

弱Landsberg共形双扭曲积芬斯勒度量

杨蕊嘉, 何 勇*, 侯传燕, 陈静雅

新疆师范大学数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐

收稿日期: 2025年11月12日; 录用日期: 2025年12月15日; 发布日期: 2025年12月23日

摘 要

本文证明了两个非黎曼的芬斯勒度量 F_1 和 F_2 的共形双扭曲积 F 是弱Landsberg度量当且仅当 F_1 和 F_2 均为弱Landsberg度量且 F 为乘积芬斯勒度量, 并证明了若 F 具有相对迷向平均Landsberg曲率, 则其为弱Landsberg度量。

关键词

芬斯勒度量, 共形双扭曲积, 弱Landsberg度量, 相对迷向平均Landsberg曲率

Weak Landsberg Conformally Doubly Warped Product Finsler Metrics

Ruijia Yang, Yong He*, Chuanyan Hou, Jingya Chen

School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi Xinjiang

Received: November 12, 2025; accepted: December 15, 2025; published: December 23, 2025

Abstract

We prove that a Conformally Doubly Warped Product F of two non-Riemannian Finsler metrics F_1 and F_2 is a weak Landsberg metric if and only if both F_1 and F_2 are weak Landsberg metrics and F is a product Finsler metric. Furthermore, we prove that if F has relatively isotropic mean Landsberg curvature, then it is a weak Landsberg metric.

Keywords

Finsler Metric, Conformally Doubly Warped Product, Weak Landsberg Metric, Relatively Isotropic Mean Landsberg Curvature

*通讯作者。

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

在芬斯勒几何中,有许多重要的非黎曼几何量,如嘉当挠率、Landsberg 曲率、平均 Landsberg 曲率、相对迷向 Landsberg 曲率、相对迷向平均 Landsberg 曲率等。1928 年, Berwald [1]利用贝瓦尔德联络定义了 Landsberg 曲率。2001 年, 沈忠民[2]给出了 Landsberg 曲率的另一种定义,即嘉当挠率沿着测地线的变化率, Landsberg 曲率消失的芬斯勒度量被称为 Landsberg 度量。具有 Landsberg 度量的芬斯勒流形被称为 Landsberg 流形, Landsberg 流形在不同点处的切空间相互等距。2004 年, 沈忠民[3]给出了平均 Landsberg 曲率的定义,即平均嘉当挠率沿测地线的变化率,平均 Landsberg 曲率消失的芬斯勒度量被称为弱 Landsberg 度量。弱 Landsberg 度量是 Landsberg 度量的推广,即任何 Landsberg 度量都是弱 Landsberg 度量[3],但是反之不一定成立。2007 年, 李本伶和沈忠民[4]给出了 (α, β) 度量是弱 Landsberg 度量的充要条件,并证明了 $n(n \geq 3)$ 维流形上的度量中存在非 Landsberg 度量的弱 Landsberg。2017 年, Najafi 和 Tayebi [5]证明了具有有界平均嘉当挠率的弱 Stretch 度量是弱 Landsberg 度量。2024 年, Tayebi 和 Najafi [6]证明了一个弱 Landsberg 度量在任意共形变换下仍是弱 Landsberg 度量当且仅当它是一个黎曼度量。

2005 年, 程新跃和沈忠民[7]提出了相对迷向 Landsberg 曲率和相对迷向平均 Landsberg 曲率的概念,它们分别是 Landsberg 曲率和平均 Landsberg 曲率的自然推广。2008 年, 程新跃、王辉和王明风[8]给出了 (α, β) 度量具有相对迷向平均 Landsberg 曲率的微分方程刻画。2014 年, 程新跃、李海霞和邹洋杨[9]证明了具有相对迷向平均 Landsberg 曲率的共形平坦 (α, β) 度量是黎曼度量或局部闵可夫斯基度量。

本文将主要研究由 Soleiman 和 Abdelsalam [10]于 2019 年引入的共形双扭曲积芬斯勒度量。令 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 是两个芬斯勒流形,则在乘积流形 $M = M_1 \times M_2$ 上,称芬斯勒度量

$$F = e^\sigma \sqrt{f_2^2 F_1^2 + f_1^2 F_2^2}$$

为共形双扭曲积芬斯勒度量,其中 f_1, f_2 和 σ 分别是 M_1, M_2 和 M 上的正值光滑函数。显然,共形双扭曲积芬斯勒度量是双扭曲积芬斯勒度量的推广。Soleiman 和 Abdelsalam [10]证明了具有消失贝瓦尔德曲率的共形双扭曲积芬斯勒度量是黎曼度量。2025 年, 加依达尔·里扎别克,何勇和杨蕊嘉等人[11]给出了共形双扭曲积芬斯勒度量是弱贝瓦尔德度量的充要条件,在给定条件下证明了具有迷向平均贝瓦尔德曲率的共形双扭曲积芬斯勒度量是弱贝瓦尔德度量。随后,杨蕊嘉和何勇[12]证明了共形双扭曲积芬斯勒度量 F 局部对偶平坦当且仅当 F_1 和 F_2 均局部对偶平坦且 F 为乘积芬斯勒度量。

2012 年, Peyghan、Tayebi 和 Najafi [13]证明了具有相对迷向 Landsberg 曲率的双扭曲积芬斯勒度量是 Landsberg 度量,在特定条件下给出了双扭曲积芬斯勒度量是弱 Landsberg 度量的充要条件,并且证明了具有相对迷向平均 Landsberg 曲率的双扭曲积芬斯勒度量是弱 Landsberg 度量。

2025 年, 加依达尔·里扎别克[14]证明了具有相对迷向 Landsberg 曲率的共形双扭曲积芬斯勒度量是 Landsberg 度量。基于以上分析,本文将研究共形双扭曲积芬斯勒度量是弱 Landsberg 度量的充要条件,并探究具有相对迷向平均 Landsberg 曲率的共形双扭曲积芬斯勒度量是否为弱 Landsberg 度量,这将是上述关于双扭曲积芬斯勒度量相关研究结果的推广。

2. 预备知识

本节简要回顾本文所需的芬斯勒几何的相关概念，并约定符号。

设 M 是一个 n 维光滑流形， TM 表示 M 的切丛。 M 上的局部坐标为 (x^i) ， TM 上的局部坐标为 (x_i, y_i) 。

定义 1 [15] 流形 M 上的芬斯勒度量是一函数 $F: TM \rightarrow R^+$ ，满足

- (1) F 在 $\tilde{M} = TM \setminus \{0\}$ 上是光滑函数；
- (2) $\forall \lambda \in R^+$ ，有 $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y)$ ；
- (3) $n \times n$ 阶海森矩阵

$$(G_{\alpha\beta}) = \left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 F^2}{\partial y^\alpha \partial y^\beta} \right)$$

在 $\tilde{M}$ 上是正定矩阵。

定义 2 [2] 芬斯勒度量 F 的嘉当挠率 $C: T_x M \otimes T_x M \otimes T_x M \rightarrow R$ 定义为

$$C = C_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma,$$

其中 $C_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} \frac{\partial G_{\alpha\beta}}{\partial y^\gamma}$ 。

若 $C_{\alpha\beta\gamma} = 0$ ，则称芬斯勒度量 F 为黎曼度量。

定义 3 [2] 芬斯勒度量 F 的平均嘉当挠率 $I: T_x M \rightarrow R$ 定义为

$$I = I_\alpha dx^\alpha,$$

其中 $I_\alpha = C_{\alpha\beta\gamma} G^{\beta\gamma}$ 。

定义 4 [2] 芬斯勒度量 F 的 Landsberg 曲率 $L: T_x M \otimes T_x M \otimes T_x M \rightarrow R$ 定义为

$$L = L_{\alpha\beta\gamma} dx^\alpha \otimes dx^\beta \otimes dx^\gamma,$$

其中 $L_{\alpha\beta\gamma} = -\frac{1}{2} y_\lambda B_{\alpha\beta\gamma}^\lambda$ 。

若 $L_{\alpha\beta\gamma} = 0$ ，则称芬斯勒度量 F 为 Landsberg 度量。

定义 5 [2] 芬斯勒度量 F 的平均 Landsberg 曲率 $J: T_x M \rightarrow R$ 定义为

$$J = J_\alpha dx^\alpha,$$

其中

$$J_\alpha = L_{\alpha\beta\gamma} G^{\beta\gamma}. \quad (1)$$

若 $J_\alpha = 0$ ，则称芬斯勒度量 F 为弱 Landsberg 度量。

定义 6 [7] 设 F 是一个芬斯勒度量，若流形 M 上存在标量函数 $c(x)$ ，使得

$$J_\alpha + c(x) F I_\alpha = 0, \quad (2)$$

则称 F 具有相对迷向平均 Landsberg 曲率。

设 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 分别是 m 维和 n 维芬斯勒流形， M_1 和 M_2 上的局部坐标分别为 (x^i) 和 $(x^{i'})$ 。 TM_1 和 TM_2 上的局部坐标分别为 (x^i, y^i) 和 $(x^{i'}, y^{i'})$ 。 $M = M_1 \times M_2$ 是一个 $m+n$ 维芬斯勒流形。设映射 $\pi_1: M \rightarrow M_1$ 和 $\pi_2: M \rightarrow M_2$ 表示自然投影，设 $d\pi_1: TM \rightarrow TM_1$ 和 $d\pi_2: TM \rightarrow TM_2$ 分别表示由 π_1 和 π_2 诱导的切映射。记 $\tilde{M}_1 = TM_1 \setminus \{0\}$ ， $\tilde{M}_2 = TM_2 \setminus \{0\}$ ， $\tilde{M} = \tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2 \subset TM \setminus \{0\}$ 。

本文对指标的约定如下: $1 \leq i, j, k, l, p, q, \dots \leq m$; $m+1 \leq i', j', k', l', p', \dots \leq m+n$;
 $1 \leq \alpha, \beta, \gamma, \dots \leq m+n$ 。

定义 7 [10] 设 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 是两个芬斯勒流形, $f_1: M_1 \rightarrow R^+$ 和 $f_2: M_2 \rightarrow R^+$ 是两个光滑函数, $\sigma: M = M_1 \times M_2 \rightarrow R^+$ 是一个光滑函数。芬斯勒度量 F_1 和 F_2 的共形双扭曲积是在乘积流形上 M 赋予的具有如下形式的芬斯勒度量 $F: \tilde{M} \rightarrow R^+$

$$F(x, y) = e^{\sigma(\pi_1(x), \pi_2(x))} \sqrt{f_2^2(\pi_2(x)) F_1^2(\pi_1(x), d\pi_1(y)) + f_1^2(\pi_1(x)) F_2^2(\pi_2(x), d\pi_2(y))}, \quad (3)$$

其中 $x \in M$, $y \in \tilde{M}$, f_1 和 f_2 被称为扭曲函数, σ 被称为共形因子。常简称 F 为共形双扭曲积芬斯勒度量。称 (M, F) 是 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 关于扭曲函数的共形双扭曲积芬斯勒流形。

当 σ 是常数, 且 f_1 与 f_2 均不为常数时, F 是双扭曲积芬斯勒度量; 当 σ 是常数, 且 f_1 与 f_2 均为常数时, F 是乘积芬斯勒度量; 当 σ 不是常数, 且 f_1 为常数与 f_2 为常数有且仅有一个成立时, F 是共形扭曲积芬斯勒度量; 当 σ 不是常数, 且 f_1 与 f_2 均为常数时, F 是共形乘积芬斯勒度量。因此, 共形双扭曲积芬斯勒度量是以上四种情形的推广。

设 $g_{ij} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1^2}{\partial y^i \partial y^j}$, $h_{i'j'} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_2^2}{\partial y^{i'} \partial y^{j'}}$, 那么共形双扭曲积芬斯勒度量的基本张量矩阵 $(G_{\alpha\beta})$ 为[10]

$$(G_{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} G_{ij} & G_{ij'} \\ G_{i'j} & G_{i'j'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{2\sigma} f_2^2 g_{ij} & 0 \\ 0 & e^{2\sigma} f_1^2 h_{i'j'} \end{pmatrix},$$

其逆矩阵 $(G^{\beta\alpha})$ 为[10]

$$(G^{\beta\alpha}) = \begin{pmatrix} G^{ji} & G^{ji'} \\ G^{j'i} & G^{j'i'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-2\sigma} f_2^{-2} g^{ji} & 0 \\ 0 & e^{-2\sigma} f_1^{-2} h^{j'i'} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

设 F 是芬斯勒度量 F_1 和 F_2 的共形双扭曲积, 根据芬斯勒度量 F_1 , F_2 和 F 的正一次齐次性及欧拉定理, 易得

$$\frac{\partial F_1^2}{\partial y^i} y^i = 2F_1^2, \quad \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{p'}} y^{p'} = 2F_2^2, \quad (5)$$

$$\frac{\partial g^{lp}}{\partial y^k} y^k = 0, \quad \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} y^j = -\frac{\partial g^{lp}}{\partial y^k}, \quad \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} y^i = -2 \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j}, \quad (6)$$

$$\frac{\partial h^{l'p'}}{\partial y^{k'}} y^{k'} = 0, \quad \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} y^{j'} = -\frac{\partial h^{l'p'}}{\partial y^{k'}}, \quad \frac{\partial^3 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'} \partial y^{i'}} y^{i'} = -2 \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}}, \quad (7)$$

$$y^\alpha y_\alpha = F^2,$$

其中 $y_\alpha = g_{\alpha\beta} y^\beta$ 。

3. 弱 Landsberg 共形双扭曲积芬斯勒度量

本节将探索两个非黎曼的芬斯勒度量的共形双扭曲积是弱 Landsberg 度量的充要条件。首先回顾如下命题:

命题 1 [14] 设 F 是芬斯勒度量 F_1 和 F_2 的共形双扭曲积, 则 F 的 Landsberg 曲率系数 $L_{\alpha\beta\gamma}$ 为

$$\begin{aligned} L_{ijk} = & L_{ijk}^1 + \frac{1}{8} f_2^{-2} F_2^2 \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} y_l M_p + \frac{1}{8} \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} y_l \left(F_1^2 \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} + \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^i} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^j} \right. \\ & + \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^i} + \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^j \partial y^i} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^k} + 2 \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^i} g_{jk} + 2 \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^k} g_{ij} + 2 \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^j} g_{ik} \Bigg) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} C_{ijk} y^p + \frac{1}{2} f_1^{-2} C_{ijk} y^{p'} N_{p'}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$L_{i'jk} = L_{ji'k} = L_{kji'} = \frac{1}{8} f_2^{-2} \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{i'}} \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} y_l M_p + \frac{1}{4} f_1^{-2} \frac{\partial h^{l'p'}}{\partial y^{i'}} g_{jk} y_{l'} N_{p'}, \quad (9)$$

$$L_{i'j'k} = L_{i'kj'} = L_{ki'j'} = \frac{1}{8} f_1^{-2} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^k} \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^j \partial y^{i'}} y_{l'} N_{p'} + \frac{1}{4} f_2^{-2} \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^k} h_{j'i'} y_l M_p, \quad (10)$$

$$\begin{aligned} L_{i'j'k'} = & L_{i'j'k'}^2 + \frac{1}{8} f_1^{-2} F_1^2 \frac{\partial^3 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'} \partial y^{i'}} y_{l'} N_{p'} + \frac{1}{8} \frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}} y_{l'} \left(F_2^2 \frac{\partial^3 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'} \partial y^{i'}} + \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{i'}} \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{j'}} \right. \\ & + \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{i'}} + \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^{j'} \partial y^{i'}} \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{k'}} + 2 \frac{\partial h^{l'p'}}{\partial y^{i'}} h_{j'k'} + 2 \frac{\partial h^{l'p'}}{\partial y^{k'}} h_{i'j'} + 2 \frac{\partial h^{l'p'}}{\partial y^{j'}} h_{i'k'} \Bigg) \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}} C_{i'j'k'} y^{p'} + \frac{1}{2} f_2^{-2} C_{i'j'k'} y^p M_p. \end{aligned} \quad (11)$$

其中

$$M_p = \frac{\partial f_1^2}{\partial x^p} + \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} f_1^2, \quad (12)$$

$$N_{p'} = \frac{\partial f_2^2}{\partial x^{p'}} + \frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}} f_2^2. \quad (13)$$

命题 2 设 F 是芬斯勒度量 F_1 和 F_2 的共形双扭曲积, 则 F 的平均 Landsberg 曲率系数 J_α 为

$$\begin{aligned} J_i = & J_i^1 + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} f_2^{-4} F_2^2 \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} g^{jk} y_l M_p + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} f_2^{-2} y_l \left(F_1^2 \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} g^{jk} \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} y_i + 2m \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^i} \Bigg) + \frac{1}{2} e^{-2\sigma} f_2^{-2} C_{ijk} g^{jk} \left(f_1^{-2} y^{p'} N_{p'} + \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} y^p \right) \\ & + \frac{n}{4} e^{-2\sigma} f_1^{-2} f_2^{-2} \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^i} y_l M_p + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} f_1^{-4} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^i} \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} y_{l'} N_{p'}, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} J_{i'} = & J_{i'}^2 + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} f_1^{-4} F_1^2 \frac{\partial^3 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'} \partial y^{i'}} h^{j'k'} y_{l'} N_{p'} + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}} f_1^{-2} y_{l'} \left(F_2^2 \frac{\partial^3 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'} \partial y^{i'}} h^{j'k'} \right. \\ & + 2 \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} y_{i'} + 2n \frac{\partial h^{l'p'}}{\partial y^{i'}} \Bigg) + \frac{1}{2} e^{-2\sigma} f_1^{-2} C_{i'j'k'} h^{j'k'} \left(f_2^{-2} y^p M_p + \frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}} y^{p'} \right) \\ & + \frac{m}{4} e^{-2\sigma} f_1^{-2} f_2^{-2} \frac{\partial h^{l'p'}}{\partial y^{i'}} y_{l'} N_{p'} + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} f_2^{-4} \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{i'}} \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} y_l M_p. \end{aligned} \quad (15)$$

证明 令(1)中 $\alpha = i$, 则有

$$J_i = L_{ijk} G^{jk} + L_{ij'k} G^{j'k} + L_{ijk'} G^{jk'} + L_{ij'k'} G^{j'k'}. \quad (16)$$

将(4)、(8)和(10)代入(16)，易得

$$\begin{aligned}
 J_i = & L_{ijk}^1 e^{-2\sigma} f_2^{-2} g^{jk} + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} f_2^{-2} g^{jk} f_2^{-2} F_2^2 \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} y_l M_p \\
 & + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} f_2^{-2} g^{jk} \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} y_l \left(F_1^2 \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} + \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^i} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^j} + \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^i} \right. \\
 & + \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^j \partial y^i} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^k} + 2 \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^i} g_{jk} + 2 \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^k} g_{ij} + 2 \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^j} g_{ik} + \frac{1}{2} e^{-2\sigma} f_2^{-2} g^{jk} \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} C_{ijk} y^p \\
 & + \frac{1}{2} e^{-2\sigma} f_2^{-2} g^{jk} f_1^{-2} C_{ijk} y^{p'} N_{p'} + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} f_1^{-2} h^{j'k'} f_1^{-2} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^i} \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} y_l N_{p'} \\
 & \left. + \frac{1}{2} e^{-2\sigma} f_1^{-2} h^{j'k'} f_2^{-2} \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^i} h_{k'j'} y_l M_p \right) \quad (17)
 \end{aligned}$$

注意到 $g^{jk} g_{ij} = \delta_i^k$, $g^{jk} g_{jk} = m$, $h^{k'j'} h_{j'k'} = n$, $\frac{\partial F_1^2}{\partial y^i} = 2g_{iq} y^q$, 并将(6)的第二个等式代入(17)化简即可

得(14)。同理可证(15)成立。

定理 1 设 F 是非黎曼芬斯勒度量 F_1 与 F_2 的共形双扭曲积, F 是弱 Landsberg 度量当且仅当 F_1 和 F_2 均为弱 Landsberg 度量且 F 为乘积芬斯勒度量。

证明 F 是弱 Landsberg 度量当且仅当

$$J_\alpha = 0.$$

根据命题 2, 上式等价于

$$\begin{cases}
 J_i + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} f_2^{-4} F_2^2 \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} g^{jk} y_l M_p + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} f_2^{-2} y_l \left(F_1^2 \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} g^{jk} \right. \\
 \left. + 2 \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} y_i + 2m \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^i} \right) + \frac{1}{2} e^{-2\sigma} f_2^{-2} C_{ijk} g^{jk} \left(f_1^{-2} y^{p'} N_{p'} + \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} y^p \right) \\
 \left. + \frac{n}{4} e^{-2\sigma} f_1^{-2} f_2^{-2} \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^i} y_l M_p + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} f_1^{-4} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^i} \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} y_l N_{p'} = 0, \right. \\
 J_{i'} + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} f_1^{-4} F_1^2 \frac{\partial^3 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'} \partial y^{i'}} h^{j'k'} y_l N_{p'} + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}} f_1^{-2} y_{l'} \left(F_2^2 \frac{\partial^3 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'} \partial y^{i'}} h^{j'k'} \right. \\
 \left. + 2 \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} y_{i'} + 2n \frac{\partial h^{l'p'}}{\partial y^{i'}} \right) + \frac{1}{2} e^{-2\sigma} f_1^{-2} C_{i'j'k'} h^{j'k'} \left(f_2^{-2} y^{p'} M_p + \frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}} y^{p'} \right) \\
 \left. + \frac{m}{4} e^{-2\sigma} f_1^{-2} f_2^{-2} \frac{\partial h^{l'p'}}{\partial y^{i'}} y_{l'} N_{p'} + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} f_2^{-4} \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{i'}} \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} y_l M_p = 0. \right.
 \end{cases} \quad (18)$$

下面分三步证明必要性。

第一步：用张量缩并技巧分析讨论方程(18)和(19)。首先(18)两边同时与 y^i 缩并，再将(6)的第二个等式和第三个等式代入，并注意到 $J_i y^i = 0$, $C_{ijk} y^i = 0$, $y^i y_i = F_1^2$, 则有

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{4} e^{-2\sigma} f_2^{-4} F_2^2 \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} y_l M_p + \frac{1}{8} e^{-2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} f_2^{-2} y_l \left(-2F_1^2 \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} \right. \\
 & \left. + 2 \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} F_1^2 \right) + \frac{1}{4} e^{-2\sigma} f_1^{-4} F_1^2 \frac{\partial^2 h^{l'p'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} y_{l'} N_{p'} = 0,
 \end{aligned}$$

由于 $e^{-2\sigma} \neq 0$ ，并注意到 $-2F_1^2 \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} + 2 \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} F_1^2 = 0$ ，上式经化简整理易得

$$-f_2^{-4} F_2^2 \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} y_l M_p + f_1^{-4} F_1^2 \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} y_{l'} N_{p'} = 0, \quad (20)$$

(20)两边同时与 y^j 缩并，再将(6)的第二个等式代入，可得

$$f_2^{-4} F_2^2 \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k} g^{jk} y_l M_p + f_1^{-4} F_1^2 \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} y_{l'} N_{p'} y^j = 0, \quad (21)$$

(21)两边同时与 y^k 缩并，再将(6)的第一个等式代入，并注意到 $f_1^{-4} \neq 0$ ， $F_1^2 \neq 0$ ，可得

$$\frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} y_{l'} N_{p'} y^j y^k = 0, \quad (22)$$

(22)两边同时与 $y^{l'}$ ， y_k ， y_j 缩并，注意到 $y^j y_j = F_1^2$ ， $y^{l'} y_{l'} = F_2^2$ ，可得

$$\frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} F_2^2 N_{p'} F_1^4 = 0,$$

由于 $F_1^4 \neq 0$ ， $F_2^2 \neq 0$ ， $(h^{j'k'})$ 可逆，所以由上式易得

$$\frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} N_{p'} = 0, \quad (23)$$

(23)两边同时与 $y^{j'}$ 缩并，再将(7)的第二个等式代入，可得

$$-\frac{\partial h^{lp'}}{\partial y^{k'}} N_{p'} = 0. \quad (24)$$

注意到 F_2 是非黎曼的，则 $\frac{\partial h^{lp'}}{\partial y^{k'}} \neq 0$ ，所以由(24)可得 $N_{p'} = 0$ 。同理，由(19)可以得到

$$-\frac{\partial g^{lp}}{\partial y^k} M_p = 0. \quad (25)$$

注意到 F_1 是非黎曼的，则 $\frac{\partial g^{lp}}{\partial y^k} \neq 0$ ，所以由(25)可得 $M_p = 0$ 。综上有

$$\begin{cases} M_p = 0, \\ N_{p'} = 0. \end{cases} \quad (26)$$

$$(27)$$

结合(12)和(13)，上述方程组等价于

$$\begin{cases} \frac{\partial f_1^2}{\partial x^p} + \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} f_1^2 = 0, \\ \frac{\partial f_2^2}{\partial x^{p'}} + \frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}} f_2^2 = 0. \end{cases} \quad (28)$$

$$(29)$$

第二步：证明 F 为乘积芬斯勒度量。具体来说，分析上述偏微分方程组，求解扭曲函数 f_1 和 f_2 。

(28)和(29)经变形易得

$$\begin{cases} f_1^{-2} \frac{\partial f_1^2}{\partial x^p} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x^p}, \\ f_2^{-2} \frac{\partial f_2^2}{\partial x^{p'}} = -\frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}}. \end{cases}$$

解上述线性偏微分方程组易得

$$\begin{cases} \ln|f_1^2| = -\sigma + c_1, \\ \ln|f_2^2| = -\sigma + c_2. \end{cases} \quad (30)$$

其中 c_1, c_2 为常数。进一步可解得

$$\text{由于(30)左边 } f_1^2 \text{ 仅与 } (x^i) \text{ 有关, 因此 } \begin{cases} f_1^2 = e^{-\sigma+c_1} \\ f_2^2 = e^{-\sigma+c_2} \end{cases} \text{。 (30)右边 } e^{-\sigma+c_1} \text{ 仅与 } (x^i) \text{ 有关, 即 } \sigma \text{ 仅为关于 } (x^i)$$

的函数。同理, 由于(31)左边 f_2^2 仅与 $(x^{i'})$ 有关, 因此(31)右边 $e^{-\sigma+c_2}$ 仅与 $(x^{i'})$ 有关, 即 σ 仅为关于 $(x^{i'})$ 的函数。因此, 可以推出 $\sigma = c$ (c 为常数)。

将 $\sigma = c$, $f_1^2 = e^{-c+c_1}$, $f_2^2 = e^{-c+c_2}$ 代入(3)可得 $F = \sqrt{e^{c+c_2} F_1^2 + e^{c+c_1} F_2^2}$ 。从而, 可以看出 F 为 M 上的乘积芬斯勒度量。

第三步: 证明 F_1 和 F_2 均为弱 Landsberg 度量。又由于 σ 为常数, 所以

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^p} = 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}} = 0. \quad (33)$$

将(26)、(27)和(32)代入(18)可得

$$J_i^1 = 0. \quad (34)$$

这意味着 F_1 为弱 Landsberg 度量。同理, 将(26)、(27)和(33)代入(19)化简可得

$$J_{i'}^2 = 0. \quad (35)$$

这意味着 F_2 为弱 Landsberg 度量。

再证充分性。设 F_1 和 F_2 均为弱 Landsberg 度量, 则(34)和(35)成立。又因为 F 为乘积芬斯勒度量, 则 σ , f_1 和 f_2 都为常数。因此(26)、(27)、(32)和(33)成立。从而易验证(18)和(19)成立, 即 F 为弱 Landsberg 度量。

下面用定理 1 给出一个弱 Landsberg 度量显性表达的例子。

例 1 设 (M_1, F_1) 和 (M_2, F_2) 是两个 3 维芬斯勒流形, 其中 M_1 为 3 维欧式空间 R^3 , $F_1 = \alpha\varphi(\beta/\alpha)$ 是 M_1 上的 (α, β) 度量, $\alpha = \sqrt{(y^1)^2 + e^{2x^1}((y^2)^2 + (y^3)^2)}$, $\beta = y^1$; M_2 为 3 维球面 S^3 , $F_2 = \alpha + \beta$ 是 M_2 上的 Randers 度量, 该度量族中 1-形式 $\beta = b_i y^i$, 满足 $r_{ij} = \frac{1}{2}(b_{i|j} + b_{j|i}) = 0$ 且 $s_j = \frac{1}{2}b^i(b_{i|j} - b_{j|i}) = 0$, 则 $F = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$ 是 $M = M_1 \times M_2$ 上的弱 Landsberg 度量。

证明 根据[4]中的例 1.1 和例 1.2 可知 F_1 和 F_2 是弱 Landsberg 度量, 又因为 F 为乘积芬斯勒度量, 故由定理 1 可知 F 是弱 Landsberg 度量。

4. 共形双扭曲积芬斯勒度量的相对迷向平均 Landsberg 曲率

任意弱 Landsberg 度量都具有相对迷向平均 Landsberg 曲率[7], 但是反之不一定成立。然而, 2023 年, 边立泽、何勇和韩江慧[16]证明了具有相对迷向平均 Landsberg 曲率的挠积芬斯勒度量是弱 Landsberg 度量。因此, 本节将探索具有相对迷向平均 Landsberg 曲率的共形双扭曲积芬斯勒度量是否为弱 Landsberg 度量。

命题 3 [10] 设 F 是芬斯勒度量 F_1 和 F_2 的共形双扭曲积, 则 F 的平均嘉当挠率系数 I_α 为

$$I_i = I_i^1,$$

$$I_{i'} = I_{i'}^2.$$

定理 2 设 F 是非黎曼芬斯勒度量 F_1 与 F_2 的共形双扭曲积, 若 F 具有相对迷向平均 Landsberg 曲率, 则 F 是弱 Landsberg 度量。

证明 F 具有相对迷向平均 Landsberg 曲率等价于(2)成立, 即下面的方程组成立

$$\begin{cases} J_i + c(x)FI_i = 0, \\ J_{i'} + c(x)FI_{i'} = 0. \end{cases}$$

根据命题 2 和命题 3, 上述方程组等价于

$$\begin{cases} J_i + \frac{1}{8}e^{-2\sigma}f_2^{-4}F_2^2 \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} g^{jk} y_l M_p + \frac{1}{8}e^{-2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} f_2^{-2} y_l \left(F_1^2 \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} g^{jk} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} y_i + 2m \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^i} \right) + \frac{1}{2}e^{-2\sigma} f_2^{-2} C_{ijk} g^{jk} \left(f_1^{-2} y^{p'} N_{p'} + \frac{\partial \sigma}{\partial x^p} y^p \right) \\ \left. + \frac{n}{4}e^{-2\sigma} f_1^{-2} f_2^{-2} \frac{\partial g^{lp}}{\partial y^i} y_l M_p + \frac{1}{8}e^{-2\sigma} f_1^{-4} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^i} \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} y_{l'} N_{p'} + c(x)FI_i = 0, \right. \end{cases} \quad (36)$$

$$\begin{cases} J_{i'} + \frac{1}{8}e^{-2\sigma} f_1^{-4} F_1^2 \frac{\partial^3 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'} \partial y^{i'}} h^{j'k'} y_{l'} N_{p'} + \frac{1}{8}e^{-2\sigma} \frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}} f_1^{-2} y_{l'} \left(F_2^2 \frac{\partial^3 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'} \partial y^{i'}} h^{j'k'} \right. \\ \left. + 2 \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} y_{i'} + 2n \frac{\partial h^{lp'}}{\partial y^{i'}} \right) + \frac{1}{2}e^{-2\sigma} f_1^{-2} C_{i'j'k'} h^{j'k'} \left(f_2^{-2} y^p M_p + \frac{\partial \sigma}{\partial x^{p'}} y^{p'} \right) \\ \left. + \frac{m}{4}e^{-2\sigma} f_1^{-2} f_2^{-2} \frac{\partial h^{lp'}}{\partial y^{i'}} y_{l'} N_{p'} + \frac{1}{8}e^{-2\sigma} f_2^{-4} \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{i'}} \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} y_l M_p + c(x)FI_{i'} = 0. \right. \end{cases} \quad (37)$$

根据(3)可得

$$\frac{\partial F}{\partial y^{p'}} = \frac{1}{2}e^{2\sigma} F^{-1} f_1^2 \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{p'}}. \quad (38)$$

(36)两边同时关于 $y^{p'}$ 求偏导, 并将(38)代入, 可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8}e^{-2\sigma} f_2^{-4} \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{p'}} \frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j \partial y^i} g^{jk} y_l M_p + \frac{1}{2}e^{-2\sigma} f_1^{-2} f_2^{-2} C_{ijk} g^{jk} N_{p'} \\ & + \frac{1}{8}e^{-2\sigma} f_1^{-4} \frac{\partial F_1^2}{\partial y^i} N_{p'} \left(\frac{\partial^3 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'} \partial y^{i'}} h^{j'k'} y_{l'} + \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} \frac{\partial h^{j'k'}}{\partial y^{p'}} y_{l'} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} h_{lp'} \right) + \frac{1}{2}c(x)I_i e^{2\sigma} F^{-1} f_1^2 \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{p'}} = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

(39)两边同时与 y^i 缩并, 再将(5)的第一个等式和(6)的第三个等式代入, 并注意到 $C_{ijk}y^i = 0$, $I_i y^i = 0$, 可得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4}e^{-2\sigma} f_2^{-4} \frac{\partial F_2^2}{\partial y^{p'}} \frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k \partial y^j} g^{jk} y_l M_p + \frac{1}{4}e^{-2\sigma} f_1^{-4} F_1^2 N_{p'} \left(\frac{\partial^3 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'} \partial y^{p'}} h^{j'k'} y_{l'} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} \frac{\partial h^{j'k'}}{\partial y^{p'}} y_{l'} + \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'} \partial y^{j'}} h^{j'k'} h_{lp'} \right) = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

(40)两边同时与 y^j 缩并, 再将(6)的第二个等式代入, 可得

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4}e^{-2\sigma}f_2^{-4}\frac{\partial F_2^2}{\partial y^{p'}}\frac{\partial g^{lp}}{\partial y^k}g^{jk}y_lM_p + \frac{1}{4}e^{-2\sigma}f_1^{-4}F_1^2y^jN_{p'}\left(\frac{\partial^3 h^{lp'}}{\partial y^{k'}\partial y^{j'}\partial y^{p'}}h^{j'k'}y_{l'} \right. \\ & \left. + \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'}\partial y^{j'}}\frac{\partial h^{j'k'}}{\partial y^{p'}}y_{l'} + \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'}\partial y^{j'}}h^{j'k'}h_{l'p'}\right) = 0, \end{aligned} \quad (41)$$

(41)两边同时与 y^k 缩并, 再将(6)的第一个等式代入, 并注意到 $e^{-2\sigma} \neq 0$, $f_1^{-4} \neq 0$, $F_1^2 \neq 0$, 可得

$$y^k y^j N_{p'} \left(\frac{\partial^3 h^{lp'}}{\partial y^{k'}\partial y^{j'}\partial y^{p'}}h^{j'k'}y_{l'} + \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'}\partial y^{j'}}\frac{\partial h^{j'k'}}{\partial y^{p'}}y_{l'} + \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'}\partial y^{j'}}h^{j'k'}h_{l'p'} \right) = 0, \quad (42)$$

(42)两边同时依次关于 y^k , y^j 求偏导, 则有

$$N_{p'} \left(\frac{\partial^3 h^{lp'}}{\partial y^{k'}\partial y^{j'}\partial y^{p'}}h^{j'k'}y_{l'} + \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'}\partial y^{j'}}\frac{\partial h^{j'k'}}{\partial y^{p'}}y_{l'} + \frac{\partial^2 h^{lp'}}{\partial y^{k'}\partial y^{j'}}h^{j'k'}h_{l'p'} \right) = 0. \quad (43)$$

将(43)代入(40), 可得

$$-\frac{1}{4}e^{-2\sigma}f_2^{-4}\frac{\partial F_2^2}{\partial y^{p'}}\frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k\partial y^j}g^{jk}y_lM_p = 0, \quad (44)$$

(44)两边同时与 $y^{p'}$ 缩并, 再将(5)的第二个等式代入, 并注意到 $e^{-2\sigma} \neq 0$, $f_2^{-4} \neq 0$, $F_2^2 \neq 0$, (g^{jk}) 可逆, 可以得到

$$\frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k\partial y^j}y_lM_p = 0, \quad (45)$$

(45)两边同时与 y^l 缩并, 并注意到 $y^l y_l = F_1^2$, $F_1^2 \neq 0$, 则有

$$\frac{\partial^2 g^{lp}}{\partial y^k\partial y^j}M_p = 0, \quad (46)$$

(46)两边同时关于 y^i 求偏导, 可得

$$\frac{\partial^3 g^{lp}}{\partial y^k\partial y^j\partial y^i}M_p = 0. \quad (47)$$

将(43)和(47)代入(39), 可得

$$\frac{1}{2}e^{-2\sigma}f_1^{-2}f_2^{-2}C_{ijk}g^{jk}N_{p'} + \frac{1}{2}c(x)I_i e^{2\sigma}F^{-1}f_1^2\frac{\partial F_2^2}{\partial y^{p'}} = 0, \quad (48)$$

(48)两边同时与 y^j 缩并, 并注意到 $C_{ijk}y^j = 0$, 可得

$$\frac{1}{2}c(x)I_i e^{2\sigma}F^{-1}f_1^2\frac{\partial F_2^2}{\partial y^{p'}}y^j = 0, \quad (49)$$

(49)两边同时与 $y^{p'}$, y^j 缩并, 再将(5)的第二个等式代入, 并注意到 $y^j y_j = F_1^2$, 则可以得到

$$c(x)I_i e^{2\sigma}F^{-1}f_1^2F_1^2F_2^2 = 0,$$

注意到 $e^{2\sigma} \neq 0$, $F \neq 0$, $f_1^2 \neq 0$, $F_1^2 \neq 0$, $F_2^2 \neq 0$, 所以由上式易得

$$c(x)I_i = 0. \quad (50)$$

由于 F_1 是非黎曼的, 所以 $I_1^1 \neq 0$ 。故由(50)可知 $c(x)=0$ 。同理, 由(37)也可以推出 $c(x)=0$, 因此 F 是弱 Landsberg 度量。

5. 结论

扭曲积不仅是黎曼几何和芬斯勒几何中重要的几何模型, 而且是构造特殊度量的有效方法。本文, 我们主要研究共形双扭曲积芬斯勒度量的平均 Landsberg 曲率, 给出共形双扭曲积芬斯勒度量为弱 Landsberg 度量的充要条件, 并证明了具有相对迷向平均 Landsberg 曲率的共形双扭曲积芬斯勒度量是弱 Landsberg 度量, 从而用共形双扭曲积给出了两种构造弱 Landsberg 度量的有效方法。Landsberg 度量一定是弱 Landsberg 度量, 反之未必成立, 在后续研究中, 我们将进一步探究对于共形双扭曲积芬斯勒度量, 反之是否成立。

基金项目

新疆维吾尔自治区自然科学基金项目(2024D01A88), 国家自然科学基金(12261088, 1176109)。

参考文献

- [1] Berwald, L. (1928) Parallelubertagung in Allgemeinen Raumen. *Atti del Congresso Internazionale dei Matematici*, **4**, 263-270.
- [2] Shen, Z.M. (2001) *Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces*. Kluwer Academic Publishers.
- [3] Shen, Z.M. (2004) Landsberg Curvature, S-Curvature and Riemann Curvature. In: Bao, D., Bryant, R.L., Chern, S.S. and Shen, Z., Eds., *A Sampler of Riemann-Finsler Geometry*, Cambridge University Press, 303-356.
- [4] Li, B. and Shen, Z. (2007) On a Class of Weak Landsberg Metrics. *Science in China Series A: Mathematics*, **50**, 573-589. <https://doi.org/10.1007/s11425-007-0021-8>
- [5] Najafi, B. and Tayebi, A. (2017) Weakly Stretch Finsler Metrics. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **91**, 441-454. <https://doi.org/10.5486/pmd.2017.7761>
- [6] Tayebi, A. and Najafi, B. (2024) Conformally Closed Weakly Landsberg Metrics. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, **93**, 71-78.
- [7] Chen, X. and Shen, Z. (2005) On Douglas Metrics. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **66**, 503-512. <https://doi.org/10.5486/pmd.2005.3192>
- [8] Cheng, X., Wang, H. and Wang, M. (2008) (α, β) -Metrics with Relatively Isotropic Mean Landsberg Curvature. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **72**, 475-485. <https://doi.org/10.5486/pmd.2008.4073>
- [9] Cheng, X., Li, H. and Zou, Y. (2014) On Conformally Flat (α, β) -Metrics with Relatively Isotropic Mean Landsberg Curvature. *Publicationes Mathematicae Debrecen*, **85**, 131-144. <https://doi.org/10.5486/pmd.2014.5863>
- [10] Soleiman, A. and Abdelsalam, A.M. (2019) On Conformally Doubly Warped Product Finsler Manifold. *Journal of the Egyptian Mathematical Society*, **27**, Article No. 55. <https://doi.org/10.1186/s42787-019-0059-0>
- [11] 加依达尔·里扎别克, 何勇, 杨蕊嘉, 等. 弱贝瓦尔德共形双扭曲积芬斯勒度量[J]. 淮阴师范学院学报(自然科学版), 2025, 24(3): 189-197+, 212.
- [12] 杨蕊嘉, 何勇. 共形双扭曲积芬斯勒度量的局部对偶平坦性[J/OL]. 新疆师范大学学报(自然科学版), 1-6. <https://doi.org/10.14100/j.cnki.1008-9659.20251024.001>, 2025-12-17.
- [13] Peyghan, E., Tayebi, A. and Najafi, B. (2012) Doubly Warped Product Finsler Manifolds with Some Non-Riemannian Curvature Properties. *Annales Polonici Mathematici*, **105**, 293-311. <https://doi.org/10.4064/ap105-3-6>
- [14] 加依达尔·里扎别克. 关于共形双扭曲积芬斯勒度量的几类性质研究[D]: [硕士学位论文]. 乌鲁木齐: 新疆师范大学, 2025.
- [15] Bao, D., Chern, S.S. and Shen, Z.M. (2000) *An Introduction to Riemann-Finsler Geometry*. Springer.
- [16] Bian, L.Z., He, Y. and Han, J.H. (2023) Landsberg Curvature of Twisted Product Finsler Metric. arXiv: 2305.05468.