学生无法灵活运用极限定义、难以证明极限性质的核心原因。近年来，VR 技术开始应用于极限教学，学生可“沉浸式”观察“无限趋近”过程(如在虚拟空间中观察数列项逐步靠近极限值)，突破传统可视化的二维局限[3]。“差异化教学”的研究[4]指出，不同认知风格的学生(如视觉型、逻辑型)对极限教学方法的适应性不同——未来教学可结合可视化工具(适配视觉型)与逻辑推导(适配逻辑型)，实现个性化教学。结合我国学生“擅长计算但弱于逻辑”的认知特点[5]，弥补了多数研究对“计算型学生”的关注不足，更贴合国内教学实际。

本文从三个背景问题的分析、解决方案等入手，逐步引出数列以及数列极限的概念和严格的定义；进一步分析数列极限概念的可分辨特性和几何意义，数列极限的性质等。该部分内容由浅入深层层剖析，语言通俗易懂，辅助例子锦上添花，为学习微积分伊始即面临的第一个抽象且难懂的概念——极限的学习扫除障碍。

2. 数列极限的概念

2.1. 数列极限的概念

背景问题 1：变速直线运动物体的瞬时速度求法。

做直线运动的物体，设其运动方程为 $s=s(t)$，如何计算物体在给定时刻 t_0 的瞬时速度 v_0？

问题讨论：先从简单情形入手。

当物体以均匀的速度 v 作直线运动时，$s(t)=vt+c$，其中 c 为初始位移。这种情形下物体在每一时

刻的速度是不变的，故有 $v_0 = v$。设时间间隔为 Δt，我们可以用求平均速度 $\overline{v}$ 的公式

$$v_0 = v = \overline{v} = \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

其中 $\Delta s = s(t+\Delta t) - s(t)$，来求出 v_0。

一般情形：当物体作非匀速直线运动时，问题在于：运动的物体在每一时刻的速度都是不一样的，也就不能用上面的平均速度来作为瞬时速度了。

解决方案：既然 v_0 的精确值不易求得，退一步而求其次，先找一个 v_0 的近似值，然后再让近似值逐渐逼近精确值。

具体做法：先建立一个时间间隔序列 $\{\Delta t_n\}$，写出相对应的平均速度序列 $\{\overline{v}_n\}$。易见当 $\Delta t_n \to 0$ 时，$\overline{v}_n \to v_0$，我们可以通过观察 $\{\overline{v}_n\}$ 的变化趋势求出 v_0 或对 v_0 有一个较为精确的估计。这种思想是后面要学习的导数和微分定义的几何体现之一。

背景问题 2：不规则平面图形(曲边梯形) (图 1)的面积求法。

问题讨论：对于规则的图形，比如矩形、三角形、梯形等，已经有了计算其面积的公式。这些图形的共同特点是每一条边都是直边，而曲边梯形有一条边是曲线段，设其方程为非负、连续的函数 $y = f(x)$。曲线 $y = f(x)$ 与直线 $x = a, x = b$ 及 x 轴围成的曲边梯形(如图 1)面积不能再直接用矩形面积公式来计算了，因为在底边上不同的 x 点处，对应的高 $f(x)$ 是曲线变化的。

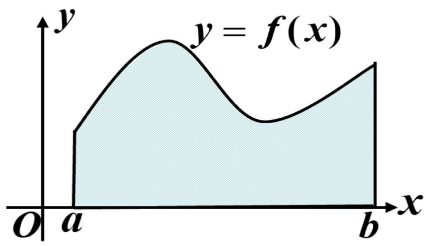

Figure 1. Curved trapezoid
图 1. 曲边梯形

解决方案：考虑先将区间 $[a,b]$ 上的整体问题(曲边梯形的面积)分割成小区间上的局部问题(一个个窄曲边梯形的面积)；在小范围内作近似，用以小区间上某点的函数值 $f(x)$ 为高的窄矩形面积代替对应小区间上窄曲边梯形的面积(图 2)，这种以直代曲的近似是合理的，原因是在小范围内连续函数 $y = f(x)$ 的函数值变化不大；再以这些窄矩形面积之和作为整体面积的近似值(从局部到整体)，并把区间 $[a,b]$ 无限细分下去，也使得每个小区间的长度都趋于零，这时所有窄矩形面积之和的极限值就是要求的曲边梯形的面积。

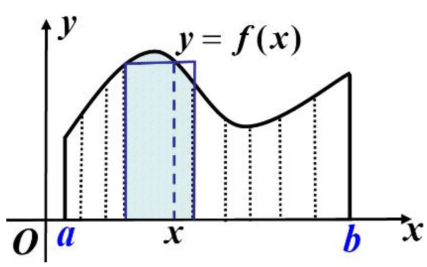

Figure 2. Segmentation of a curved trapezoid
图 2. 曲边梯形的分割

这种“化整为零(分) $\to$ 局部近似(匀) $\to$ 积零为整(合) $\to$ 取极限得精确值(精)”的思想正是后面要学习的定积分定义的几何体现之一。

背景问题 3：数值 π 的求法。

人们在生产实践中发现了圆的面积与其半径之间的关系 $A=\pi R^2$。为了对 π 的值做出精确的估计，中国魏晋时代的数学家刘徽，采用“割圆术”计算 π。他的想法是，单位圆的面积就是 π 的值。具体做法如下：

如果用 A_n 表示单位圆内接正 n 边形的面积，刘徽得到了一串数：

$$A_6, A_{12}, A_{24}, \cdots, A_N。$$

这是一串逐渐逼近 π 的数，当然，N 是多少我们不得而知。刘徽的最终结论是：π 在 3.1415926 到 3.1415927 之间，这是一个精度较高的，了不起的成果。

“割之弥细所失弥少割之又割以致不可割则与圆合体而无所失。”在刘徽这句话中，“割之又割以致不可割”合理但不准确，理论上，“割”是永远可割的，也就是说：由“割圆术”得到的不只是有限个 π 的近似值

$$A_6, A_{12}, A_{24}, \cdots, A_N,$$

而是可以得到无限个 π 的近似值

$$A_6, A_{12}, A_{24}, \cdots, A_N, \cdots,$$

而且它们一个比一个更靠近 π。这是一个由近似值逼近精确值的无限的过程。

古人对“无限过程”早有认识，例如，庄子曰：“一尺之锤日取其半万世不竭。”这句话的数量可描述为一列数：

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots。$$

而这样的无限过程也正是极限的本质，后续发展为对所得一列数取极限即可达到我们想要的效果。

上述三个背景问题，虽然属于不同的几何问题和物理问题，但它们解决问题的方法有着共同的数量特征：观察一串数的变化趋势。

数学是抽象的。数学的抽象体现在它撇开了事务具体的几何与物理意义，而仅仅保留它们所具有的共同的数量特征。数学之所以有着广泛的应用性也就在于此。

为了研究“无限的变化过程”，引入其数学描述，即数列的概念[2]，也即按一定顺序排列起来的一串数。有限个数有序排列称为有限数列；无穷多个数的有序排列称为无穷数列：$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，记为 $\{a_n\}$。这里研究的数列都是无穷数列，简称数列。

由数列 $\{a_n\}$ 中任意选出无穷多个数，并按原有次序排列所构成的数列，称为数列 $\{a_n\}$ 的一个子列。易见数列 $\{a_n\}$ 有无穷多个子列。给出一个自然数列 $\{n\}$ 的子列 $\{k_n\}$，就对应有一个数列 $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{k_n}\}$；反之亦然。

数列的通项 a_n 是一个定义在自然数集合上的整标函数，自变量为自然数 n。设函数 $f(x), x\in(0,+\infty)$，当自变量 x 依次取 $1,2,\cdots,n,\cdots$ 时，对应地就得到一个数列 $\{a_n\}$，其中 $a_n=f(n)$。

整标函数也是函数，照搬有关函数的有界性、单调性等定义，就可以讨论数列的有界性、单调性等。

例如：自然数列 $\{n\}$：$1,2,\cdots,n,\cdots$ 的一个子列 $\{k_n\}$：$k_1, k_2, \cdots, k_n, \cdots$ 就是一个单调递增的数列，并且无上界。

数列 $\{a_n\}$ 是一个无限变化过程的数学描述。

2.2. 逼近法

从上面三个实际问题的解决方案中，我们看到，它们在思想方法上是相同的，即：

在求一个不易求得的精确值 A 时，退一步而求其次，先求它的近似值 a_n，并建立一个由近似值到精确值的无限逼近过程 $\{a_n\}$，然后通过观察 $\{a_n\}$ 的变化趋势，得出 A 的一个符合精度要求的良好的近似值 a_N，甚至求出精确值 A。这一方法我们称为逼近法。

逼近法是微积分学处理问题的基本方法。

2.3. 数列极限的概念

在使用逼近法解决上述几何与物理问题时，它们所表现出来的共同的数量特征是：观察数列 $\{a_n\}$ (近似值序列)，当 n 逐渐增大(用 $n\to\infty$ 表示)时的变化趋势，看 a_n (近似值)是否在靠近某一个确定的数值 A (精确值)。如果是，我们称数值 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。

将数列看成整标函数后，我们可以将数列极限研究的内容解释为：在观察当自变量 $n\to\infty$ 时，对应的函数值 $f(n)$ 的变化趋势。如果当自变量 $n\to\infty$ 时，函数值 $f(n)$ 无限“逼近”(或者：“靠近”)一个常数 A，那么就称这个常数 A 是数列 $\{f(n)\}$ 的极限，记为：$\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = A$。

数列 $\{a_n\}$ 是一个无限变化过程的数学描述，而数列 $\{a_n\}$ 的极限就是这个无限变化过程趋势的数学描述。极限概念的引入在无限和有限之间架起了一座桥梁，使人们可以对“无限的变化过程”进行描述和研究。

总之，极限是一个数，它描述了一个无限变化过程的变化趋势。

2.4. 数列极限的定义

上面给出了极限的描述性定义，但是它不准确，有模糊的地方。之所以说它“不准确”，是因为“逼近”、“靠近”的概念是模糊的。因此，这个关于极限的描述性定义，不能作为严格逻辑推理论证的依据。

“没有定量分析的科学，不是真正的科学。”数列极限描述性定义缺少对“逼近”或“靠近”的精确“定量”描述。为了深入地研究极限理论，还必须给出精确的极限定义。为此，首先观察无限“逼近”或“靠近”应当具备什么性质；然后再看如何给出这些性质的准确的“定量”描述。通过考察上面三个背景问题可知，我们所需要的“逼近”或“靠近”，应当具备以下两个性质，即：

(1) 靠近的任意性：随着逼近过程的延续(用 $n\to\infty$ 来描述)，近似值 a_n 与精确值 A 的绝对误差在缩小，并且可以任意小。这一性质可以精确地定量描述为：对事先给定的任意的精度要求 $\varepsilon>0$，总可以找到一个自然数 N，使 $|a_N - A|<\varepsilon$ 成立(只要 N 足够大)。

(2) 靠近的可控制性：随着逼近过程的延续(即 $n\to\infty$ 时)，对事先给定的任意的精度要求 $\varepsilon>0$，不但存在使 $|a_N - A|<\varepsilon$ 成立的自然数 N，并且从此以后，近似值与精确值的绝对误差不会再增大了，也即第 N 项以后的所有项 a_n 都有 $|a_n - A|<\varepsilon$ 成立。这一性质的精确定量描述为：当 $n>N$ 时，恒有 $|a_n - A|<\varepsilon$ 成立。有了对“逼近”或“靠近”准确的定量描述，也就明确了我们这里所说的“逼近”或“靠近”的准确含义，从而有了下面数列极限的(“$\varepsilon - N$”)定义：

定义 1 [6]设 $\{a_n\}$ 是一个数列，A 是一个数，如果对任意给定的(任意小的)正数 ε，总存在自然数 N，当 $n>N$ 时，恒有 $|a_n - A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为数列 $\{a_n\}$ 的极限，记为：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$。这时也说数列 $\{a_n\}$ 是收敛的，称不收敛的数列 $\{a_n\}$ 是发散的。

定义是对研究对象可分辨特征的描述，具有定义中描述的“可分辨特征”的对象就是收敛的；否则就不是。定义中描述的“可分辨特征”是判定“是”与“不是”的依据。

有了数列极限的定义，我们可以利用它来判定(证明)一个数 A 是否为数列 $\{a_n\}$ 的极限。判定(证明)的要点是：对任意给定的(任意小的)正数 ε，能否找到(或说明)满足条件“当 $n>N$ 时，恒有 $|a_n-A|<\varepsilon$ 成立”的那个自然数 N 存在。如果存在，数 A 是数列 $\{a_n\}$ 的极限；如果不存在，数 A 就不是数列 $\{a_n\}$ 的极限；并且，在寻找 N 的过程中，ε 当成常数对待。

例 1 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{2n}=\dfrac{1}{2}$。

证明 对任意给定的(任意小的)正数 ε，要使 $\left|\dfrac{n-1}{2n}-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2n}<\varepsilon$ 成立，只需 $n>\dfrac{1}{2\varepsilon}$ 即可。可见，若取 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$，其中 $\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$ 表示不超过 $\dfrac{1}{2\varepsilon}$ 的最大整数，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{n-1}{2n}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 成立，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{2n}=\dfrac{1}{2}$。

在使用“$\varepsilon-N$”定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 时，核心步骤是从解不等式 $|a_n-A|<\varepsilon$ 出发，找到满足条件的 N，而这样的 N 只要存在即不唯一，比如在例 1 中，取 N 为大于 $\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$ 的自然数均可。因此，为了求解方便，可以先将 $|a_n-A|<\varepsilon$ 适当放大以后再让其小于给定的任意小正数 ε，下面的例 2 即是如此。

例 2 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+3}{2n^2+5n+6}=\dfrac{1}{2}$。

证明 对任意给定的(任意小的)正数 ε，要使 $\left|\dfrac{n^2+n+3}{2n^2+5n+6}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 成立，因为

$$\left|\frac{n^2+n-3}{2n^2+5n+6}-\frac{1}{2}\right|=\frac{3n}{2\left(2n^2+5n+6\right)}<\frac{4n}{4n^2}=\frac{1}{n},$$

所有，只须 $\dfrac{1}{n}<\varepsilon$，也即 $n>\dfrac{1}{\varepsilon}$ 即可。可见，取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，则当 $n>N$ 时，恒有 $\left|\dfrac{n^2+n+3}{2n^2+5n+6}-\dfrac{1}{2}\right|<\varepsilon$ 成立，故有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2+n+3}{2n^2+5n+6}=\dfrac{1}{2}$。

当数列的 $|a_n-A|$ 形式复杂(如分式、根式、含多项式的分式等)时，直接解不等式会很困难，甚至无法解出明确的 $n>g(\varepsilon)$。将 $|a_n-A|$ 适当放大的目的是“化繁为简”——通过合理的不等式变形，将复杂的 $|a_n-A|$ 转化为“易解、仅含 n 的简单表达式”，而且这时不等式是可以传递的，从而可以快速找到 N，且保证“好解的不等式成立时，原不等式一定成立”。另外，N 是正整数，若化简后得到的 $g(\varepsilon)$ 是小数，可向上取整得到 N。

上述两道例题在解题思路上是一致的，都在寻找(或说明)那个“符合条件的 N”的存在；但在寻找(或说明)的技巧与结果上略有不同。例 1 中找到的 $N=\left[\dfrac{1}{2\varepsilon}\right]$，是“符合条件的 N”中最小的一个；而例 2 中找到的 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]$，不一定是“符合条件的 N”中最小的一个，原因在于：在寻找 N 的过程中，运用了“放大”的技巧。例 2 说明：我们只需在无穷多个“符合条件的 N”中找出一个，或说明“符合条件的 N”存在就可以了，而不一定非要找最小的那一个。

这种“只要说明存在就行”的更深层的理由是：数列 $\{a_n\}$ 是一个无限变化过程的数学描述；数列极限研究的是这个无限变化过程的变化趋势。我们研究的是一个无限的变化过程，对有限项的变化不感兴趣。这层含义在下列定理中表述的更加清晰。

定理 1 改变数列的有限项，不改变数列的敛散性；对收敛数列而言，改变数列的有限项，不改变数列的极限值。

改变数列的有限项，包括去掉、增加有限项，或者改变有限项的值[6]。

2.5. 数列极限的几何解释

对抽象数学概念的理解，常常需要变化一下看待问题的视角。概念的几何解释，为我们提供了一个看得见摸得着的模型。它可以帮助我们思考、发现概念深刻的内涵和广泛的外延。

根据数列极限的定义，当 $n > N$ 时，恒有 $|a_n - A| < \varepsilon$ 成立，等价于对应于 $n > N$ 的那些项 a_n 满足

$$\varepsilon - A < a_n < \varepsilon + A,$$

也即 a_n 被夹在 $\varepsilon - A$ 与 $\varepsilon + A$ 之间。于是有：

数列极限的几何意义：对任意给定的(任意小的)正数 ε，都存在自然数 N，当 $n > N$ 时，对应的点 a_n 都落在数轴上数 A 的 ε 邻域中，而在该邻域外最多只有有限项(前 N 项) (图 3)。

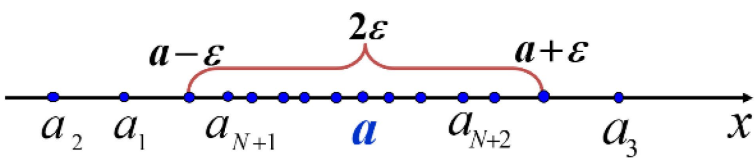

Figure 3. Geometric representation of the limit of a sequence on the number line
图 3. 数列极限几何意义在数轴上的表示

若将数列 $\{a_n\}$ 看成是整标函数 $\{f(n)\}$，则

数列极限的几何意义：对任意给定的(任意小的)正数 ε，都存在自然数 N，当 $n > N$ 时，对应的函数值 $f(n) = a_n$ 都落在以数 A 为中心，2ε 为宽的带形区域内，而在该区域外最多只有有限项(前 N 项) (图 4)。

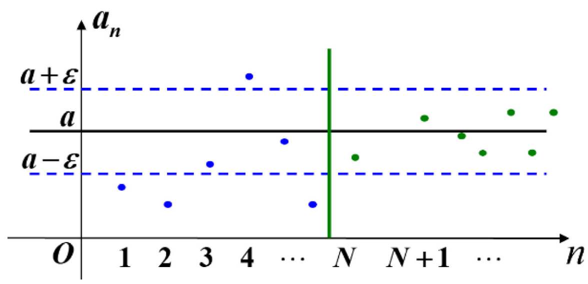

Figure 4. Geometric representation of the limit of a sequence on a plane
图 4. 数列极限几何意义在平面上的表示

相关定理[6]有：

收敛数列的有界性。收敛的数列，其值必在某个有限的范围内，不会无限增大或减小。这由上面数列极限的几何意义显而易见。

有界性是收敛的**必要条件**，而非充分条件——收敛一定有界，但有界不一定收敛。

数列极限的唯一性。对于一个给定的数列，其极限值是唯一的，不会因为不同的计算方法或不同的观察角度而得出不同的极限值。这一点在直观上可以通过数列极限的几何意义看出，也可以根据数列极限的定义利用反证法给出严格的证明。

极限的保号性。对于充分大的 n，对应数列的项的符号与极限的符号相同。这意味着数列的极限值保持了充分靠后的那些数列项的符号特性。同样，根据数列极限的几何意义易得此结论。
保号性的“保号”仅针对“n 足够大时的项”，不包括前 N 项。

这些特性是数列极限理论中的基本性质，它们对于理解和应用数列极限的概念至关重要。唯一性和有界性确保了极限值的确定性和可预测性，而保号性则提供了关于数列项符号的重要信息，这些特性共同构成了数列极限理论的基础。

2.6. 数列极限的再剖析

定理 2 设数列 $\{f(k_n)\}$ 是数列 $\{f(n)\}$ 的任意一个子列，则 $\lim\limits_{n\to\infty} f(n)=A \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} f(k_n)=A$。

该定理说明了什么呢？它是由极限的什么特性反映的呢？

如果将自然数列 $\{n\}$ 的一个子列 $\{k_n\}$ 看成是整标函数 $f(n)$ 自变量的某一种增大方式的数学描述，那么该定理说明：整标函数 $f(n)$ 的极限，与自变量增大的方式无关；反之，如果有关，即设 $\{k_{1,n}\}$ 与 $\{k_{2,n}\}$ 是数列 $\{n\}$ 的两个子列，并有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(k_{1,n})=A_1$，$\lim\limits_{n\to\infty} f(k_{2,n})=A_2$，若 $A_1\neq A_2$，则数列 $\{f(n)\}$ 是发散的。

可见，极限的这个性质无疑也是“靠近的可控制性”的反映。由于它有着较为特殊的意义和广泛的应用，我们将它单独抽象出来加以刻画，作为极限的第三个“可分辨特性”：极限与趋近方式无关性，即数列的极限，与自变量的增大方式无关(若有关则数列是发散的)。

3. 函数的极限

从数列极限到函数极限可以从两个角度入手。一是将数列极限的概念直接推广到更一般的情形。将自变量由特殊的自然数 n 推广到一般的实数 x，自变量的变化方式由 $n\to+\infty$ 推广到自变量 x 的某一变化过程，即可引出函数极限的一般概念。

3.1. 函数极限的定义

在自变量的某个变化过程中，若对应的函数值无限接近于某个确定的数，则称这个确定的数为函数。

在这一变化过程中的极限。另一个角度，整标函数 $f(n)$ 可以看成是函数 $f(x)$ 的子列，利用前面介绍的数列与其任意子列的关系类似可得函数 $f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时的变化趋势如何用极限的语言表达。

对于函数 $f(x)$ 来说，其自变量的变化趋势除了 $x\to+\infty$ 以外，还有更多的情形，比如 $x\to-\infty$，$x\to\infty$ 以及 x 无限接近有限值 x_0，即 $x\to x_0$ 等，只需将刻画无限接近的语言和尺度作对应修正，从而对应讨论函数 $f(x)$ 当 $x\to-\infty, x\to\infty, x\to x_0$ 等时的变化趋势，得到另外几种情形下函数极限的描述性定义。比如，若函数 $f(x)$ 在 $x\to x_0$ 的过程中，对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于确定值 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限。对应于数列极限“$\varepsilon-N$”定义，有以下函数极限的“$\varepsilon-\delta$”定义。

定义 2 [6]设 $f(x)$ 在点的某一去心邻域内有定义。A 是一个数，如果对任意给定的(任意小的)正数 ε，总存在正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限，记为 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

函数极限从“$\varepsilon-N$”到“$\varepsilon-\delta$”的演变，是从“离散变量的无限趋近”拓展到“连续变量的无限趋近”，本质均遵循“任意小误差下的变量控制”思想；数列极限“$\varepsilon-N$”定义的思想本质是：是通过控制离散变量 n 的“足够大”，实现数列值 a_n 与极限 A 的“误差任意小”；而函数极限“$\varepsilon-\delta$”定义的思想本质是通过控制连续变量 x 与 x_0 的“足够近”，实现函数值 $f(x)$ 与极限 A 的“误差任意小”。其中任意小正数 ε 是误差容忍度，正数 δ 是变量控制阈值，当变量满足“足够近”条件 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，误差

满足“任意小”要求。两者均以“ε 的任意性”刻画“误差无限小”，以“N/δ 的存在性”刻画“变量控制的可行性”，是“极限本质是无限趋近”的严格数学表达。其中 N 依赖于 ε ($N=N(\varepsilon)$)，δ 也依赖于 ε ($\delta=\delta(\varepsilon)$)，且均不唯一($\varepsilon$ 固定时，可找到无数个满足条件的 N/δ)。

不等式 $|x-x_0|>0$ 是排除 $x=x_0$，因为极限是函数值的变化趋势，函数在某一点收敛或发散与函数在该点的函数值是否存在以及函数值是多少无关。另外，$x\to x_0$ 包括 x 从小于 x_0 以及大于 x_0 两侧趋近于 x_0 的情形，如果只考虑一侧，则为单侧极限。若 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$，则说明在这两种情形下均有对应函数值 $f(x)$ 无限趋近于同一确定值 A，否则函数在该点处极限不存在，也即发散。

例 3 证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}=1$。

证明 对任意给定的(任意小的)正数 ε，要使 $\left|\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}-1\right|<\varepsilon$ 成立，因为 $\left|\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}-1\right|=\dfrac{|x-1|}{2}$，所以，只要 $|x-1|<2\varepsilon$，也即 $\dfrac{|x-1|}{2}<\varepsilon$ 即可。可见，取 $\delta=2\varepsilon$，则当 $0<|x-1|<\delta$ 时，恒有 $\left|\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}-1\right|<\varepsilon$ 成立，故有 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{2(x-1)}=1$。

说明：用定义证明函数在一点处的极限，只须对于任意小的正数 ε，能够说明 δ 的存在性即可。这里的 δ 刻画的是自变量 x 与固定点 x_0 的靠近程度，通常是将正数 ε 视为常数，通过解不等式 $|f(x)-A|<\varepsilon$ 来找出 $|x-x_0|$ 需要小到什么“程度”，而这里的“程度”即可取为 δ。一般情形下 δ 并不唯一，也无需找出最大的那个 δ。同理，在解不等式的过程中，为了便于计算，也可以适当放大后解出 $0<|x-x_0|<\delta(\varepsilon)$ 中的 $\delta(\varepsilon)$，但要注意放缩必须是“单向放大”(如 $|f(x)-A|<g(|x-x_0|)$)，不能缩小，否则无法保证不等式成立。

函数的极限定义同样具有靠近的任意性、可控性等可分辨特性；而在某一过程中收敛的函数也对应具有局部有界性、极限唯一性及局部保号性等。

3.2. 海涅定理

海涅定理以数列极限为桥梁，建立了“$\varepsilon-N$”与“$\varepsilon-\delta$”两者的逻辑关联。

海涅定理(函数极限的数列化定义) [6]设函数 $f(x)$ 在 x_0 的某去心邻域内有定义，则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 的充要条件是：对任意满足 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=x_0$ 且 $x_n\neq x_0$ 的数列 $\{x_n\}$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$。

海涅定义将“连续变量 $x\to x_0$”的极限问题，转化为“所有满足条件的离散数列 $\{x_n\}$ 对应的函数值数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限问题”，使两种定义的逻辑关联可视化—连续变量的极限本质是“所有相关离散数列极限的一致性”。海涅定义与“$\varepsilon-\delta$”定义互为充要条件，即两者严格等价。但要注意海涅定义的“任意性”，证明函数极限存在时，需保证“所有”满足条件的数列 $\{x_n\}$ 都收敛到 A，不能只取一个数列验证。

基金项目

北京信息科技大学教改项目(2025JGYB39)。

参考文献

[1] Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. and Nichols, D. (1992) Development of the Process Conception of Function. *Educational Studies in Mathematics*, **23**, 247-285. https://doi.org/10.1007/BF02309532

[2] Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J. and Nichols, D. (1992) Development of the Limit Concept: We're Not There

Yet. *Journal for Research in Mathematics Education*, **23**, 288-300.

[3] Weber, K. and Fukawa-Connelly, T. (2023) What Mathematicians Learn from Attending other Mathematicians' Lectures. *Educational Studies in Mathematics*, **112**, 123-139. https://doi.org/10.1007/s10649-022-10177-x

[4] Bressoud, D. (1996) A Radical Approach to Real Analysis. The Mathematical Association of America.

[5] 张奠宙. 中国数学教育的传统与创新[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2020.

[6] 同济大学数学科学学院. 高等数学: 上册(8 版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2023.