**Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(12), 69-76**
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1512295

Hans汉斯

# 集值优化问题的高阶最优性条件

**朱俊哲[1]，薛小维[2*]**

[1]重庆交通大学数学与统计学院，重庆
[2]重庆文理学院数学与人工智能学院，重庆

收稿日期：2025年11月13日；录用日期：2025年12月9日；发布日期：2025年12月17日

## 摘　要

本文利用由高阶切集所构建的高阶导数，建立了向量优化准则下集值优化问题弱极小元的最优性充分条件和必要条件，在上集合少序关系下分别介绍了集值优化问题在集优化准则下弱极大元和严格弱极大元的一些性质，并得到了严格弱极大元的最优性充分条件和必要条件。

## 关键词

广义高阶弱切上图导数，最优性条件，向量优化，集优化

# Higher-Order Optimality Conditions for Set-Valued Optimization Problems

**Junzhe Zhu[1], Xiaowei Xue[2*]**

[1]College of Mathematics and Statistics, Chongqing Jiaotong University, Chongqing
[2]School of Mathematics and Artificial Intelligence, Chongqing University of Arts and Sciences, Chongqing

Received: November 13, 2025; accepted: December 9, 2025; published: December 17, 2025

## Abstract

**This article establishes the sufficient and necessary optimality conditions for weakly minimal elements of set-valued optimization problems under the vector optimization criterion, using the higher-order derivatives constructed by higher-order tangent sets. Under the upper set less order relation, it introduces some properties of weakly maximal elements and strictly weakly maximal solutions of set-valued optimization problems under the set optimization criterion respectively, and obtains the sufficient and necessary optimality conditions for strictly weakly maximal elements.**

*通讯作者。

文章引用: 朱俊哲, 薛小维. 集值优化问题的高阶最优性条件[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 69-76.
DOI: 10.12677/pm.2025.1512295

**Keywords**

**Higher-Order Generalized Tangent Epiderivative, Optimality Condition, Vector Optimization, Set Optimization**



## 1. 引言

集值优化是优化理论的一个重要分支，主要研究目标函数或约束条件为集值映射的优化问题。关于集值优化的理论研究主要包括解的概念、标量化、解的存在性、最优性条件、解集的适定性、连通性、对偶理论等方面[1]-[10]。目前，主要有两种准则定义集值优化问题的解，一种是向量优化准则，另一种是集优化准则。向量优化准则[11]寻找的是集值目标函数在可行域内所有像集的并集的有效点，集优化准则[12]是基于集合之间的某种序关系，寻找的是集值目标函数在可行域内所有像集组成的集合的有效元。

高阶切集[13]和借助高阶切集建立的高阶导数是研究集值优化问题的一个重要工具，文献[14]借助高阶切集提出了集值映射的高阶切上图导数并研究其性质，讨论了该导数在集值优化问题对偶理论中的应用，文献[15]进一步研究了高阶切上图导数的性质，并分析了其灵敏性和稳定性，文献[16]借助高阶切集提出一类集值映射广义高阶切上图导数，对其灵敏性进行了分析并将其应用于无约束复合集值优化问题最优性条件的研究，文献[17]利用高阶切集建立了向量变分不等式问题间隙函数的一类高阶导数。

本文受文献[13]-[17]工作的启发，利用由高阶切集所构建的高阶导数，研究了向量优化准则下一类集值优化问题弱有效解的导数型最优性条件，在集值映射 $C$ 凸的假设下得到了弱有效解的导数型最优性充分条件；分析了集优化准则下集值优化问题弱极大解的一些重要性质，并研究了集优化准则下一类集值优化问题在上集合少序关系下的 $u$-严格弱极大解的导数型最优性必要条件，在集值映射 $C$ 凸的假设下得到了 $u$-严格弱极大解的导数型最优性充分条件。

## 2. 预备知识

设 $X$ 和 $Y$ 是实线性赋范空间，$C\subseteq Y$ 是具有非空内部的闭点凸锥，$\operatorname{int}C$ 表示集合 $C$ 的内部，$Y$ 中由锥 $C$ 诱导出的偏序关系 $\leq_C$，$<_C$，定义为：

$$y_1\leq_C y_2 \Leftrightarrow y_2-y_1\in C;$$
$$y_1<_C y_2 \Leftrightarrow y_2-y_1\in \operatorname{int}C.$$

对于集值映射 $F:X\to 2^Y$，其有效域、图像和上图分别为：

$$domF:=\{x\in X\mid F(x)\neq\varnothing\};$$

$$grF:=\{(x,y)\in X\times Y\mid y\in F(x)\};$$

$$epi_CF:=\{(x,y)\in X\times Y\mid y\in F(x)+C\}.$$

**定义 2.1** [2] 令集合 $A\subseteq Y$，$a_0\in Y$，

1) 在 $\operatorname{int}C$ 非空时，如果满足 $A\cap(a_0-\operatorname{int}C)=\varnothing$，则称 $a_0$ 为 $A$ 的一个弱极小点，记为 $a_0\in WMin_CA$；

2) 在 $\operatorname{int}C$ 非空时，如果满足 $A\subseteq WMin_CA+\operatorname{int}C\cup\{0\}$，则称 $A$ 具有弱极小性。

**注 2.1** 对于集合 $A\subseteq Y$，点 $a_0\in Y$，

1) 在 $\operatorname{int}C$ 非空时，如果满足 $A\cap(a_0+\operatorname{int}C)=\varnothing$，则称 $a_0$ 为 $A$ 的一个弱极大点，记为 $a_0\in WMax_C A$；

2) 在 $\operatorname{int}C$ 非空时，如果满足 $A\subseteq WMax_C A-\operatorname{int}C\cup\{0\}$，则称 $A$ 具有弱极大性。

**定义 2.2** [2]给定集值映射 $F:X\to 2^Y$，若对任意的 $x_1$，$x_2\in X$，$\lambda_1$，$\lambda_2\in[0,1]$，$\lambda_1+\lambda_2=1$，有

$$\lambda_1F(x_1)+\lambda_2F(x_2)\subseteq F(\lambda_1x_1+\lambda_2x_2)+C,$$

那么称 $F$ 是 $C$ 凸的。

**注 2.2** 对集值映射 $F:X\to 2^Y$，$F$ 是 $C$ 凸的当且仅当 $epi_CF$ 是凸集。

**定义 2.3** [13] 设 $S\subset X$ 是一个非空集合，$x_0\in clS$，$u_1\in X$，$r\in[0+\infty)$，

1) $S$ 在 $x_0$ 处沿方向 $u_1$ 关于 $r$ 的高阶切集定义为：

$$T_r^h(S,x_0,u_1):=\left\{u\in X\mid \exists t_n,s_n\to 0^+,t_ns_n^{-1}\to 2r,\exists u_n\to u,x_0+t_nu_1+t_ns_nu_n\in S,\forall n\in\mathbb{N}\right\};$$

2) S 在 $x_0$ 处沿方向 $u_1$ 关于 $r$ 的邻接高阶切集定义为：

$$T_r^{hi}(S,x_0,u_1):=\left\{u\in X\mid \forall t_n,s_n\to 0^+,t_ns_n^{-1}\to 2r,\exists u_n\to u,x_0+t_nu_1+t_ns_nu_n\in S,\forall n\in\mathbb{N}\right\}.$$

**注 2.3** [14] 设 $S\subset X$ 是一个非空集合，$x_0\in clS$，$u_1\in X$，$r\in[0+\infty)$，如果集合 $S$ 是凸集且 $u_1\in S$，那么 $T_r^h(S,x_0,u_1-x_0)=T_r^{hi}(S,x_0,u_1-x_0)$。

**注 2.4** 高阶切集和邻接高阶切集的另一种定义方式：

1) $T_r^h(S,x_0,u_1):=\limsup\limits_{s,t\to 0^+,ts^{-1}\to 2r}\dfrac{1}{st}(S-x_0-tu_1)$；

2) $T_r^{hi}(S,x_0,u_1):=\liminf\limits_{s,t\to 0^+,ts^{-1}\to 2r}\dfrac{1}{st}(S-x_0-tu_1)$。

**定义 2.4** [14] 给定集值映射 $F:X\to 2^Y$，$(x_0,y_0)\in grF$，$(u_1,v_1)\in X\times Y$，$F$ 在 $(x_0,y_0)$ 处沿方向 $(u_1,v_1)$ 关于 $r$ 的高阶切导数定义为：

$$grD_r^hF(x_0,y_0,u_1,v_1):=T_r^h\left(grF,(x_0,y_0),(u_1,v_1)\right),$$

即

$$\begin{aligned}D_r^hF(x_0,y_0,u_1,v_1)(u)=\{&v\in Y\mid \exists t_n,s_n\to 0^+:t_ns_n^{-1}\to 2r,\exists(u_n,v_n)\to(u,v),\\&y_0+t_nv_1+t_ns_nv_n\in F(x_0+t_nu_1+t_ns_nu_n),\forall n\in\mathbb{N}\}.\end{aligned}$$

**定义 2.5** [16] 给定集值映射 $F:X\to 2^Y$，$(x_0,y_0)\in grF$，$(u_1,v_1)\in X\times Y$，$F$ 在 $(x_0,y_0)$ 处沿方向 $(u_1,v_1)$ 关于 $r$ 的广义高阶弱切上图导数定义为：

$$G-WE_CD_r^hF(x_0,y_0,u_1,v_1)(u):=WMin_C\left\{v\in Y\mid (u,v)\in T_r^h\left(epi_CF,(x_0,y_0),(u_1,v_1)\right)\right\}.$$

**定义 2.6** [13] 给定集值映射 $F:X\to 2^Y$，$(x_0,y_0)\in grF$，$(u_1,v_1)\in X\times Y$，如果对任意的 $t_n,s_n\to 0^+$，$t_ns_n^{-1}\to 2r$，$u_n\to u$，存在 $v_n\to v$ 使得

$$y_0+t_nv_1+t_ns_nv_n\in F(x_0+t_nu_1+t_ns_nu_n),$$

那么称 $F$ 在 $(x_0,y_0)$ 处沿方向 $(u_1,v_1)$ 关于 $r$ 高阶半可微。

**引理 2.1** [16] 如果集值映射 $F:X\to 2^Y$ 是 $C$-凸的，$(x_0,y_0)\in grF$，$(u_1,v_1)\in epiF$，且 $P_F(u)=\left\{v\in Y\mid (u,v)\in T_r^h\left(epi_CF,(x_0,y_0),(u_1,v_1)\right)\right\}$ 具有弱极小性，那么

$$F(u)-y_0\subseteq G-WE_CD_r^hF(x_0,y_0,u_1-x_0,v_1-y_0)(u-x_0)+C,\forall u\in X.$$

## 3. 集值优化问题在向量准则下的最优性条件

本节讨论集值优化问题在向量准则下的导数型高阶最优性条件。

令 $F: X \to 2^Y$ 是一个集值映射，设 $M \subseteq X$ 非空，那么向量准则下的集值优化问题可写成如下形式：

$$(VOP)\min_{\leq_C} F(x) \quad \text{s.t.}\ x \in M.$$

**定义 3.1** 给定点 $(x_0, y_0) \in grF$，如果对任意的 $x \in M$，有

$$\left(F(x) - y_0\right) \cap (-\operatorname{int} C) = \varnothing,$$

即 $y_0 \in WMin_C F(M)$，那么称点 $(x_0, y_0)$ 为 $VOP$ 的一个弱极小元，称 $x_0$ 为为 $VOP$ 的一个弱极小解。定理 3.1 和定理 3.2 将分别给出 $VOP$ 弱极小解的必要条件和充分条件。

**定理 3.1** 设 $(x_0, y_0) \in grF(x_0, y_0)$，如果满足以下条件：

1) 点 $(x_0, y_0)$ 是 $VOP$ 的一个弱极小元；

2) $(u_1, v_1) \in M \times (-C)$；

3) $epi_C F$ 在 $(x_0, y_0)$ 处沿方向 $(u_1, v_1)$ 关于 $r$ 高阶半可微，

那么

$$\left(G - WE_C D_r^h F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u)\right) \cap (-\operatorname{int} C) = \varnothing, \forall u \in T_r^h(M, x_0, u_1).$$

**证明：**假设结论不成立，那么存在 $u \in T_r^h(M, x_0, u_1)$，使得

$$\left(G - WE_C D_r^h F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u)\right) \cap (-\operatorname{int} C) = \varnothing.$$

从而存在 $v \in G - WE_C D_r^h F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u) \subseteq D_r^h epi_C F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u)$ 且 $v \in -\operatorname{int} C$。

由 $u \in T_r^h(M, x_0, u_1)$，存在 $t_n, s_n \to 0^+$，$t_n s_n^{-1} \to 2r$ 及 $u_n \to u$，使得对所有的 n，

$$x_0 + t_n u_1 + t_n s_n u_n \in M. \tag{1}$$

又由于 $epi_C F$ 在 $(x_0, y_0)$ 处沿方向 $(u_1, v_1)$ 关于 $r$ 高阶半可微，因此对上述的 $t_n, s_n, u_n$，存在 $v_n \to v$，使得

$$y_0 + t_n v_1 + t_n s_n v_n \in F(x_0 + t_n u_1 + t_n s_n u_n) + C.$$

从而存在 $c_0 \in C$，使得

$$t_n v_1 + t_n s_n v_n - c_0 \in F(x_0 + t_n u_1 + t_n s_n u_n) - y_0. \tag{2}$$

由于 $v \in -\operatorname{int} C$，对于充分大的 $n$，有 $v_n \in -\operatorname{int} C$，又 $v_1 \in -C$，且 $-C - \operatorname{int} C - C \subseteq -\operatorname{int} C$，故

$$t_n v_1 + t_n s_n v_n - c_0 \in -\operatorname{int} C. \tag{3}$$

通过(2)和(3)可得

$$\left(F(x_0 + t_n u_1 + t_n s_n u_n) - y_0\right) \cap (-\operatorname{int} C) \neq \varnothing,$$

再由(1)可得，存在 $u \in M$，使得 $\left(F(u) - y_0\right) \cap (-\operatorname{int} C) \neq \varnothing$，与点 $(x_0, y_0)$ 是 $VOP$ 的弱极小元矛盾。

下面举出一个例子来说明定理 3.1。

**例 3.1** 令 $X = R$，$Y = R^2$，$C = R_+^2$，$M = [-1, 1]$，定义集值映射 $F: X \to 2^Y$ 为

$$F(x) = \begin{cases} \left\{(y_1, y_2) \mid y_1 = 2x, y_2 \geq y_1^2\right\}, x \in [-1, 0), \\ \left\{(y_1, y_2) \mid y_1 = 2x, y_2 \geq 0\right\}, x \in [0, 1]. \end{cases}$$

不难得到，集值映射 $F$ 的一个弱有效元为 $(x_0,y_0)=(0,(0,0))$。令起始方向 $(u_1,v_1)=(-1,(-1,0))$，那么它的高阶切集为：

$$T_r^h\left(epi_C F,(-1,0),(0,(-1,0))\right)=\left\{(x,(y_1,y_2))\mid x\in R,y_1\in R,y_2\geq 0\right\}.$$

它的高阶弱切上图导数为：

$$G-WE_C D_r^h F\left(0,(0,0),-1,(-1,0)\right)(u)=\left\{(y_1,y_2)\mid y_1\in R,y_2=0\right\}.$$

我们得到 $\left(G-WE_C D_r^h F(x_0,y_0,u_1,v_1)(u)\right)\cap(-\operatorname{int}C)=\varnothing$，$\forall u\in T_r^h(M,x_0,u_1)$。

**定理 3.2** 设 $F$ 是 $C$ 凸的，$(x_0,y_0)\in grF$，$(u_1,v_1)\in epiF$，如果以下条件均满足：

1) $P_F(u)=\left\{v\in Y\mid (u,v)\in T_r^h\left(epi_C F,(x_0,y_0),(u_1,v_1)\right)\right\}$ 满足弱极小性；

2) $\left(G-WE_C D_r^h F(x_0,y_0,u_1-x_0,v_1-y_0)(u-x_0)+C\right)\cap(-\operatorname{int}C)=\varnothing$，$\forall u\in M$，

那么 $(x_0,y_0)$ 是 $VOP$ 的一个弱极小元。

**证明：** 假设 $(x_0,y_0)$ 不是 $VOP$ 的弱极小元，那么存在 $u\in M$，使得

$$\left(F(u)-y_0\right)\cap(-\operatorname{int}C)\neq\varnothing, \tag{4}$$

由于 $F$ 是 $C$ 凸的，且 $P_F(u)$ 满足弱极小性，故根据引理 2.1 可以得到

$$F(u)-y_0\subseteq G-WE_C D_r^h F(x_0,y_0,u_1-x_0,v_1-y_0)(u-x_0)+C, \tag{5}$$

由(4)和(5)可得

$$\left(G-WE_C D_r^h F(x_0,y_0,u_1-x_0,v_1-y_0)(u-x_0)+C\right)\cap(-\operatorname{int}C)\neq\varnothing,$$

与条件 2)相矛盾。

## 4. 集值优化问题在集优化准则下的最优性条件

本节讨论集值优化问题在集优化准则下的高阶最优性条件。

**定义 4.1** [18] 设集合 $A,B\subseteq Y$，

1) 如果满足 $\forall a\in A$，$\exists b\in B$ 使得 $a\leq_C b$，即 $A\subseteq B-C$，那么称这种集合关系为上集合少序关系，记为 $A\leq_C^u B$；

2) 如果满足 $\forall a\in A$，$\exists b\in B$ 使得 $a<_C b$，即 $A\subseteq B-\operatorname{int}C$，那么称这种集合关系为上集合弱少序关系，记为 $A<_C^u B$。

**定义 4.2** 设 $A'$ 是包含 $Y$ 中子集的一个集合族，

1) 对任意的 $B\in A'$，如果 $A\leq_C^u B$，则有 $B\leq_C^u A$，那么称 $A$ 是 $A'$ 的一个 $u$-极大集；

2) 对任意的 $B\in A'$，如果 $A<_C^u B$，则有 $B<_C^u A$，那么称 $A$ 是 $A'$ 的一个 $u$-弱极大集。

令 $F:X\to 2^Y$ 是一个集值映射，设 $M\subseteq X$ 非空，那么集优化准则下的集值优化问题可写成如下形式：

$$(SOP)\ \max_{\leq_C^u}\left\{F(x)\right\}\quad \text{s.t. } x\in M.$$

**定义 4.3** 设像集 $F'=\left\{F(x):x\in M\right\}$，

1)如果 $F(x_0)$ 是 $F'$ 的一个 $u$-极大集，那么称 $x_0$ 是 $SOP$ 的一个 $u$-极大解，记为 $u-Max_C F$，称 $(x_0,F(x_0))$ 为 $SOP$ 的一个 $u$-极大元；

2)如果 $F(x_0)$ 是 $F'$ 的一个 $u$-弱极大集，那么称 $x_0$ 是 $SOP$ 的一个 $u$-弱极大解，记为 $u-WMax_C F$，称 $(x_0,F(x_0))$ 为 $SOP$ 的一个 $u$-弱极大元。

**定义 4.4** 设 $x_0 \in M$，如果存在点 $x_0$ 的邻域 $U(x_0)$ 使得对任意的 $x \in U(x_0) \cap M$，$F(x_0) \not<_C^u F(x)$，那么称 $(x_0, F(x_0))$ 是 $SOP$ 的一个 $u$-严格弱极大元。

**引理 4.1** 令 $x_0 \in M$，那么 $x_0 \in u - WMax_C F$ 当且仅当对任意的 $x \in M$，下列条件之一成立：

1) $F(x_0) <_C^u F(x)$ 且 $F(x) <_C^u F(x_0)$；

2) 存在 $y_0 \in F(x_0)$，使得 $(F(x) - y_0) \cap \operatorname{int} C = \varnothing$。

**证明：**假设条件 1)和 2)均不成立，那么存在 $x \in M$，对所有的 $y_0 \in F(x_0)$，存在 $y \in F(x)$，使得 $y - y_0 \in \operatorname{int} C$。从而 $F(x_0) \subseteq F(x) - \operatorname{int} C$，即 $F(x_0) <_C^u F(x)$，由于 1)不成立，故 $F(x) \not<_C^u F(x_0)$，与 $x_0 \in u - WMax_C F$ 矛盾。

相反地，假设 $x_0 \notin u - WMax_C F$，那么存在 $x \in M$ 使得 $F(x_0) <_C^u F(x)$，且 $F(x) \not<_C^u F(x_0)$，与条件 1)矛盾，并且对任意的 $y_0 \in F(x_0)$，存在 $y \in F(x)$，使得 $y_0 \in y - \operatorname{int} C$ 即 $y - y_0 \in \operatorname{int} C$，因此 $(F(x) - y_0) \cap \operatorname{int} C \neq \varnothing$，与条件 2)矛盾。

**引理 4.2** 令 $x_0, x \in M$，如果以下条件均满足：

1) $F(x_0) \not<_C^u F(x)$；

2) $F(x_0)$ 具有弱极大性且 $Wmax_C F(x_0) = \{y_0\}$。

那么 $(F(x) - y_0) \cap \operatorname{int} C = \varnothing$。

**证明：**假设 $(F(x) - y_0) \cap \operatorname{int} C \neq \varnothing$，那么存在 $y \in F(x)$，使得 $y - y_0 \in \operatorname{int} C$，即 $y_0 \in F(x) - \operatorname{int} C$。由于 $F(x_0)$ 具有弱极大性且 $Wmax_C F(x_0) = \{y_0\}$，因此对任意的 $y_0' \in F(x_0)$，存在 $c \in \operatorname{int} C \cup \{0\}$ 使得 $y_0' = y_0 - c$，可以得到 $y_0' \in F(x) - \operatorname{int} C$，因此 $F(x_0) \subseteq F(x) - \operatorname{int} C$，即 $F(x_0) <_C^u F(x)$，与条件 1)相矛盾。

定理 4.1 和定理 4.2 将分别给出 $SOP$ 弱极小解的必要条件和充分条件。

**定理 4.1** 对于 $x_0 \in M$，如果以下条件均满足：

1) $(x_0, F(x_0))$ 是 $SOP$ 的一个 $u$-严格弱极大元；

2) $(u_1, v_1) \in M \times C$；

3) $F(x_0)$ 具有弱极大性且 $Wmax_C F(x_0) = \{y_0\}$；

4) $F$ 在 $(x_0, y_0)$ 处，沿方向 $(u_1, v_1)$ 关于 $r$ 高阶半可微，

那么

$$D_r^h F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u) \cap \operatorname{int} C = \varnothing, \forall u \in T_r^h(M, x_0, u_1).$$

**证明：**已知 $(x_0, F(x_0))$ 是 $SOP$ 的一个 $u$-严格弱极大元，由定义 4.4 可得，存在点 $x_0$ 的邻域 $U(x_0)$，对任意的 $x \in U(x_0) \cap M$，使得 $F(x_0) \not<_C^u F(x)$。

由于 $u \in T_r^h(M, x_0, u_1)$，因此存在 $t_n$，$s_n \to 0^+$，$t_n s_n^{-1} \to 2r$，存在 $u_n \to u$，对充分大的 $n$，有

$$x_0 + t_n u_1 + t_n s_n u_n \in M.$$

设 $v \in D_r^h F(x_0, y_0, u_1, v_1)(u)$，由于 $F$ 在 $(x_0, y_0)$ 处，沿方向 $(u_1, v_1)$ 关于 $r$ 高阶半可微，因此对上述的 $t_n$，$s_n$，$u_n$，存在 $v_n \to v$ 使得

$$y_0 + t_n v_1 + t_n s_n v_n \in F(x_0 + t_n u_1 + t_n s_n u_n),$$

记 $w_n = y_0 + t_n v_1 + t_n s_n v_n$，当 $n$ 充分大时，有 $x_0 + t_n u_1 + t_n s_n u_n \in U(x_0) \cap M$，由 $(x_0, F(x_0))$ 是 $SOP$ 的一个 $u$-严格弱极大元知 $F(x_0) \not<_C^u F(x_0 + t_n u_1 + t_n s_n u_n)$，又由于 $F(x_0)$ 具有弱极大性且 $Wmax_C F(x_0) = \{y_0\}$，因此根据引理 4.2，

$$(F(x_0 + t_n u_1 + t_n s_n u_n) - y_0) \cap \operatorname{int} C = \varnothing. \tag{6}$$

假设 $v\in \operatorname{int}C$，由于 $v_n\to v$，因此当 $n$ 充分大时，$v_n\in \operatorname{int}C$。注意到 $t_n$，$s_n\to 0^+$，$v_1\in C$，可以得到

$$w_n-y_0=t_nv_1+t_ns_nv_n\in C+\operatorname{int}C\subseteq \operatorname{int}C.$$

因此

$$w_n-y_0\in\left(F\left(x_0+t_nu_1+t_ns_nu_n\right)-y_0\right)\cap \operatorname{int}C,$$

与(6)矛盾，我们得到对于任意的 $u\in T_r^h\left(M,x_0,u_1\right)$，

$$D_r^hF\left(x_0,y_0,u_1,v_1\right)(u)\cap \operatorname{int}C=\varnothing.$$

下面举出一个例子来说明定理 4.1。

**例 4.1** 考虑集优化问题 $\{F(x)\}$，令 $X=R$，$Y=R^2$，$C=R_+^2$，$M=[-1,1]$。定义集值映射 $\{F(x)\}=\left\{(y_1,y_2)\mid y_1^2+\left(y_2+x^2+1\right)^2\le 1\right\}$，$x\in M$。

不难得出，该集优化问题的 $u$-严格弱极大元为 $(0,F(0))$，$Wmax_CF(0)=(0,0)$，那么 $grF$ 在点 $(0,(0,0))$ 处沿方向 $(0,(1,0))$ 的高阶切集为：

$$T_r^h\left(grF,(0,(0,0)),(0,(1,0))\right)=\left\{\left(x,(y_1,y_2)\right)\mid y_1\in R,y_2=0,x\in R\right\}.$$

高阶弱切上图导数为：

$$D_r^hF\left(0,(0,0),0,(1,0)\right)(u)=\left\{(y_1,y_2)\mid y_1\in R,y_2=0\right\},u\in[-1,1].$$

我们得到 $D_r^hF\left(0,(0,0),0,(1,0)\right)(u)\cap \operatorname{int}C=\varnothing$。

**定理 4.2** 设 $F$ 是 $C$ 凸的，$y_0\in F(x_0)$，$(u_1,v_1)\in epiF$。如果以下条件均满足：

1) $P_F(u)=\left\{v\in Y\mid (u,v)\in T_r^h\left(epi_CF,(x_0,y_0),(u_1,v_1)\right)\right\}$ 满足弱极小性；

2) $\left(G-WE_CD_r^hF\left(x_0,y_0,u_1-x_0,v_1-y_0\right)(u-x_0)+C\right)\cap \operatorname{int}C\ne\varnothing$，$\forall u\in M$，

那么 $(x_0,F(x_0))$ 是 $SOP$ 的的 $u$-弱极大元。

**证明：** 假设 $(x_0,F(x_0))$ 不是 $SOP$ 的 $u$-弱极大元，根据引理 4.1 可得，存在 $u\in M$，使得对任意的 $y_0\in F(x_0)$，都有 $\left(F(u)-y_0\right)\cap \operatorname{int}C\ne\varnothing$，即存在 $v'\in F(u)$，使得

$$v'-y_0\in \operatorname{int}C.$$

由于 $F$ 是 $C$ 凸的，且 $P_F(u)=\left\{v\in Y\mid (u,v)\in T_r^h\left(epi_CF,(x_0,y_0),(u_1,v_1)\right)\right\}$ 满足弱极小性，故根据引理 2.1 可得

$$F(u)-y_0\subseteq G-WE_CD_r^hF\left(x_0,y_0,u_1-x_0,v_1-y_0\right)(u-x_0)+C,$$

从而

$$v'-y_0\in G-WE_CD_r^hF\left(x_0,y_0,u_1-x_0,v_1-y_0\right)(u-x_0)+C+C,$$

因此

$$\left(G-WE_CD_r^hF\left(x_0,y_0,u_1-x_0,v_1-y_0\right)(u-x_0)+C\right)\cap \operatorname{int}C\ne\varnothing,$$

与定理条件 2)矛盾。

## 基金项目

重庆市教委科学技术研究资助项目(KJQN202201343; KJZD-K202401304)资助；重庆交通大学研究生科研创新项目(2025S0089)。

## 参考文献


[1] Luc, D.T. (1989) Theory of Vector Optimization. Springer.

[2] Aubin, J.P. and Frankowsa, H. (1990) Set-Valued Analysis.

[3] Khan, A.A., Tammer, C. and Zalinescu, C. (2015) Set-Valued Optimization. Springer.

[4] Yu, G. (2017) Optimality Conditions in Set Optimization Employing Higher-Order Radial Derivatives. *Applied Mathematics*: *A Journal of Chinese Universities*, **32**, 225-236. https://doi.org/10.1007/s11766-017-3414-7

[5] Jahn, J. (2004) Vector Optimization: Theory, Applications, and Extensions. Springer.

[6] Alonso, M. and Rodríguez-Marín, L. (2005) Set-Relations and Optimality Conditions in Set-Valued Maps. *Nonlinear Analysis*: *Theory*, *Methods & Applications*, **63**, 1167-1179. https://doi.org/10.1016/j.na.2005.06.002

[7] Jahn, J. and Ha, T.X.D. (2010) New Order Relations in Set Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **148**, 209-236. https://doi.org/10.1007/s10957-010-9752-8

[8] Peng, Z.H. and Xu, Y.H. (2016) New Second-Order Tangent Epiderivatives and Applications to Set-Valued Optimization. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **172**, 128-140. https://doi.org/10.1007/s10957-016-1011-1

[9] 姚斌. 非预序关系下的集优化问题研究[D]: [博士学位论文]. 重庆: 重庆大学, 2020.

[10] Gupta, S., Gupta, R. and Srivastava, M. (2024) On Scalarization and Well-Posedness in Set Optimization with a Partial Set Order Relation. *Positivity*, **28**, 1.

[11] Kuroiwa, D. (1997) Some Criteria in Set-Valued Optimization. *Sūrikaisekikenkyūsho Kōkyūroku*, **985**, 171-176.

[12] Corley, H.W. (1988) Optimality Conditions for Maximizations of Set-Valued Functions. *Journal of Optimization Theory and Applications*, **58**, 1-10. https://doi.org/10.1007/bf00939767

[13] Penot, J. (2017) Higher-order Optimality Conditions and Higher-Order Tangent Sets. *SIAM Journal on Optimization*, **27**, 2508-2527. https://doi.org/10.1137/16m1100551

[14] Khai, T.T., Anh, N.L.H. and Giang, N.M.T. (2021) Higher-Order Tangent Epiderivatives and Applications to Duality in Set-Valued Optimization. *Positivity*, **25**, 1699-1720. https://doi.org/10.1007/s11117-021-00838-1

[15] Anh, N.L.H., Giang, N.M.T. and Thong, N.V. (2021) Higher-Order Tangent Derivative and Its Applications to Sensitivity Analysis. *Optimization Letters*, **16**, 1701-1724. https://doi.org/10.1007/s11590-021-01797-y

[16] Anh, N.L.H. and Thinh, V.D. (2022) Higher-Order Generalized Tangent Epiderivatives and Applications to Set-Valued Optimization. *Positivity*, **26**, 87-117. https://doi.org/10.1007/s11117-022-00953-7

[17] 马权禄, 薛小维. 向量变分不等式的高阶可微性与灵敏性[J]. 山东大学学报(理学版), 2024, 59(11): 1-9.

[18] Kuroiwa, D. (2003) Existence Theorems of Set Optimization with Set-Valued Maps. *Journal of Information and Optimization Sciences*, **24**, 73-84. https://doi.org/10.1080/02522667.2003.10699556