Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(12), 148-153
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1512303

Hans汉斯

左#-富足半群上的偏序

刘海军，宋　杰*

韶关学院数学与统计学院，广东　韶关

收稿日期：2025年11月19日；录用日期：2025年12月15日；发布日期：2025年12月23日

摘　要

本文主要研究左#-富足半群上的偏序≤。我们给出这种偏序的若干刻画和性质，并证明了左#-富足半群上偏序关于乘法的(左，右)相容性定理，这些结果推广了正则半群和富足半群上自然偏序的相关理论。

关键词

Green#-关系，左#-富足半群，偏序

The Partial Order on Left #-Abundant Semigroups

Haijun Liu, Jie Song*

School of Mathematics and Statistics, Shaoguan University, Shaoguan Guangdong

Received: November 19, 2025; accepted: December 15, 2025; published: December 23, 2025

Abstract

The aim of this paper is to study the partial order ≤ on left#-abundant semigroups. We obtain several descriptions and properties for this kind of partial order and show the (left, right) compatible theorem with respect to the multiplication on left#-abundant semigroups. These results enrich the related theory with respect to the natural partial orders on regular semigroups and abundant semigroups.

Keywords

Green#-Relations, Left#-Abundant Semigroup, Partial Order

*通讯作者。

文章引用: 刘海军, 宋杰. 左#-富足半群上的偏序[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 148-153.
DOI: 10.12677/pm.2025.1512303

1. 引言

偏序是半群理论的重要概念和有用工具，许多学者讨论了不同半群上的偏序[1]-[7]。1980 年，Nambooripad [1]首先研究了正则半群上的偏序。Fountain [8]在 1981 年定义了富足半群，这类半群是正则半群的推广。之后，Lawson [2]类比 Nambooripad 正则半群上的偏序定义了富足半群的自然偏序，并考虑了该偏序关于半群乘法的相容性条件。在此基础上，郭－罗[3]和郭－岑[4]分别对富足半群和 rpp 上的偏序作了进一步的讨论，得到较好的理论成果。受此启发，本文将引入左(右)#-富足半群和#-富足半群，它们是正则半群，左(右)富足半群以及富足半群的共同推广。若干准备知识之后，我们对左#-富足半群上的偏序开展研究，首先给出左#-富足半群上偏序 $\le$ 的定义和性质，然后考虑这种偏序的相容性，并证明偏序关于半群乘法的(左，右)相容性定理。最后，我们得到正则半群上的自然偏序及左富足半群上的偏序 $\le_r$ 与左#-富足半群上偏序 $\le$ 是一致的。

2. Green#-关系与偏序

下文将引用文献[8] [9]中的符号和术语，未指明的记号见文献[9]。

我们熟知 Green-关系 $\mathcal{L}$，$\mathcal{R}$，$\mathcal{H}$ 和 $\mathcal{D}$ 是研究正则半群的有效工具。为了讨论更广的半群，Fountain [8]推广 Green-关系为 Green $*$-关系 $\mathcal{L}^*$，$\mathcal{R}^*$，$\mathcal{H}^*$ 和 $\mathcal{D}^*$，它们为讨论富足半群的结构和性质奠定了基础。进一步，唐[10]定义 Green $**$-关系 $\mathcal{L}^{**}$，$\mathcal{R}^{**}$，$\mathcal{H}^{**}$ 和 $\mathcal{D}^{**}$，并研究了 C-wrpp 半群的结构定理。一般地，$\mathcal{L}\subseteq\mathcal{L}^*\subseteq\mathcal{L}^{**}$ 和 $\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}^*\subseteq\mathcal{R}^{**}$。随后，孔－岑[11]和岑－杜－郭[12]等引入 Green #-关系 $\mathcal{L}^\#$，$\mathcal{R}^\#$，$\mathcal{H}^\#$ 和 $\mathcal{D}^\#$。其中，

$$\mathcal{L}^\# = \left\{(a,b)\in S\times S : \left(\forall x,y\in S^1\right)(ax,ay)\in\mathcal{L} \Leftrightarrow (bx,by)\in\mathcal{L}\right\},$$

$$\mathcal{R}^\# = \left\{(a,b)\in S\times S : \left(\forall x,y\in S^1\right)(xa,ya)\in\mathcal{R} \Leftrightarrow (xb,yb)\in\mathcal{R}\right\},$$

$$\mathcal{H}^\# = \mathcal{L}^\#\cap\mathcal{R}^\#,\ \ \mathcal{D}^\# = \mathcal{L}^\#\vee\mathcal{R}^\#.$$

它们虽然在形式上与 Green $**$-关系有些相似，但二者之间是有本质区别的。为叙述方便，记 a^* 和 a^+ 为与 a 分别有 $\mathcal{L}^\#$ 和 $\mathcal{R}^\#$ 关系的幂等元，$L_a^\#\left(R_a^\#\right)$ 表示半群 S 包含 a 的 $\mathcal{L}^\#\left(\mathcal{R}^\#\right)$-类，$\mathrm{Reg}(S)$ 表示半群 S 的正则元集，$E(S)$ 则代表 S 的幂等元集。据[11] [12]知，$\mathcal{L}^\#$ 为右同余，而 $\mathcal{R}^\#$ 为左同余。一般地，$\mathcal{L}\subseteq\mathcal{L}^\#$，$\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}^\#$。若 S 是正则半群，则 $\mathcal{L}=\mathcal{L}^\#$，$\mathcal{R}=\mathcal{R}^\#$。

定义 2.1 半群 S 称为左#-富足半群，若满足下列条件：

(1) 每个 $\mathcal{R}^\#$-类中至少含有一个幂等元；(2) 对任意 $e\in E\left(R_a^\#\right)$，$ea=a$。

类似地，我们可定义右#-富足半群。既左#-富足又右#-富足的半群称为#-富足半群。由定义 2.1，我们可得以下结果。

命题 2.2 设 S 为#-富足半群，若 $a\in S$ 且 $e\in E(S)$，则下列各款成立：

(1) $ea=a\Leftrightarrow ea^+=a^+$；特别地，$a^+(ab)^+=(ab)^+$；

(2) $ae=a\Leftrightarrow a^*e=a^*$；特别地，$(ab)^*b^*=(ab)^*$。

证明：由于(2)与(1)对偶，所以只证(1)。注意到 $a^+a=a$ 和 $a^+ab=ab$，仅须证 $ea=a$ 蕴含 $ea^+=a^+$。设 $ea=a$，则有 $ea\mathcal{R}a$。因为 $a\mathcal{R}^\#a^+$，所以 $ea^+\mathcal{R}a^+$。于是可知，$a^+\cdot ea^+=ea^+$。进一步，我们可得 $ea^+\in E(S)$，从而 $ea^+=ea^+\cdot a^+=a^+$。

类比右 $*$-理想，称半群 S 的右理想 I 称为右#-理想，若对任意 $x\in I$，$R_x^\#\subseteq I$。记元素 a 生成的右#-

理想为 $R^{\#}(a)$。据[13]和[14]知，$a\mathcal{R}^{\#}b$ 当且仅当 $R^{\#}(a)=R^{\#}(b)$。

引理 2.3 设 S 为左#-富足半群，则对任意 $e\in E(S)$，eS 是右#-理想，并且 $R^{\#}(e)=eS$。

证明：任取 $a\in eS$，则 $ea=a$。据命题 2.2 知，$ea^{+}=a^{+}$。设 $x\in R_a^{\#}$，则 $x^{+}\mathcal{R}a^{+}$。因此，我们有 $ex^{+}=ea^{+}x^{+}=a^{+}x^{+}=x^{+}$。再由命题 2.2 得，$x=ex$。即 $x\in eS$，也就是说，$R_a^{\#}\subseteq eS$。故 eS 是 S 的右#-理想。另一方面，$R^{\#}(e)$ 包含 e 的最小右#-理想，所以 $R^{\#}(e)\subseteq eS$。注意到 eS 是由 e 生成的右理想，因而 $eS\subseteq R^{\#}(e)$。结合上述，我们可得 $R^{\#}(e)=eS$。

据[8]知，包含 e 的最小右#-理想 $R^{*}(e)=eS$。因此，若 S 是(左)富足半群，则由引理 2.3 得，$\mathcal{R}^{*}=\mathcal{R}^{\#}$。

一般地，半群 S 幂等元 $E(S)$ 上的自然偏序为 ω。即对任意 $e,f\in E(S)$，$e\omega f$ 当且仅当 $ef=e=fe$。下面讨论左#-富足半群上的偏序，首先我们定义 $\le$ 关系。

定义 2.4 令 S 为左#-富足半群。若任给 $a,b\in S$，则

$a\le b$ 当且仅当 $R^{\#}(a)\subseteq R^{\#}(b)$ 且存在 $e\in\left(E(S)\cap R_a^{\#}\right)$，使得 $a=eb$。

命题 2.5 设 S 为左#-富足半群，则 $\le$ 是 S 上的偏序。特别地，$\le|_{E(S)}=\omega$。

证明：据定义，自反性显然。假设 $a,b\in S$，$a\le b$ 且 $b\le a$，则存在 $e\in E\left(R_a^{\#}\right), f\in\left(R_b^{\#}\right)$ 使得 $a=eb$，$b=fa$。由定义得 $a\mathcal{R}^{\#}b$，于是 $e\mathcal{R}^{\#}b$，故 $a=eb=b$。因此，$\le$ 是反对称的。若 $c\in S$ 且 $a\le b$，$b\le c$，则存在 $g\in E\left(R_a^{\#}\right)$ 和 $h\in\left(R_b^{\#}\right)$ 使得 $a=gb, b=hc$，从而 $a=ghc$。显然，$R^{\#}(a)\subseteq R^{\#}(c)$。注意到 $R^{\#}(g)=R^{\#}(a)\subseteq R^{\#}(b)=R^{\#}(h)$，于是 $hg=g$。进一步可得，$gh\in E(S)$ 且 $gh\mathcal{R}g\mathcal{R}^{\#}a$。这说明 $\le$ 具有传递性。故 $\le$ 是 S 上的偏序。最后，据定义知，$e\le f$ 当且仅当 $e\omega f$。

定理 2.6 设 S 为左#-富足半群且 $a,b\in S$，则下列叙述等价：

(1) $a\le b$；

(2) 对任意 $b^{+}\in R_b^{\#}$，存在 $a^{+}\in R_a^{\#}$ 且 $a^{+}\omega b^{+}$ 使得 $a=a^{+}b$；

(3) 对任意 $b^{+}\in R_b^{\#}$，存在 $e\in E(S)$ 且 $e\omega b^{+}$ 使得 $a=eb$。

证明：(1)$\Rightarrow$(2)设 $a\le b$，则 $R^{\#}(a)\subseteq R^{\#}(b)$ 且存在 $e\in E\left(R_a^{\#}\right)$，使得 $a=eb$。任取 $f\in E\left(R_b^{**}\right)$，则 $R^{\#}(e)=R^{\#}(a)\subseteq R^{\#}(b)=R^{\#}(f)$。由引理 2.3 知，$eS\subseteq fS$，于是 $fe=e$。进而，$e\omega ef$ 且 $ef\mathcal{R}e$。即 $ef\mathcal{R}^{\#}e\mathcal{R}^{\#}a$。因此，$a=eb=efb=a^{+}b$。

(2)$\Rightarrow$(1)据假设知，$a=a^{+}b=b^{+}a^{+}b$。因为 $R^{\#}\left(a^{+}\right)=R^{\#}\left(b^{+}a^{+}\right)\subseteq R^{\#}\left(b^{+}\right)$，所以 $R^{\#}(a)=R^{\#}\left(a^{+}\right)\subseteq R^{\#}\left(b^{+}\right)=R^{\#}(b)$，即 $R^{\#}(a)\subseteq R^{\#}(b)$。由定义得 $a\le b$ 成立。

(2)$\Rightarrow$(3)显然成立。

(3)$\Rightarrow$(2)由假设得，$ea=a$，据知，$ea^{+}=a^{+}$。从而得，$a^{+}e\in E(S)$ 并且 $a^{+}e\mathcal{R}^{\#}a^{+}\mathcal{R}^{\#}a$。另一方面，$a=a^{+}a=a^{+}eb$。注意到 $a^{+}e\cdot b^{+}=a^{+}e$ 且 $b^{+}\cdot a^{+}e=b^{+}\cdot ea^{+}e=b^{+}e\cdot a^{+}e=a^{+}e$。

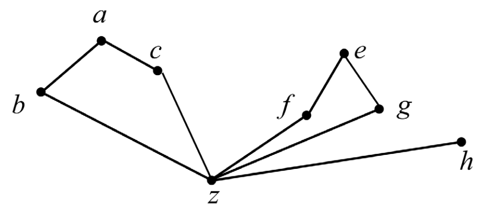
即 $a^{+}e\omega b^{+}$。因此，(2)成立。

下面我们给出左#-富足半群及其偏序关系的例子，并画出 $\le$ 的 Hasse 图。

例 2.7 设 S 是 8 元素半群，它的乘法表如下图：

	e	f	g	h	z	a	b	c
e	e	f	g	z	z	a	b	c
f	f	f	z	z	z	b	b	z
g	g	z	g	z	z	c	z	c
h	z	z	z	h	z	z	z	z
z	z	z	z	z	z	z	z	z
a	z	z	z	a	z	z	z	z
b	z	z	z	b	z	z	z	z
c	z	z	z	c	z	z	z	z

据[9]知，S 是适当半群，自然是(左)#-富足半群，其中 $E(S)=\{e,f,g,h,z\}$。$\mathcal{R}^{\#}$-类是 $\{e,a\}$，$\{f,b\}$，$\{g,c\}$，$\{h\}$，$\{z\}$；$\mathcal{L}^{\#}$-类 $\{a,b,c,h\}$，$\{e\}$，$\{f\}$，$\{g\}$，$\{z\}$。进一步得 $\le$ 的 Hasse 图：



类比([2]，命题 2.7)，我们不难证明左#-富足半群上的偏序具备以下性质。

命题 2.8 设 S 为左#-富足半群且 $a,b\in S$，$e\in E(S)$，则有：

(1) 若 $a\le e$，则 $a\in E(S)$；

(2) 若 $a\le b$ 且 $a\mathcal{R}^{\#}b$，则 $a=b$；

(3) 若 $a\le b$ 且 $b\in \mathrm{Reg}(S)$，则 $a\in \mathrm{Reg}(S)$。

3. 相容性

讨论偏序的相容性是半群序理论的重要组成部分，本节将主要讨论左#-富足半群上偏序 $\le$ 的(左，右)相容性。设 R 为半群 S 上的二元关系，称 R 关于乘法左(右)相容，任给 $a,b,c,d\in S$，若 aRb 蕴含 $caRcb(acRbc)$；若 aRb,cRd 蕴含 $acRbd$ 则称 R 关于 S 的乘法相容。易知，R 关于乘法相容当且仅当 R 左相容和右相容。

类比适当半群[9]和 $\mathcal{R}$-幂单半群[4]，我们有下列半群的定义。

定义 3.1 称 $E(S)$ 构成右正则带的半群 S 为 $\mathcal{L}$-幂单半群；称 $E(S)$ 构成半格的#-富足半群为#-适当半群。

定义 3.2 半群 S 称为局部 $\mathcal{P}$ 半群，若任给 $e\in E(S)$，局部幺子半群 eSe 具有 $\mathcal{P}$ 性质。

定理 3.3 设 S 是左#-富足半群，则 $\le$ 右相容当且仅当 S 为局部 $\mathcal{L}$-幂单半群。

证明：(充分性) 令 $a,b,c\in S$ 且 $a\le b$，则对任给 $b^+\in E(R_b^{\#})$，存在 $a^+\in\omega(b^+)$ 使得 $a=a^+b$ 于是，$ac=a^+bc$。由于 $b^+bc=bc$，据命题 2.2，$b^+(bc)^+=(bc)^+$。进而可得

$$\left((bc)^+b^+\right)^2=(bc)^+\cdot b^+(bc)^+\cdot b^+=(bc)^+b^+.$$

另一方面，由 $(bc)^+b^+\cdot(bc)^+=(bc)^+,(bc)^+\cdot(bc)^+b^+=(bc)^+b^+$ 知，$(bc)^+b^+\mathcal{R}(bc)^+$。因为 $bc\mathcal{R}^{\#}(bc)^+$，所以 $bc\mathcal{R}^{\#}(bc)^+b^+$。显然 $a^+,(bc)^+b^+\in E(b^+Sb^+)$。据已知 $E(b^+Sb^+)$ 是右正则带知，$a^+(bc)^+b^+\in E(b^+Sb^+)$。注意到 $a^+(bc)^+b^+=(a^+b^+)(bc)^+b^+$。据假设得，

$$(bc)^+b^+\cdot a^+(bc)^+b^+=b^+(bc)^+b^+\cdot a^+\cdot b^+(bc)^+b^+=a^+(bc)^+b^+.$$

因此，$a^+(bc)^+b^+\omega(bc)^+b^+$。进一步，$ac=a^+bc\mathcal{R}^{\#}a^+(bc)^+b^+,ac=a^+(bc)^+b^+(bc)$，从而，我们有 $ac\le bc$ 成立。

(必要性) 设 $e\in E(S)$，只须证明 $E(eSe)$ 为右正则带。令 $f,g\in E(eSe)$，显然 $f\le e,g\le e$。由 $\le$ 右相容得，$fg\le g,gf\le f$。故有 $fg,gf\in E(eSe)$。进而，$fgf\le gf$ 成立。又因 $gf\cdot fgf=gf\cdot gf=gf$，$fgf\cdot gf=f\cdot gf=gf$，所以 $gf\le fgf$。故我们有 $fgf=gf$。因此 S 是局部 $\mathcal{L}$-幂单幺半群。

命题 3.4 设 S 为左#-富足半群，则 $\le$ 左相容当且仅当对于 $a\in S,e\in E(S)$ 且 $h\omega e$，存在 $f\omega(ae)^+$，使得 $ah=fae$。

证明：(必要性) 设$\le$是左相容，取$a\in S,e\in E(S)$且$h\omega e$。由命题2.5知，$h\le e$。于是 $ah\le ae$，再据定理2.6，存在$f\omega(ae)^{+}$，使得$ah=fae$。

(充分性) 令$a,b,c\in S$且$a\le b$，则存在$a^{+}\omega b^{+}$使得$a=a^{+}b$。注意到$\le|_{E(S)}=\omega$。故$a^{+}\le b^{+}$。据假设存在$e\omega(cb^{+})^{+}$使得$ca^{+}=ecb^{+}$。进而有$ca=ca^{+}b=ecb^{+}b=ecb$。因为$\mathcal{R}^{\#}$是左同余，所以$cb\mathcal{R}^{\#}cb^{+}\mathcal{R}^{\#}(cb^{+})^{+}$。故$ca\le cb$。因此，$\le$关于乘法左相容。

定义3.5 称#-富足半群S满足LA条件，若对任意$g\omega a^{*}$，存在$h\omega a^{+}$，使得$ag=ha$。

推论3.6 令S是#-富足半群。若$\le$关于乘法左相容，则S满足LA条件。

引理3.7 设S为#-富足半群，则任给$e\in E(S)$，局部幺子半群eSe是#-富足半群。

证明：仅证eSe为左#-富足半群。对偶，我们可证得eSe是右#-富足半群。设$a\in eSe$，$ea=a$。据命题2.2知，$ea^{+}=a^{+}$。于是$a^{+}e\in E(S)$且$a^{+}e\mathcal{R}a^{+}\mathcal{R}^{\#}a$。由于$\mathcal{R}\subseteq\mathcal{R}^{\#}$，所以$a^{+}e\mathcal{R}^{\#}a$。注意到$(a^{+}e)a=a^{+}a=a$且$a^{+}e=ea^{+}e\in eSe$。因此，$eSe$为左#-富足半群。

定理3.8 设#-富足半群S满足LA条件，则$\le$相容当且仅当S为局部#-适当半群。

证明：(充分性) 设S为局部#-适当半群。令$a,b\in S$且$a\le b$，对任给$b^{+}\in E(S)$，存在$a^{+}\omega b^{+}$使得$a=a^{+}b$。因此对任意$c\in S$，$ca=ca^{+}b$。注意到$cb^{+}=cb^{+}b^{+}$，据命题2.2可得，$(cb^{+})^{*}b^{+}=(cb^{+})^{*}$。易得，$b^{+}(cb^{+})^{*}\omega b^{+}$。考虑到$b^{+}Sb^{+}$是#-适当半群并且$a^{+},b^{+}(cb^{+})^{*}\in E(b^{+}Sb^{+})$，故
$b^{+}(cb^{+})^{*}\cdot a^{+}=a^{+}\cdot b^{+}(cb^{+})^{*}=a^{+}(cb^{+})^{*}\in E(S)$。进一步，我们有

$$\begin{aligned}\left((cb^{+})^{*}a^{+}(cb^{+})^{*}\right)^{2}&=(cb^{+})^{*}a^{+}(cb^{+})^{*}\cdot(cb^{+})^{*}a^{+}(cb^{+})^{*}\\&=(cb^{+})^{*}\cdot a^{+}(cb^{+})^{*}\cdot a^{+}(cb^{+})^{*}\\&=(cb^{+})^{*}a^{+}(cb^{+})^{*}.\end{aligned}$$

因此$(cb^{+})^{*}a^{+}(cb^{+})^{*}\omega(cb^{+})^{*}$。据假设$S$满足LA条件，故存在$f\omega(cb^{+})^{+}$使得
$f\cdot(cb^{+})=(cb^{+})\cdot(cb^{+})^{*}a^{+}(cb^{+})^{*}$。于是

$$\begin{aligned}ca^{+}&=(cb^{+})\cdot b^{+}(cb^{+})^{*}\cdot a^{+}=(cb^{+})(cb^{+})^{*}\cdot a^{+}b^{+}(cb^{+})^{*}\\&=(cb^{+})\cdot(cb^{+})^{*}a^{+}(cb^{+})^{*}=f(cb^{+})\end{aligned}$$

从而，$ca=ca^{+}b=f\cdot(cb^{+})b=f\cdot cb$。又因$cb\mathcal{R}^{\#}cb^{+}\mathcal{R}^{\#}(cb^{+})^{+}$，从而$ca\le cb$。再据定理3.3，$\le$也是右相容的。故$\le$关于半群$S$的乘法相容。

(必要性)假设$\le$关于S乘法相容，据定理3.3得，S是局部$\mathcal{L}$-幂单半群。因此，对任意$e\in E(S)$，$E(eSe)$构成右正则带。注意到$\le|_{E(S)}=\omega$，所以ω在$E(eSe)$上相容。据([7]，定理1.1)，$E(eSe)$是局部逆幺子半群。由于$eE(eSe)e=E(eSe)$，故$E(eSe)$构成半格。再结合引理3.7得，eSe是#-适当半群。即S为局部#-适当半群。

4. 应用

据([10]，定理6.1.2)知，正则半群S上的自然偏序为：$a\le b$当且仅当$R(a)\subseteq R(b)$且$e\in E(R_a)$，使得$a=eb$。由上文知，若S是正则半群，则$\mathcal{R}^{\#}=\mathcal{R}$。故正则半群上的自然偏序$\le$与左#-富足半群上的偏序$\le$定义等价。如果$S$是左富足半群，则$\mathcal{R}^{*}=\mathcal{R}^{\#}$。由于左富足半群$S$上的偏序为：$a\le_r b$当且仅当$R^{*}(a)\subseteq R^{*}(b)$且$e\in E(R_a^{*})$，使得$a=eb$。同样可得，左富足半群$S$的偏序$\le_r$与左#-富足半群上的偏序$\le$定义等价。因此，据定理3.3得[4]的相关结论。

推论4.1 设S是正则(左富足)半群，则$\le$右相容当且仅当S为局部$\mathcal{L}$-幂单半群。

由[3] [4]可知，满足 LA 条件的富足半群是左 IC 富足半群，而正则半群本身满足 LA 条件。另一方面，#-适当半群是逆半群和适当半群的共同推广，因此由定理 3.8，我们可得[4] [10]的相关结果。

推论 4.2 若 S 是左 IC 富足半群，则 $\leq_r$ 相容当且仅当 S 为局部适当半群；若 S 是正则半群，则 $\leq$ 相容当且仅当局部逆半群。

由[2] [15]知，例 2.7 的半群 S 为左 IC 适当半群，且 $E(S)$ 为半格。任意局部幺半群 eSe 构成半格，因此，S 是(#-)适当的局部逆半群。故 $\leq$ 关于乘法相容。

基金项目

韶关市科技局支持科研工作者项目(230324098034834)；韶关学院自然科学类重点科研项目(SZ2023KJ09)和韶关学院博士科研启动配套项目(406-9900045702)。

参考文献

[1] Nambooripad, K.S.S. (1980) The Natural Partial Order on a Regular Semigroup. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **23**, 249-260. https://doi.org/10.1017/s0013091500003801

[2] Lawson, M.V. (1987) The Natural Partial Order on an Abundant Semigroup. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **30**, 169-186. https://doi.org/10.1017/s001309150002825x

[3] Guo, X.J. and Luo, Y.L. (2005) The Natural Orders on Abundant Semigroups. *Advances in mathematics*, **34**, 297-308.

[4] Guo, X.J. and Shum, K.P. (2006) The Lawson Partial Order on RPP Semigroups. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, **29**, 415-423.

[5] Liu, H.J., Guo, X.J. and Qiu, S.M. (2009) The Natural Partial Orders on WPP Semigroups. *International Mathematical Forum*, **4**, 1563-1572.

[6] Liu, H.J. and Guo, X.J. (2012) The Lawson Partial Order on WRPP Semigroups. *Chinese Quarterly Journal of Mathematics*, **27**, 139-144.

[7] 李春华, 黄华伟, 朱咏前, 李小平. 富足半群上的自然偏序[J]. 江西师范大学学报(自然科学版), 2004(1): 24-26.

[8] Fountain, J. (1982) Abundant Semigroups. *Proceedings of the London Mathematical Society*, **3**, 103-129. https://doi.org/10.1112/plms/s3-44.1.103

[9] Fountain, J. (1979) Adequate Semigroups. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, **22**, 113-125. https://doi.org/10.1017/s0013091500016230

[10] Howie, J.M. (1995) Fundamentals of Semigroup Theory. Clarendon Press.

[11] Xiangdong, T. (1997) On a Theorem of C—WRPP Semigroups. *Communications in Algebra*, **25**, 1499-1504. https://doi.org/10.1080/00927879708825931

[12] Kong, X. and Shum, K.P. (2009) Green ♯-Relations and Normal $\mathcal{H}^{\#}$-Cryptogroups. *Asian-European Journal of Mathematics*, **2**, 637-648. https://doi.org/10.1142/s1793557109000534

[13] Du, L., Guo, Y. and Shum, K. (2010) Green's Relations and Their Generalizations on Semigroups. *Discussiones Mathematicae—General Algebra and Applications*, **30**, 71-89. https://doi.org/10.7151/dmgaa.1163

[14] Du, L. and Shum, K.P. (2003) On Left C-WRPP Semigroups. *Semigroup Forum*, **67**, 373-387. https://doi.org/10.1007/s00233-001-0006-9

[15] Lawson, M.V. (1986) The Structure of Type A Semigroups. *The Quarterly Journal of Mathematics*, **37**, 279-298. https://doi.org/10.1093/qmath/37.3.279