Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(1), 86-92
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.161011

Hans汉斯

公共物品动态提供博弈的HK-δ-核心

郑志杰

青岛大学数学与统计学院，山东 青岛

收稿日期：2025年11月17日；录用日期：2025年12月19日；发布日期：2026年1月19日

摘　要

本文在一类n-人公共物品动态提供博弈中，引入了HK-δ-核心解，证明当$n=2$时，HK-δ-核心与γ-核心相等且非空；当$n\geq 3$时，HK-δ-核心作为γ-核心的子集可能为空。

关键词

微分博弈，公共物品，特征函数，核心

The HK-δ-Core of the Dynamic Voluntary Provision of Public Goods

Zhijie Zheng

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: November 17, 2025; accepted: December 19, 2025; published: January 19, 2026

Abstract

This paper presents the HK-δ-core in the dynamic voluntary provision of public goods. It shows that the HK-δ-core is equal to the γ-core and non-empty in the 2-player case; it may be empty as the subset of the γ-core in the multi-player case ($n\geq 3$).

Keywords

Differential Game, Public Goods, Characteristic Function, Core

文章引用: 郑志杰. 公共物品动态提供博弈的 HK-δ-核心[J]. 理论数学, 2026, 16(1): 86-92.
DOI: 10.12677/pm.2026.161011

1. 引言

公共物品的动态提供问题最早由 Fershtman 和 Nitzan (1991) [1]在一个无限期微分博弈中建立。该文证明，在非合作环境中，不论基于开环还是反馈信息结构，搭便车问题总会存在。后续出现若干基于非合作博弈方法研究，如 Wirl (1996)，Fujiwara 和 Matsueda (2009)，Wang 和 Ewald (2010) [2]-[4]等。这些研究表明，由于搭便车效应的存在，公共物品博弈中很难形成有约束力的协议。

Zheng 和 Wang (2025) [5]扩展了 Fershtman 和 Nitzan (1991) [1]的研究，提出基于合作博弈的核心解概念，证明上述公共物品动态提供博弈中 α,β 和 γ -核心的存在性，并证明 α -核心与 β -核心相等且包含 γ -核心。由于核心解同时满足个体理性，联盟理性和 Pareto 有效性，因此具有有趣的反搭便车性质。

不同的信念往往导致不同的联盟值和核心[6]。公共物品动态提供博弈的其他核心解是否存在仍然是重要的开问题。作为 Zheng 和 Wang (2025) [5]工作的继续，本文致力于研究 HK- δ -核心的存在性。HK- δ -核心最早由 Hart 和 Kurz (1983) [7]在研究联盟形成理论时提出。HK- δ -核心由 HK- δ -特征函数确定。HK- δ -特征函数的计算假设当一个新的联盟形成时，外部局中人选择继续保持在原来的联盟中。这一假设与 γ -特征函数的计算有着重要的区别。后者假设当一个新的联盟形成时，外部局中人不再结盟，坚持个体理性的策略选择。

本文首先将 Fershtman 和 Nitzan (1991) [1]模型转化为具有开环信息的可转移效用(TU)联盟博弈，然后基于 Pontryagin 极大值原理计算 HK- δ -特征函数，并与 γ -特征函数进行比较，最后研究 HK- δ -核心的存在性问题。本文证明当 $n=2$ 时，HK- δ -核心与 γ -核心相等且非空；当 $n\geq 3$ 时，HK- δ -核心作为 γ -核心的子集可能是空的。

论文的后续章节安排如下：第 2 章引入动态公共物品博弈模型；第 3 章计算 HK- δ -特征函数；第 4 章讨论 HK- δ -核心的存在性；第 5 章总结。

2. 模型设定与符号说明

假设 n 个局中人致力于某一公共项目，每个局中人随时间持续做出贡献。公共物品的总积累量 K 随时间演化，由以下微分方程描述：

$$\dot{K}(t)=\sum_{i=1}^{n}I_i(t)-\delta K(t), K(0)=K_0, \tag{1}$$

其中 $K(t)$ 表示为时刻 t 公共物品的积累量， $I_i(t)$ 表示局中人在时刻 t 的贡献率， $\delta\geq 0$ 为常值退化因子。无论局中人是否提供公共物品，都能从公共物品的积累中获得收益。局中人 i 在时刻 t 的瞬时支付由下式给出：

$$R_i(K,I_i)=f(K(t))-C(I_i(t)), \tag{2}$$

其中 $f(\cdot)$ 是生产函数且连续单调递增， $C(I_i(t))$ 为局中人 i 的成本函数。

假设每个局中人的目标是最大化其贴现效用，即：

$$\Pi_i=\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-rt}\left[f(K(t))-C(I_i(t))\right]\mathrm{d}t,\quad i=1,2,\cdots,n, \tag{3}$$

其中 r 为贴现因子且为正。

贡献路径的帕累托最优 n 元组由以下问题的解确定：

$$\max_{I_1(t),\cdots,I_n(t)} \sum_{i=1}^{n} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-rt} \left[f\left(K(t)\right) - C\left(I_i(t)\right) \right] \mathrm{d}t, \quad \text{s.t. } (1)$$

每个局中人选择贡献率 $I_i(t)$ 以最大化集体收益。记 K^e 为公共资源积累量的帕累托最优稳态水平。

开环信息的纳什均衡是一个贡献路径的 n 元组 $\left(I_1^*(t),\cdots,I_n^*(t)\right)$，使得对于每一个局中人 i，在给定其他局中人贡献策略的条件下，$I_i^*(t)$ 在约束(1)下最大化收益(3)。 平稳均衡是一个平稳的路径策略均衡，满足 $K(0)=K^*$ 且 $\sum_{j=1}^{n} I_j^*(t)=\delta K^*$。

为确保可解性，假设公共物品供给的生产函数和成本函数是线性二次的，即：

$$f\left(K(t)\right)=(a-K)K, \quad K<a/2, \tag{4}$$

$$C\left(I_i(t)\right)=\frac{1}{2}cI_i^2, \quad i\in N, \tag{5}$$

其中 $a>0$ 且 $c>0$。

式(1)~(5)定义了一个线性二次微分博弈，可参考[8]-[10]。Fershtman 和 Nitzan (1991) [1]已经得到，上述公共物品动态提供博弈的帕累托最优稳态积累量由下式给出：

$$K^e=\frac{n^2 a}{\delta(r+\delta)c+2n^2}, \tag{7}$$

唯一的平稳开环纳什均衡由下式给出：

$$K^*=\frac{na}{\delta(r+\delta)c+2n},$$

$$I^*=\frac{\delta a}{\delta(r+\delta)c+2n},$$

$$\Pi^*=\frac{\left[\left(2n^2-\delta^2\right)a+2\delta(r+\delta)c\right]a}{2r\left[\delta(r+\delta)c+2n\right]^2}. \tag{8}$$

对 $a>0,c>0$，有 $K^*<K^e$。因此，在非合作的环境中，搭便车问题是存在的。

现在假设局中人通过合作实现帕累托有效的结果来提高自身收益，那么全体局中人面临的问题将是合作协议的稳定性。

令 $N=\{1,\cdots,n\}$ 表示 n 个局中人的集合。一个联盟 TU 博弈由集函数 $\{N,v\}$ 给出，它为每个联盟 $M\subseteq N$ 指定一个非负特征函数 $v(M)$，且 $v(\varnothing)=0$。给定联盟博弈，$v(N)$ 的一个分配是一个收益向量 $\theta=\left(\theta_1,\cdots,\theta_n\right)\in R_+^n$，满足 $\sum_{i=1}^{n}\theta_i=v(N)$，其中 θ_i 代表局中人 i 的收益，$i\in N$。如果 $\sum_{i\in M}\theta_i\ge v(M)$，那么称分配 θ 对于联盟 $M\subseteq N$ 是理性的。如果 θ 对所有 $M\subseteq N$ 都是理性的，则该分配属于核心。因此，核心由下式定义：

$$C(N,v)=\left\{\theta\in R_+^n \mid \sum_{i\in M}\theta_i\ge v(M), \forall M\subset N, \sum_{i=1}^{n}\theta_i=v(N)\right\}.$$

为得到合作博弈 $\{N,v\}$ 的核心解，需针对所有 $M\subseteq N$ 计算特征函数 $v(M)$。不同的核心的源于特征函数 $v(M)$ 的不同定义方式[6]。

在 γ-信念下[7]，当联盟 M 形成时，$N\setminus M$ 中的局中人将选择“各自为战”的策略。因此，求解 $v(M)=v^{\gamma}(M)$ 涉及求解一个 $(n-m+1)$-人博弈问题。下面的引理 1 可参考 Zheng 和 Wang (2025) [5]。

引理 1. 对于(1)~(5)定义的公共物品动态提供博弈的任意联盟 $M \subseteq N$ (**$|M| = m$**)**，其** γ **-特征函数由下式给出：**

$$v^{\gamma}(M) = \frac{m\left[2\left(m^2+n-m\right)^2 + m^2\delta(2r+\delta)c + 2(n-m)\delta(r+\delta)c\right]a^2}{2r\left[\delta(r+\delta)c + 2(n-m) + 2m^2\right]^2}, \tag{1}$$

平稳的公共物品积累量以及局中人相应的贡献率分别为：

$$K^{\gamma} = \frac{\left(m^2+n-m\right)a}{\delta(r+\delta)c + 2(n-m) + 2m^2}, \tag{10}$$

$$I_{i,M}^{\gamma} = \frac{m\delta a}{\delta(r+\delta)c + 2(n-m) + 2m^2}, i \in M, \tag{11}$$

$$I_j^{\gamma} = \frac{\delta a}{\delta(r+\delta)c + 2(n-m) + 2m^2}, j \in N \setminus M. \tag{12}$$

3. HK-δ-特征函数

在 HK-δ-信念下，当联盟 M 形成时，外部局中人选择继续留在联盟 $N \setminus M$ 中。因此，求解 HK-δ-特征函数问题即为求解 2-人博弈的纳什均衡问题： M 作为一个局中人， $N \setminus M$ 则作为另一个局中人。

引理 2. 对于(1)~(5)定义的公共物品动态提供博弈的任意联盟 $M \subseteq N$ (**$|M| = m$**)**，其 HK-**δ **-特征函数由下式给出：**

$$v^{\delta}(M) = \frac{2m\left[m^2+(n-m)^2\right]\left[m^2+(n-m)^2+c\delta(r+\delta)\right]a^2 - m(am\delta)^2 c}{2r\left[\delta(r+\delta)c + 2(n-m)^2 + 2m^2\right]^2}, \tag{13}$$

平稳的公共物品积累量以及联盟 M **与联盟** $N \setminus M$ **中局中人相应的贡献率分别为：**

$$K^{\delta} = \frac{\left[m^2+(n-m)^2\right]a}{\delta(r+\delta)c + 2(n-m)^2 + 2m^2}, \tag{14}$$

$$I_{i,M}^{\delta} = \frac{m\delta a}{\delta(r+\delta)c + 2(n-m)^2 + 2m^2}, i \in M, \tag{15}$$

$$I_j^{\delta} = \frac{(n-m)\delta a}{\delta(r+\delta)c + 2(n-m)^2 + 2m^2}, j \in N \setminus M. \tag{16}$$

证明：为计算 HK-δ-特征函数，需要针对任意联盟 $M \subseteq N$，求解下述问题的纳什均衡：

$$\max_{I_i(t), i\in M} \sum_{i\in M} \Pi_i = \max_{I_i(t), i\in M} \sum_{i\in M} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-rt}\left[(a-K)K - \frac{cI_i^2}{2}\right]\mathrm{d}t,$$

$$\max_{I_j(t), j\in N\setminus M} \Pi_j = \max_{I_j(t), j\in N\setminus M} \sum_{j\in N\setminus M} \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-rt}\left[(a-K)K - \frac{cI_j^2}{2}\right]\mathrm{d}t,$$

s.t.

$$\dot{K}(t) = \sum_{i\in N} I_i(t) - \delta K(t), \quad K(0) = K_0.$$

省略时间参数 t，分别写出联盟 M 和联盟 $N \setminus M$ 的当前值哈密顿函数：

$$H_M^{\delta}\left(I_1,\cdots,I_n,K,\mu_M\right)=\sum_{i\in M}\left[\left(a-K\right)K-\frac{cI_i^2}{2}\right]+\mu_M\left(\sum_{i\in N}I_i-\delta K\right),$$

$$H_{N\setminus M}^{\delta}\left(I_1,\cdots,I_n,K,\mu_{N\setminus M}\right)=\sum_{j\in N\setminus M}\left[\left(a-K\right)K-\frac{cI_j^2}{2}\right]+\mu_{N\setminus M}\left(\sum_{i\in N}I_i-\delta K\right),$$

其中 μ_M 和 $\mu_{N\setminus M}$ 为伴随变量。

假设内点解存在，则开环纳什均衡的必要条件包括：

$$\dot{K}\left(t\right)=\sum_{i\in N}I_i\left(t\right)-\delta K\left(t\right),\quad K\left(0\right)=K_0,\tag{17}$$

$$\dot{\mu}_M=\left(r+\delta\right)\mu_M-am+2mK,\tag{18}$$

$$\dot{\mu}_{N\setminus M}=\left(r+\delta\right)\mu_{N\setminus M}-a\left(n-m\right)+2\left(n-m\right)K,\tag{19}$$

$$\frac{\partial H_M^{\delta}}{\partial I_i}=0\Rightarrow\mu_M=cI_i,\quad i\in M,\tag{20}$$

$$\frac{\partial H_{N\setminus M}^{\delta}}{\partial I_j}=0\Rightarrow\mu_{N\setminus M}=cI_j,\quad j\in N\setminus M,\tag{21}$$

$$\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-rt}\mu_M\left(t\right)=\lim_{t\to\infty}\mathrm{e}^{-rt}\mu_{N\setminus M}\left(t\right)=0.\tag{22}$$

对(20)关于时间 t 求导，并将 $\dot{\mu}_M$ 和 μ_M 代入(18)，可得：

$$c\dot{I}_i=\left(r+\delta\right)cI_i-am+2mK,\quad i\in M.\tag{23}$$

对(21)关于时间 t 求导，并将 $\dot{\mu}_{N\setminus M}$ 和 $\mu_{N\setminus M}$ 带入(19)，可得：

$$c\dot{I}_j=\left(r+\delta\right)cI_j-a\left(n-m\right)+2\left(n-m\right)K,\quad j\in N\setminus M.\tag{24}$$

分别由联盟 M 和联盟 $N\setminus M$ 中局中人的对称性，并注意到在稳态点处有 $\dot{I}_i\left(t\right)=\dot{I}_j\left(t\right)=\dot{\mu}_M=\dot{\mu}_{N\setminus M}=0$ ($i\in M,j\in N\setminus M$)。通过(17)和(23)~(24)求得(14)~(16)中的平稳积累量以及局中人的贡献率。在联盟 M 的目标函数中代入公共物品的平稳积累量以及局中人的贡献率，得到由(13)给出的 HK-δ-特征函数。引理 2 证毕。

推论 1. 在(1)~(5)定义的动态公共物品博弈中，$v^{\delta}\left(N\right)=v^{\gamma}\left(N\right)$；当 $\left|M\right|=n-1$ 时，$v^{\delta}\left(M\right)=v^{\gamma}\left(M\right)$。对满足 $\left|M\right|<n-1$ 的联盟 M，HK-δ-特征函数值严格大于 γ-特征函数值，即 $v^{\delta}\left(M\right)>v^{\gamma}\left(M\right)$。因此，当 $n=2$ 时，HK-δ-核心与 γ-核心相等；当 $n\ge 3$ 时，HK-δ-核心为 γ-核心的子集。

证明：根据 γ-特征函数值(9)与 HK-δ-特征函数值(13)，令

$$\begin{aligned}P\left(m\right)&=\left[v^{\delta}\left(M\right)-v^{\gamma}\left(M\right)\right]\frac{2r\left[\delta\left(r+\delta\right)c+2\left(n-m\right)^2+2m^2\right]^2}{ma^2}\\&=2\left[A^2+xA-\left(m^2+n-m\right)^2-xm^2-x\left(n-m\right)\right],\end{aligned}$$

其中：$A=m^2+\left(n-m\right)^2$，$x=\delta\left(r+\delta\right)c$，$y=c\delta^2$，$x>y>0$。化简得：

$$P\left(m\right)=2\left(n-m\right)\left(n-m-1\right)\left[m^2+\left(n-m\right)^2+m^2+n-m+x\right].$$

由于 $m^2+\left(n-m\right)^2>0$，$m^2+n-m>0$ 且 $x=\delta\left(r+\delta\right)c>0$，故方括号内表达式为正。从而，

$$v^{\delta}\left(M\right)-v^{\gamma}\left(M\right)=P\left(m\right)\frac{ma^2}{2r\left[\delta\left(r+\delta\right)c+2\left(n-m\right)^2+2m^2\right]^2}\begin{cases}>0, & m\le n-2,\\=0, & m=n-1,\ m=n.\end{cases}$$

推论 1 得证。

4. HK-δ-核心的存在性

第 3 章，我们计算了 HK-δ-特征函数值，并确定了 HK-δ-核心与 γ-核心的关系。本章讨论 HK-δ-核心的存在性。由 Moulin (1981) [11]可知，一个对称博弈具有非空的核心，当且仅当大联盟具有最大的平均收益，即对于任意 $M \subseteq N$，$v^{\delta}(M)/m \le v^{\delta}(N)/n$ 成立，其中 $|M| = m$。由推论 1 可知 HK-δ-核心与 γ-核心在 2- 人博弈中相等；Zheng 和 Wang (2025) [5]已证明在(1)~(5)定义的公共物品动态提供博弈中 γ-核心是非空的。从而得到：

定理 1. 在(1)~(5)给出的 n-人公共物品动态提供博弈中，当 $n = 2$ 时，HK-δ-核心非空。

下面将给出 n-人公共物品动态提供博弈中 HK-δ-核心存在以及不存在的两个数值例子。

例 1. 考虑一个 3-人公共物品动态提供博弈，参数为 $a = 3, c = 2, r = 0.1, \delta = 0.5$。根据引理 2，我们计算出每个联盟 $M \subseteq N$ 的特征函数值，如表 1 所示。

Table 1. The value of the HK-δ-characteristic function in Example 1
表 1. 例 1 中的 HK-δ-特征函数值

$\lvert M \rvert$	$v^{\delta}(M)$	$v^{\delta}(M)/m$
1	22.227661	22.227661
2	43.253827	21.626913
3	65.673777	21.891259

由表 1 可以看到，当 $|M| = 1$ 时，$v^{\delta}(3)/3 < v^{\delta}(1)$。因此，HK-$\delta$-核心是空的。

例2. 考虑一个 3-人公共物品动态提供博弈，参数为 $a = 3, c = 2, r = 5, \delta = 0.5$。根据引理 2，我们计算出每个联盟 $M \subseteq N$ 的特征函数值，如表 2 所示。

Table 2. The value of the HK-δ-characteristic function in Example 2
表 2. 例 2 中的 HK-δ-特征函数值

$\lvert M \rvert$	$v^{\delta}(M)$	$v^{\delta}(M)/m$
1	0.391467	0.391467
2	0.771696	0.385848
3	1.254052	0.418017

由表 2 可得，$v^{\delta}(1) < v^{\delta}(3)/3$，$v^{\delta}(2)/2 < v^{\delta}(3)/3$。因此，HK-$\delta$-核心非空。

结合例 1 与例 2 的数值例子可得下述结论。

定理 2. 在(1)-(5)定义的 n-人公共物品动态提供博弈中，当 $n \ge 3$ 时，HK-δ-核心可能是空的。

5. 结论

本文在一个线性二次的公共物品动态提供微分博弈中，引入了 HK-δ-核心解概念。在合作博弈的框架下，首先计算了 HK-δ-特征函数值，并比较了 HK-δ-特征函数值与 γ-特征函数值的大小关系，明确了 HK-δ-核心与 γ-核心的关系，最后证明当 $n = 2$ 时，HK-δ-核心非空；当 $n \ge 3$ 时，HK-δ-核心可能是空的。本文的结果有待扩展到其他的核心解概念[6]以及常数替代弹性的情形[3]。

参考文献

[1] Fershtman, C. and Nitzan, S. (1991) Dynamic Voluntary Provision of Public Goods. *European Economic Review*, **35**, 1057-1067. https://doi.org/10.1016/0014-2921(91)90004-3

[2] Wirl, F. (1996) Dynamic Voluntary Provision of Public Goods: Extension to Nonlinear Strategies. *European Journal of Political Economy*, **12**, 555-560. https://doi.org/10.1016/s0176-2680(96)00016-x

[3] Fujiwara, K. and Matsueda, N. (2009) dynamic Voluntary Provision of Public Goods: A Generalization. *Journal of Public Economic Theory*, **11**, 27-36. https://doi.org/10.1111/j.1467-9779.2008.01395.x

[4] Wang, W. and Ewald, C. (2009) Dynamic Voluntary Provision of Public Goods with Uncertainty: A Stochastic Differential Game Model. *Decisions in Economics and Finance*, **33**, 97-116. https://doi.org/10.1007/s10203-009-0100-0

[5] Zheng, Z. and Wang, L. (2025) Dynamic Voluntary Provision of Public Goods: Core Solution. Working Paper, Qingdao University.

[6] Zhao, J. (2018) TU Oligopoly Games and Industrial Cooperation. In: Corchón, L. and Marini, M., Eds., *Handbook of Game Theory and Industrial Organization*, *Volume I*, Edward Elgar Publishing, 392-422. https://doi.org/10.4337/9781785363283.00022

[7] Hart, S. and Kurz, M. (1983) Endogenous Formation of Coalitions. *Econometrica*, **51**, 1047-1064. https://doi.org/10.2307/1912051

[8] Fershtman, C. and Kamien, M.I. (1987) Dynamic Duopolistic Competition with Sticky Prices. *Econometrica*, **55**, 1151-1164. https://doi.org/10.2307/1911265

[9] Reynolds, S.S. (1987) Capacity Investment, Preemption and Commitment in an Infinite Horizon Model. *International Economic Review*, **28**, 69-88. https://doi.org/10.2307/2526860

[10] Reynolds, S.S. (1991) Dynamic Oligopoly with Capacity Adjustment Costs. *Journal of Economic Dynamics and Control*, **15**, 491-514. https://doi.org/10.1016/0165-1889(91)90003-j

[11] Moulin, H. (1981) Théorie des jeux pour l'économie et la politique, P-200. Hermann.