Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(12), 130-137
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1512301

关于超空间非自治动力系统分布混沌的研究

曾泓博

长沙理工大学数学与统计学院，湖南 长沙

收稿日期：2025年11月17日；录用日期：2025年12月10日；发布日期：2025年12月23日

摘 要

本文主要研究超空间非自治动力系统分布混沌的一些性质。在强一致收敛的条件下，得到了序列映射是第二型分布混沌(DC2, DC2’)与极限映射是第二型分布混沌(DC2, DC2’)的关系。在一致收敛条件下，得到了超空间非自治动力系统的第二型分布混沌(DC2’)保持迭代不变性。最后，证明了超空间非自治动力系统中$\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$是Li-Yorke混沌或$\left(K(Y),\overline{g_{1,\infty}}\right)$是Li-Yorke混沌当且仅当$\left(K(X)\times K(Y),\overline{f_{1,\infty}}\times\overline{g_{1,\infty}}\right)$是Li-Yorke混沌。

关键词

超空间，非自治动力系统，分布混沌，Li-Yorke混沌

Research on Distributional Chaos in Hyperspace Non-Autonomous Systems

Hongbo Zeng

School of Mathematics and Statistics, Changsha University of Science and Technology, Changsha Hunan

Received: November 17, 2025; accepted: December 10, 2025; published: December 23, 2025

Abstract

This paper mainly studies some properties of distributional chaos in hyperspace non-autonomous dynamical systems. Under the condition of strong uniform convergence, the relationship between the sequence mapping being the type 2 of distributional chaos (DC2, DC2’) and the limit mapping being the type 2 of distributional chaos (DC2, DC2’) was obtained. Under the condition of uniform convergence, the type 2 of distributional chaos (DC2’) of the hyperspace non-autonomous dynamical system maintains iterative invariance. Finally, it is proved that in a hyperspace non-autonomous dynamical system, that $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ is Li-Yorke chaos or that $\left(K(Y),\overline{g_{1,\infty}}\right)$ is Li-Yorke chaos

文章引用: 曾泓博. 关于超空间非自治动力系统分布混沌的研究[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 130-137.
DOI: 10.12677/pm.2025.1512301

if and only if that $\left(K(X)\times K(Y),\overline{f_{1,\infty}}\times\overline{g_{1,\infty}}\right)$ **is Li-Yorke chaos.**

Keywords

Hyperspace, Non-Autonomous Systems, Distributional Chaos, Li-Yorke Chaos

1. 引言

对动力系统的研究可追溯到牛顿，十九世纪庞加莱创立了微分方程定性理论，二十世纪初，Birkhoff 经过系统化发展使得动力系统成为一个理论学科。混沌是动力系统的一个主要方向，最早在 1975 年由李天岩等人在《周期三蕴含混沌》[1]中给出了混沌语言的数学定义，称为 Li-Yorke 混沌。1994 年，Schweizer 等人[2]在统计意义下给出分布混沌的概念。而后，学者进一步推广定义了三种类型的分布混沌(DC1~DC3) [3]，最近，作者[4]也提出了另一种分布混沌命名为 DC2’。Li-Yorke 混沌和分布混沌如今仍是最经典和最重要的两种混沌。而对于超空间的研究可追溯到二十世纪初，因为在生物种群、人类统计学、磁场分析等方面的研究中，往往需要考察空间子集(如群体分布、数据集合)的整体运动规律。因此，研究由基空间上的自映射所诱导的超空间映射具有重要理论意义。最早在 1984 年 Klein [5]就提出了超空间的概念，而后经过 Flores 等人的发展使得超空间逐渐变为热门。我们知道在实际问题中，事物的变化往往和时间有关，因此，经典的自治动力系统被推广到了非自治动力系统，其由 Kolyada 等人[6]首次提出，2011 年，Cnovas [7]研究了非自治动力系统关于 Li-Yorke 混沌极限行为，2012 年，Dvorakova [8]研究了非自治动力系统中的分布混纯。2013 年，吴新星等人[9]研究了非自治动力系统中的敏感性、Li-Yorke 混沌和分布混沌等动力性质保持迭代不变。此后，很多学者在超空间中也研究非自治动力系统。其中，杨承宇等人[10]讨论了基空间与超空间中的非自治动力系统关于敏感性的关系，还证明得到了超空间非自治动力系统的敏感性具有迭代不变性。此外，对于乘积动力系统，吴新星等人[11]研究了 Li-Yorke 混沌乘积性。杨智等人[12]讨论了 Li-Yorke 敏感的乘积性。但建军等人[13]研究了超空间自治动力系统的 Li-Yorke 混沌和分布混沌都保持迭代不变性，而对于超空间非自治动力系统的各种分布混沌是否仍有此结论还未有研究，本文将对此问题进行研究。2018 年，向伟杰等人[14]研究了超空间动力系统在强一致收敛条件下的相关动力学性质，讨论了超空间动力系统中 Li-Yorke 混沌和分布混沌中的序列映射与极限映射的关系，而其他类型的分布混沌其序列映射与极限映射的关系还是未知的，有待研究。2022 年，冷震北等人[15]研究了超空间非自治动力系统中的混沌 Li-Yorke 的迭代不变性和乘积不变性等性质。

在上述研究的基础上，本文主要讨论超空间非自治动力系统中分布混沌的有关性质，得到了超空间非自治动力系统的序列映射是第二型分布混沌(DC2, DC2’)能被极限映射所继承；证明了超空间非自治动力系统的第二型分布混沌的迭代不变性；研究了超空间非自治动力系统中单系统是 Li-Yorke 混沌与乘积系统是是 Li-Yorke 混沌的关系，最后提出一个公开问题。

2. 预备知识

定义 1. 设 (X,d) 是一个度量空间：$f_i:X\to X$，$i\in\mathbb{Z}_+$ 为连续自映射。记序列 $\{f_i\}_1^\infty=f_{1,\infty}$，对于任意的 $x\in X$ 点 x 的轨迹由序列 $x,f_1(x),f_1^2(x),\cdots,f_1^n(x),\cdots$ 表示，记作 tra(x)，其中

$$f_1^n = f_n \circ f_{n-1} \circ \cdots \circ f_2 \circ f_1 .$$

并且对任意的 $f_i \in f_{1,\infty}$，当 $n=0$ 时，$f_i^0 = id$。此时 $f_{1,\infty}$ 为 X 上的一个非自治动力系统，记为 $(X, f_{1,\infty})$，对任意的 $f_i \in f_{1,\infty}$，任意的正整数 n，记

$$f_i^n = f_{i+n-1} \circ f_{i+n-2} \circ \cdots \circ f_{i+1} \circ f_i .$$

对任意的 $N \in \mathbb{N}$，记 $\overline{f_{1,\infty}^{[N]}} = \left(f_{N(n-1)+1}^{N}\right)_{n=1}^{\infty}$，此时 $\left(X, \overline{f_{1,\infty}^{[N]}}\right)$ 也是 X 上的一个非自治动力系统，称为原系统的 N 次迭代系统。对于超空间系统，同样可以定义 N 次迭代系统。

定义 2. 设 (X,d) 是一个度量空间，$f: X \to X$ 是连续映射。$K(X)$ 表示 X 上的所有非空紧子集的集合，对任意的非空开子集 $A_1, \cdots, A_n \subset X$，记

$$\langle A_1, \cdots, A_n \rangle = \left\{ A \in K(X) \mid A \subset \bigcup_{i=1}^{n} A_i, A \cap A_i \neq \phi, 1 \le i \le n \right\},$$

则所有形如 $A_1, \cdots, A_n$ 的集合构成了 $K(X)$ 空间的某个拓扑的基，把由这个基生成的拓扑称为 $K(X)$ 上的 Vietoris 拓扑，所得拓扑空间称为由生成的超空间。在 $K(X)$ 上定义 Hausdorff 度量 d_H：

$$d_H(A,B) = \max\left\{ \sup_{a \in A} d(a,B), \sup_{b \in B} d(A,b) \right\}$$

易知 $d_H(A,B)$ 是 $K(X)$ 的以 Hausdorff 度量 d_H 诱导的拓扑空间。令 $\overline{f}: K(X) \to K(X)$ 为 $\overline{f}(A) = \{ f(a) \mid a \in A \}$。显然 $\overline{f}: K(X) \to K(X)$ 是连续的。

定义 3. 两个超空间非自治动力系统 $\left(K(X), \overline{f_{1,\infty}}\right)$ 和 $\left(K(Y), \overline{g_{1,\infty}}\right)$，其度量分别为 d_{H_1} 和 d_{H_2}。

定义 $\overline{f_{1,\infty}} \times \overline{g_{1,\infty}} : K(X) \times K(Y) \to K(X) \times K(Y)$ 为

$$\overline{f_{1,\infty}} \times \overline{g_{1,\infty}}(A \times B) = \overline{f_{1,\infty}}(A) \times \overline{g_{1,\infty}}(B)$$

其中 $A \times B \in K(X) \times K(Y)$。$K(X) \times K(Y)$ 的度量定义为

$$d_H\left((A_1,B_1),(A_2,B_2)\right) = \max\left\{ d_{H_1}(A_1,A_2), d_{H_2}(B_1,B_2) \right\},$$

其中 $(A_1,B_1),(A_2,B_2) \in K(X) \times K(Y)$。我们称系统 $\left(K(X) \times K(Y), \overline{f_{1,\infty}} \times \overline{g_{1,\infty}}\right)$ 为这两个超空间非自治动力系统的乘积动力系统。

定义 4. 令 $(K(X), \overline{f_{1,\infty}})$ 是一个超空间非自治动力系统。如果存在一个不可数集 $\Gamma \subseteq K(X)$，使得对于任意不同的 $A, B \in \Gamma$，有 $\liminf_{i \to \infty} d_H\left(\overline{f_1^i}(A), \overline{f_1^i}(B)\right) = 0, \limsup_{i \to \infty} d_H\left(\overline{f_1^i}(A), \overline{f_1^i}(B)\right) > 0$，则称 $\left(K(X), \overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌。

定义 5. 令 $\left(K(X), \overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是一个超空间非自治动力系统。

记

$$\Phi\left(\overline{f_{1,\infty}}, A, B, t\right) = \liminf_{n \to \infty} \frac{1}{n} \#\left\{ i \mid d_H\left(\overline{f_1^i}(A), \overline{f_1^i}(B)\right) < t, 0 \le i < n \right\},$$

$$\Phi^*\left(\overline{f_{1,\infty}}, A, B, t\right) = \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \#\left\{ i \mid d_H\left(\overline{f_1^i}(A), \overline{f_1^i}(B)\right) < t, 0 \le i < n \right\}.$$

如果存在一个不可数集 $\Gamma \subseteq K(X)$，使得对于任意不同的 $A, B \in \Gamma$，有(1)：对某个 $\varepsilon > 0$ 满足 $\Phi\left(\overline{f_{1,\infty}}, A, B, \varepsilon\right) = 0$ 和对任意的 $t > 0$ 满足 $\Phi^*\left(\overline{f_{1,\infty}}, A, B, t\right) = 1$，则称 $\left(K(X), \overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是第一型分布混沌(DC1)；

(2)：对某个 $\varepsilon > 0$ 满足 $\Phi\left(\overline{f_{1,\infty}}, A, B, \varepsilon\right) > 0$ 和对任意的 $t > 0$ 满足 $\Phi^*\left(\overline{f_{1,\infty}}, A, B, t\right) = 1$，则称 $\left(K(X), \overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是第二型分布混沌(DC2)；

(3)：对某个 $\varepsilon>0$ 满足 $\Phi\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,\varepsilon\right)=0$ 和对任意的 $t>0$ 满足 $\Phi^*\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,t\right)>0$，则称 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是 DC2'；

(4)：对某个区间 J，满足对任意的 $t\in J$，有 $\Phi\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,t\right)<\Phi^*\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,t\right)$，则称 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是第三型分布混沌(DC3)。

注：由定义易知，DC1 蕴含 DC2 和 DC2'，DC2 和 DC2'蕴含 DC3，DC2 和 DC2'蕴含 Li-Yorke 混沌。

为了后续证明的方便，记

$$\xi_n\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,\varepsilon\right)=\frac{1}{n}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_1^i}(A),\overline{f_1^i}(B)\right)<t,0\le i<n\right\},$$

$$\delta_n\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,\varepsilon\right)=\frac{1}{n}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_1^i}(A),\overline{f_1^i}(B)\right)\ge t,0\le i<n\right\}.$$

定义 6. 设 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是一个超空间非自治动力系统。若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n>N$ 时，对任意的 $A\in K(X)$，有 $d_H\left(\overline{f_n}(A),\overline{f}(A)\right)<\varepsilon$，则称 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 一致收敛于 $\left(K(X),\overline{f}\right)$。若对任意的 $\varepsilon>0$，存在 N，使得当 $n>N$ 时，对任意的 $A\in K(X)$ 和任意的 $i\in\mathbb{N}$，有 $d_H\left(\overline{f_n^i}(A),\overline{f_n^i}(B)\right)<\varepsilon$，则称 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 强一致收敛于 $\left(K(X),\overline{f}\right)$，记为 $\overline{f_n}\xrightarrow{s}\overline{f}$。

引理 1 [15]. 设超空间非自治动力系统 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 一致收敛于 $\left(K(X),\overline{f}\right)$。则对任意的 $\varepsilon>0$ 和任意的 $k\in\mathbb{N}$，存在 $\delta>0$，使得对于任意的 $n\in\mathbb{N}$ 和任意的 $A,B\in K(X)$，当 $d_H(A,B)<\delta$ 时，有 $d_H\left(\overline{f_n^i}(A),\overline{f_n^i}(B)\right)<\varepsilon$。

3. 主要结果

定理 1. 设 $\left(K(X),d_H\right)$ 是 Hausdorff 度量 d_H 诱导的超空间，$n\in\mathbb{N}$，$\overline{f_n}:K(X)\to K(X)$ 是连续映射，$\overline{f_n}\xrightarrow{s}\overline{f}$，若 S_n 是 $\overline{f_n}$ 的 DC2'混沌集，且 $\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$ 是不可数集，则 $\overline{f}$ 是 DC2'。

证明：令 $S=\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$，则 S 是不可数集。任取 $A,B\in S,A\ne B$，因为 $\overline{f_n}\xrightarrow{s}\overline{f}$，所以对任意的 $\varepsilon>0$，存在 $n_0\in\mathbb{N}$，使得当 $n>n_0$ 时，对任意的 $l\in\mathbb{N}$ 和上述的 A,B，有 $d_H\left(\overline{f_{n_0}^l}(A),\overline{f^l}(A)\right)<\varepsilon,d_H\left(\overline{f_{n_0}^l}(B),\overline{f^l}(B)\right)<\varepsilon$。由于 S_n 是 $\overline{f_n}$ 的 DC2'混沌集，故

(1) 存在 $\delta>0$，使得 $\Phi\left(\overline{f_n},A,B,\delta\right)<1$，

(2) 对任意 $\frac{t}{3}>0$，$\Phi^*\left(\overline{f_n},A,B,\frac{t}{3}\right)=1$。

对于(1)，令 $\varepsilon=\frac{\delta}{3}$，$l=i$，则 $d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(A),\overline{f^i}(A)\right)<\frac{\delta}{3},d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(B),\overline{f^i}(B)\right)<\frac{\delta}{3}$。由(1)知，对于任意的 $\alpha>0$ 和任意的 $N\in\mathbb{N}$，存在 $m_N>N$，使得 $\frac{1}{m_N}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(A),\overline{f^i}(B)\right)<\delta,0\le i<m_N\right\}<1-\alpha$，从而有 $\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(A),\overline{f^i}(B)\right)<\delta,0\le i<m_N\right\}<m_N(1-\alpha)$。

由于

$$d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(A),\overline{f_{n_0}^i}(B)\right)\le d_H\left(\overline{f^i}(A),\overline{f_{n_0}^i}(A)\right)+d_H\left(\overline{f^i}(A),\overline{f^i}(B)\right)+d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(B),\overline{f^i}(B)\right)\tag{3}$$

可得

$$\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f^i}(A),\overline{f^i}(B)\right)<\frac{\delta}{3},0\le i<m_N\right\}\le\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(A),\overline{f_{n_0}^i}(B)\right)<\delta,0\le i<m_N\right\}<m_N(1-\alpha),$$

从而，$\frac{1}{m_N}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f^i}(A),\overline{f^i}(B)\right)<\frac{\delta}{3},0\le i<m_N\right\}<1-\alpha$。

因此 $\liminf\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f^i}(A),\overline{f^i}(B)\right)<\frac{\delta}{3},0\le i<m\right\}<1$。即存在 $\frac{\delta}{3}>0$，使得 $\Phi\left(\overline{f},A,B,\frac{\delta}{3}\right)<1$。

对于(2)，令 $\varepsilon=\frac{t}{3}$，$l=i$，则 $d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(A),\overline{f^i}(A)\right)<\frac{t}{3},d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(B),\overline{f^i}(B)\right)<\frac{t}{3}$。由(2)知，对于任意的 $\beta>0$ 和任意的 $M\in\mathbb{N}$，存在 $m_M>M$，使得 $\frac{1}{m_M}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(A),\overline{f^i}(B)\right)<\frac{t}{3},0\le i<m_M\right\}>1-\beta$，从而有 $\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(A),\overline{f_{n_0}^i}(B)\right)<\frac{t}{3},0\le i<m_M\right\}>m_M(1-\beta)$。

由(3)，可得

$$\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f^i}(A),\overline{f^i}(B)\right)<t,0\le i<m_M\right\}\ge\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_{n_0}^i}(A),\overline{f_{n_0}^i}(B)\right)<\frac{t}{3},0\le i<m_M\right\}>m_M(1-\beta),$$

从而，$\frac{1}{m_M}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f^i}(A),\overline{f^i}(B)\right)<t,0\le i<m_N\right\}>1-\beta$，因此 $\limsup\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f^i}(A),\overline{f^i}(B)\right)<t,0\le i<m\right\}=1$。即对任意 $t>0$，$\Phi^*\left(\overline{f},A,B,t\right)=1$。

综上所述，$\overline{f}$ 是 DC2’。

定理 2. 设超空间非自治动力系统 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 一致收敛于 $\left(K(X),\overline{f}\right)$。则对于任意的 $N\in\mathbb{N}$，$\overline{f_{1,\infty}}$ 是 DC2’当且仅当 $\overline{f_{1,\infty}^{[N]}}$ 是 DC2’。

证明：必要性：(1) 因为 $\overline{f_{1,\infty}}$ 是 DC2’，所以存在不可数集 $\Gamma\subseteq K(X)$，使得对于任意不同的 $A,B\in\Gamma$，有 $\Phi\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,\varepsilon\right)=0$，其中 $\varepsilon>0$。因此存在一列递增数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_1^i}(A),\overline{f_1^i}(B)\right)<\varepsilon,0\le i<n_k\right\}=0. \tag{3.1}$$

令 $m_k=\left[\frac{n_k}{N}\right]$。则对每个正整数 k，有 $\xi_{m_k}\left(\overline{f_{1,\infty}^{[N]}},A,B,\varepsilon\right)\le\xi_{n_k}\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,\varepsilon\right)$。又由(2.1)知，当 $k\to\infty$ 时，$\frac{1}{n_k}\xi_{m_k}\left(\overline{f_{1,\infty}^{[N]}},A,B,\varepsilon\right)\to 0$。从而 $\frac{N}{n_k}\xi_{m_k}\left(\overline{f_{1,\infty}^{[N]}},A,B,\varepsilon\right)\to 0$。因此，当 $k\to\infty$ 时，$\frac{1}{m_k}\xi_{m_k}\left(\overline{f_{1,\infty}^{[N]}},A,B,\varepsilon\right)\to 0$。从而 $\Phi\left(\overline{f_{1,\infty}^{[N]}},A,B,\varepsilon\right)=0$。

(2) 对任意的 $t>0$，由引理 1，知，存在 $0<t_1<t$，使得对于任意的 $A,B\in K(X)$，任意的 $i\in\{1,2,\cdots,N\}$ 和任意的 $n\in\mathbb{N}$，当 $d_H(A,B)<t_1$ 时，有 $d_H\left(\overline{f_n^i}(A),\overline{f_n^i}(B)\right)<\frac{t}{2}$。因为 $\overline{f_{1,\infty}}$ 是 DC2’，所以存在不可数集 $\Gamma\subseteq K(X)$，使得对于任意不同的 $A,B\in\Gamma$ 和任意的 $t>0$，有 $\Phi^*\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,t\right)>0$。记 $\Phi^*\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,t\right)=\beta$。则存在一列递增数列 $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$，使得对所有的 l，有

$$\frac{1}{n_l}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_1^i}(A),\overline{f_1^i}(B)\right)<\varepsilon,0\le i<n_l\right\}>\frac{\beta}{2}. \tag{3.2}$$

因此对所有的 l，有

$$\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_1^i}(A),\overline{f_1^i}(B)\right)<t_1,0\le i<n_l\right\}\subseteq\bigcup_{j=0}^{N-1}\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_1^{iN+j}}(A),\overline{f_1^{iN+j}}(B)\right)<t_1,0\le i<\frac{n_l}{N}+1\right\}.$$

上式蕴含存在数列 $\{n_l\}_{l=1}^{\infty}$ 一个子列 $\{n'_l\}_{l=1}^{\infty}$ 和 $0\le j<N$，使得对所有的 l，有

$$\#\left\{i \mid d_H\left(\overline{f_1^{iN+j}}(A),\overline{f_1^{iN+j}}(B)\right)<t_1,0\le i\left[\frac{n'_l}{N}\right]\right\}\ge\frac{1}{N}\#\left\{i \mid d_H\left(\overline{f_1^{i}}(A),\overline{f_1^{i}}(B)\right)<t_1,0\le i<n'_l\right\}.$$

因此，

$$\begin{aligned}&\#\left\{i \mid d_H\left(\overline{f_1^{iN+N}}(A),\overline{f_1^{iN+N}}(B)\right)<t,0\le i<\left[\frac{n'_l}{N}\right]+1\right\}\\&\ge\#\left\{i \mid d_H\left(\overline{f_1^{iN+j}}(A),\overline{f_1^{iN+j}}(B)\right)<t_1,0\le i<\left[\frac{n'_l}{N}\right]+1\right\}\\&\ge\frac{1}{N}\#\left\{i \mid d_H\left(\overline{f_1^{i}}(A),\overline{f_1^{i}}(B)\right)<t_1,0\le i<n'_l\right\}.\end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned}&\Phi^*\left(\overline{f_{1,\infty}^{[N]}},A,B,t\right)\\&\ge\limsup_{l\to\infty}\frac{1}{\left[\frac{n'_l}{N}\right]+1}\#\left\{i \mid d_H\left(\overline{f_1^{iN+N}}(A),\overline{f_1^{iN+N}}(B)\right)<t,0\le i<\left[\frac{n'_l}{N}\right]+1\right\}\\&\ge\limsup_{l\to\infty}\frac{1}{\left[\frac{n'_l}{N}\right]+1}\#\left\{i \mid d_H\left(\overline{f_1^{iN+j}}(A),\overline{f_1^{iN+j}}(B)\right)<t_1,0\le i<\left[\frac{n'_l}{N}\right]+1\right\}\\&\ge\limsup_{l\to\infty}\frac{1}{N\left[\frac{n'_l}{N}\right]+N}\#\left\{i \mid d_H\left(\overline{f_1^{i}}(A),\overline{f_1^{i}}(B)\right)<t_1,0\le i<n'_l\right\}\\&>\frac{\beta}{2}\\&>0\end{aligned}$$

充分性：(1) 因为 $\overline{f_{1,\infty}^{[N]}}$ 是 DC2’，所以存在不可数集 $\Gamma\subseteq K(X)$，使得对于任意不同的 $A,B\in\Gamma$，有 $\Phi\left(\overline{f_{1,\infty}^{[N]}},A,B,s\right)=0$，其中 $s>0$。因此存在一列递增数列 $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{n_k}\#\left\{i \mid d_H\left(\overline{f_1^{Ni}}(A),\overline{f_1^{Ni}}(B)\right)<s,0\le i<n_k\right\}=0. \tag{3.3}$$

由引理 1 知，存在 $0<p<s$，使得对于任意的 $A,B\in K(X)$，任意的 $i\in\{1,2,\cdots,N\}$ 和任意的 $n\in\mathbb{N}$，当 $d_H(A,B)<p$ 时，有 $d_H\left(\overline{f_n^{i}}(A),\overline{f_n^{i}}(B)\right)<s$。即对于任意的 $j\in\mathbb{N}$ 和任意的 $i\in\{1,2,\cdots,N\}$，当 $d_H\left(\overline{f_1^{jN}}(A),\overline{f_1^{jN}}(B)\right)\ge s$ 时，有 $d_H\left(\overline{f_1^{jN-i}}(A),\overline{f_1^{jN-i}}(A)\right)\ge p$。因此，有

$$N\left(\delta_{n_k}\left(\overline{f_{1,\infty}^{[N]}},A,B,s\right)-1\right)\le\delta_{Nn_k}\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,p\right).$$

令 $m_k=Nn_k$。注意到：$\frac{1}{n_k}\delta_{n_k}\left(\overline{f_{1,\infty}^{[N]}},A,B,s\right)=1-\frac{1}{n_k}\xi_{n_k}\left(\overline{f_{1,\infty}^{[N]}},A,B,s\right)$ 和

$\frac{1}{m_k}\delta_{n_k}\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,p\right)=1-\frac{1}{m_k}\xi_{n_k}\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,p\right)$。

结合以上三式可得 $\frac{1}{m_k}\xi_{n_k}\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,p\right)\le\xi_{n_k}\left(\overline{f_{1,\infty}^{[N]}},A,B,s\right)+\frac{1}{n_k}$。再结合(3.2)可得

$\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{m_k}\xi_{n_k}\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,p\right)=0$。因此有 $\Phi\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,p\right)=0$。

(2) 对任意的 $t>0$，因为 $\overline{f_{1,\infty}}$ 是一致收敛，所以由引理 1，知，存在 $0<t_1<t$，使得对于任意的 $A,B\in K(X)$，任意的 $i\in\{1,2,\cdots,N\}$ 和任意的 $n\in\mathbb{N}$，当 $d_H(A,B)<t_1$ 时，有 $d_H\left(\overline{f_n^i}(A),\overline{f_n^i}(B)\right)<t$。因为 $\overline{f_{1,\infty}^{[N]}}$ 是 DC2'，所以存在不可数集 $\Gamma\subseteq K(X)$，使得对于任意不同的 $A,B\in\Gamma$ 和任意的 $s_1>0$，有 $\Phi^*\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,s_1\right)>0$。记 $\Phi^*\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,s_1\right)=\beta$。则存在一列递增数列 $\{m_l\}_{l=1}^{\infty}$，使得对所有的 l，有

$$\frac{1}{m_l}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_1^{Ni}}(A),\overline{f_1^{Ni}}(B)\right)<t_1,0\le i<m_l\right\}>\frac{\beta}{2}. \tag{3.4}$$

又由 t_1 的选择，我们有

$$\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_1^{i}}(A),\overline{f_1^{i}}(B)\right)<t,0\le i<Nm_l\right\}\ge N\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_1^{Ni}}(A),\overline{f_1^{Ni}}(B)\right)<t_1,0\le i<m_l\right\}.$$

结合上述两式，得

$$\begin{aligned}\Phi^*\left(\overline{f_{1,\infty}},A,B,t\right)&\ge\limsup_{l\to\infty}\frac{1}{Nm_l}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_1^{i}}(A),\overline{f_1^{i}}(B)\right)<t,0\le i<Nm_l\right\}\\&\ge\limsup_{l\to\infty}\frac{1}{m_l}\#\left\{i\mid d_H\left(\overline{f_1^{Ni}}(A),\overline{f_1^{Ni}}(B)\right)<t_1,0\le i<m_l\right\}\\&>\frac{\beta}{2}\\&>0.\end{aligned}$$

下述定理 3 给出的条件比文献[15]中定理 6 给出的条件更弱。

定理 3. 设超空间非自治动力系统 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌或 $\left(K(Y),\overline{g_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌。则 $\left(K(X)\times K(Y),\overline{f_{1,\infty}}\times\overline{g_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌。

证明：不妨设 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌，则存在不可数集 $\Gamma\subseteq K(X)$，使得对于任意不同的 $A,B\in\Gamma$，有 $\liminf\limits_{i\to\infty}d_H\left(\overline{f_1^i}(A),\overline{f_1^i}(B)\right)=0,\limsup\limits_{i\to\infty}d_H\left(\overline{f_1^i}(A),\overline{f_1^i}(B)\right)>0$。任取 $C\in K(Y)$，则易知有

$$\liminf_{i\to\infty}d_H\left(\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(A\times C),\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(B\times C)\right)=0,\limsup_{i\to\infty}d_H\left(\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(A\times C),\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(B\times C)\right)>0$$

又显然 $\Gamma\times\{C\}$ 是 $K(X)\times K(Y)$ 中的不可数集，故 $\left(K(X)\times K(Y),\overline{f_{1,\infty}}\times\overline{g_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌。

定理 4. 设 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 和是两个 $\left(K(Y),\overline{g_{1,\infty}}\right)$ 超空间非自治动力系统。若 $\left(K(X)\times K(Y),\overline{f_{1,\infty}}\times\overline{g_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌，则 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌或者 $\left(K(Y),\overline{g_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌。

证明：因为 $\left(K(X)\times K(Y),\overline{f_{1,\infty}}\times\overline{g_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌，故存在不可数集 $\Gamma\times\Lambda\subseteq K(X)\times K(Y)$，使得对于任意不同的 $(A_1\times A_2,B_1\times B_2)\in\Gamma\times\Lambda$，有

$$\liminf_{i\to\infty}d_H\left(\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(A_1\times A_2),\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(B_1\times B_2)\right)=0,$$

$$\limsup_{i\to\infty}d_H\left(\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(A_1\times A_2),\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(B_1\times B_2)\right)>0.$$

易知 Γ 或者 Λ 是不可数集。不妨设 Γ 是不可数集。则取 $(A_1\times A_1,B_1\times B_1)\in\Gamma\times\Lambda$，有

$$\liminf_{i\to\infty}d_H\left(\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(A_1\times A_1),\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(B_1\times B_1)\right)=0,$$

$$\limsup_{i\to\infty}d_H\left(\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(A_1\times A_1),\overline{f_1^i}\times\overline{g_1^i}(B_1\times B_1)\right)>0,$$

即 $\liminf_{i\to\infty} d_H\left(\overline{f_1^i}(A_1),\overline{f_1^i}(B_1)\right)=0,\limsup_{i\to\infty} d_H\left(\overline{f_1^i}(A_1),\overline{f_1^i}(B_1)\right)>0$。因此 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌。

4. 结论与讨论

该论文主要研究了超空间上的非自治动力系统中的分布混沌性质。将经典的点动力学推广到由子集构成的超空间，将时间不变的自治系统推广到时变的非自治系统，这使得理论模型能更好地逼近现实世界中依赖时间和空间分布的复杂过程(如种群生态、数据集演化等)，因此具有重要的理论意义。在强一致收敛的条件下，得到了超空间序列映射是第二型分布混沌(DC2, DC2’)能被极限映射所继承。在一致收敛条件下，证明了超空间非自治动力系统关于第二型分布混沌(DC2, DC2’)具有迭代不变性，得到了超空间非自治动力系统中 $\left(K(X),\overline{f_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌或 $\left(K(Y),\overline{g_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌当且仅当 $\left(K(X)\times K(Y),\overline{f_{1,\infty}}\times\overline{g_{1,\infty}}\right)$ 是 Li-Yorke 混沌。而对于第三型分布混沌，其极限映射能否继承序列映射和其是否具有迭代不变性有待后续进一步研究。

问题 1. 定理 1 和定理 2 对 DC3 是否成立？

基金项目

湖南省教育厅科学研究项目(No.23C0148)。

参考文献

[1] Li, T. and Yorke, J.A. (1975) Period Three Implies Chaos. *The American Mathematical Monthly*, **82**, 985-992. https://doi.org/10.1080/00029890.1975.11994008

[2] Schweizer, B. and Smítal, J. (1994) Measures of Chaos and a Spectral Decomposition of Dynamical Systems on the Interval. *Transactions of the American Mathematical Society*, **344**, 737-754. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1994-1227094-x

[3] Balibrea, F., Smital, J. and Stefankova, M. (2005) The Three Versions of Distributional Chaos. *Chaos, Solitons & Fractals*, **23**, 1581-1583. https://doi.org/10.1016/s0960-0779(04)00351-0

[4] Zeng, H. (2022) A New Version of Distributional Chaos, Distributional Chaos in a Sequence, and Other Concepts of Chaos. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, **32**, 7p. https://doi.org/10.1142/s0218127422500079

[5] Klein, E. (1984) Theory of Correspondences. Wiley.

[6] Kolyada, S. and Snoha, L. (1996) Topological Entropy of Nonautononous Dynamical Systems. *Random Computer and Dynamics*, **4**, 205-233.

[7] Cánovas, J.S. (2011) Li-Yorke Chaos in a Class of Nonautonomous Discrete Systems. *Journal of Difference Equations and Applications*, **17**, 479-486. https://doi.org/10.1080/10236190903049025

[8] Dvořáková, J. (2012) Chaos in Nonautonomous Discrete Dynamical Systems. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, **17**, 4649-4652. https://doi.org/10.1016/j.cnsns.2012.06.005

[9] Wu, X. and Zhu, P. (2013) Chaos in a Class of Non-Autonomous Discrete Systems. *Applied Mathematics Letters*, **26**, 431-436. https://doi.org/10.1016/j.aml.2012.11.003

[10] 杨承宇, 王延庚, 历智明. 关于超空间非自治动力系统敏感依赖性的一些研究[J]. 纯粹数学与应用数学, 2014, 30(2): 201-206.

[11] 吴新星, 朱培勇. 关于两种混沌映射的有限乘积性质[J]. 纯粹数学与应用数学, 2011, 27(1): 129-137.

[12] 杨智, 朱培勇, 吴新星. Li-Yorke 敏感的乘积性和复合性[J]. 纯粹数学与应用数学, 2012, 28(5): 649-954.

[13] 但建军, 金渝光, 高瑾. 关于超空间复合系统混沌性的研究[J]. 西南师范大学学报(自然科学版), 2016, 41(10): 26-31.

[14] 向伟杰. 超空间系统在强一致收敛条件下的相关动力性质的研究[D]: [硕士学位论文]. 重庆: 重庆师范大学 2025.

[15] 冷震北, 罗飞, 高瑾. 关于超空间非自治动力系统混沌的研究[J]. 重庆师范大学学报(自然科学版), 2022, 39(5): 104-109.