

# 一类随机捕食 - 被捕食模型的持久性与灭绝性研究

孙德称, 孙福芹

天津职业技术师范大学理学院, 天津

收稿日期: 2025年11月19日; 录用日期: 2025年12月10日; 发布日期: 2025年12月17日

## 摘要

为探究环境随机性对种群动态的影响, 本文考虑了一类带有Holling II型功能反应项和Leslie-Gower增长项的混合模型, 且随机噪声仅作用于捕食过程的随机捕食 - 被捕食模型。针对所建模型, 对其有界性、随即持久性与灭绝性进行研究, 通过局部Lipschitz连续性讨论全局正解的唯一性, 利用构造合适的Lyapunov函数来证明模型的有界性, 并结合Itô公式和布朗运动的性质等, 重点分析了模型的随机持久性与灭绝性。结果表明: 捕食者种群是随机最终有界的, 同时被捕食者种群是随机持久的, 且在特定条件下被捕食者种群将以概率1灭绝。

## 关键词

Logistic型捕食 - 被捕食模型, 持久性, 灭绝性

# Research on Persistence and Extinction of a Class of Stochastic Predator-Prey Models

Dechen Sun, Fuqin Sun

School of Sciences, Tianjin University of Technology and Education, Tianjin

Received: November 19, 2025; accepted: December 10, 2025; published: December 17, 2025

## Abstract

To investigate the impact of environmental randomness on population dynamics, this study considers a hybrid stochastic predator-prey model that incorporates a Holling Type II functional response term and a Leslie-Gower growth term, with random noise acting exclusively on the predation process. For the constructed model, research is conducted on its boundedness, stochastic persistence, and extinction. The uniqueness of the global positive solution is discussed by leveraging local

文章引用: 孙德称, 孙福芹. 一类随机捕食-被捕食模型的持久性与灭绝性研究[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 77-91.

DOI: 10.12677/pm.2025.1512296

**Lipschitz continuity; the boundedness of the model is proven through the construction of an appropriate Lyapunov function; and the stochastic persistence and extinction of the model are analyzed in focus by combining Itô's formula, the properties of Brownian motion, and other relevant methods. The results demonstrate that the predator population is stochastically ultimately bounded, while the prey population exhibits stochastic persistence. Furthermore, under specific conditions, the prey population will go extinct with probability one.**

## Keywords

**Logistic-Type Predator-Prey Model, Persistence, Extinction**

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

## 1. 引言

捕食者 - 被捕食者模型是数学生态学的核心研究领域,旨在揭示物种间相互作用的动态规律与生态系统的平衡机制。然而,自然种群的生长与演化不可避免地受到各种环境随机性的干扰,例如气候波动、资源可得性的变化等。这些随机因素会直接影响到种群的出生率、死亡率等关键参数,使得确定性模型的预测与真实观测之间产生偏差。为了更贴合实际,通过引入随机噪声来构建随机微分方程模型,已成为种群生态学研究的一个重要范式[1]-[3]。在各类随机扰动中,由布朗运动驱动的高斯白噪声被广泛用于模拟连续、高频的环境波动[4][5]。现有研究已表明,此类随机性对种群的持久性、灭绝性等长期行为具有决定性影响。

尽管随机模型研究已取得丰硕成果,但对于随机噪声特异性作用于捕食过程的捕食 - 被捕食模型,其动力学行为的理论研究尚不充分。具体而言,噪声如何通过影响捕食者的捕食效率,进而调控整个系统的稳定性、决定被捕食者种群的最终命运,其内在机理有待深入揭示。特别需要指出的是,将随机扰动特异性引入捕食过程,具有明确的生物学意义。在真实的生态系统中,影响捕食效率的因素(如猎物的隐蔽性、捕食者的成功捕杀率等)极易受到环境波动的直接影响。例如,植被覆盖度的变化、光照条件的改变以及短期的气候异常(如风、雾)都可能显著影响捕食者的搜寻和捕获效率,而这些因素通常表现为一种持续的、随机的波动。因此,在模型的功能反应项中引入随机噪声比在种群内在增长率中引入噪声能更精准地刻画环境随机性通过影响种间相互作用关系(即捕食行为)来间接调控种群动态的核心生态学过程。

基于文献[1]的模型,本文考虑了一类带有 Holling II 型功能反应项和 Leslie-Gower 增长项的混合模型,且随机噪声仅作用于捕食过程的随机捕食 - 被捕食模型。传统 Lotka-Volterra 模型中捕食者的增长仅依赖于被捕食者的数量,而实际生态系统中,捕食者往往存在替代食物源(如杂食性动物的多元取食)或种内竞争限制(如捕食者密度过高时的资源竞争)。Leslie-Gower 增长项通过“捕食者种群密度与环境承载能力的比值”来刻画这种约束——其核心假设是“捕食者的环境承载能力与被捕食者种群数量正相关”,这更符合真实生态系统中捕食者依赖猎物但并非完全单一依赖的生存逻辑(例如,狐狸既捕食野兔,也可取食小型啮齿类,其种群规模受野兔数量影响但不被完全限制)。在本模型的 Leslie-Gower 项中,参数  $c$  代表捕食者替代食物源的丰富度:当  $c$  取值越大时,说明捕食者可利用的非目标猎物资源越充足,其环境承载能力对目标被捕食者的依赖程度越低;反之, $c$  趋近于 0 时,捕食者的生存高度依赖目标被捕食者,二者种群动态的耦合性更强。这一参数的生物学意义为后续分析“随机噪声如何通过捕食过程影响

捕食者-被捕食者系统稳定性”提供了明确的生态关联。基于此本文首先, 严格证明模型全局正解的存在唯一性。其次, 探讨种群的随机最终有界性。最后, 研究被捕食者种群的持久性与灭绝性并通过 MATLAB 进行数值模拟验证。

## 2. 模型建立

对于文献[6]的模型引入噪声, 并加以修改得到如下带有 Holling II 型功能反应项和 Leslie-Gower 增长项的混合随机捕食-被捕食模型:

$$\begin{cases} dx = \left[ rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qxy}{x+a} \right] dt - \frac{xy\sigma}{x+a} dB(t) \\ dy = \left[ sy \left( 1 - \frac{y}{nx+c} \right) \right] dt \end{cases}$$

其中  $x(t)$  和  $y(t)$  分别表示被捕食者和捕食者种群在时刻  $t$  的密度, 且模型所有参数均大于 0,  $r$  为被捕食者内禀增长率,  $K$  为捕食者环境承载,  $q$  为捕食者的人均最大消耗率,  $a$  是捕食者达到  $q$  的一半的捕食量,  $m$  为最小存活种群或阿利阈值,  $s$  为内在捕食者生长率,  $n$  为食物质量, 它表示捕食者如何将被捕食的猎物转化为新的捕食者新生,  $c$  为替代食物源的丰富度,  $B(t)$  是标准布朗运动。该模型的功能反应项为 Logistic 型, 且随机噪声作用于捕食过程。

## 3. 主要结果及证明

### 3.1. 全局正解的存在唯一性

定义 1 [7] 局部 Lipschitz 连续性

$$\begin{aligned} f_1(x, y) &= rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qxy}{x+a} \\ f_2(x, y) &= sy \left( 1 - \frac{y}{nx+c} \right) \end{aligned}$$

在  $R_+^2 = \{(x, y) | x > 0, y > 0\}$  上,  $f_1$  和  $f_2$  分别是连续可微的(分母  $x+a \neq 0, nx+c \neq 0$ ), 因此满足局部 Lipschitz 条件。

因为该模型的系数都满足局部 Lipschitz 条件, 因此对于给定的任意初始解  $(x(0), y(0))$  都存在唯一的局部正解  $(x(t), y(t)), t \in [0, \tau_e)$ , 其中  $\tau_e$  为爆炸时间。为证明该解的全局存在唯一性, 需要证明  $\tau_e = \infty$ 。

我们令  $k_0 \geq 0$  为足够大的整数, 使其满足  $(x(0), y(0)) \in \left[ \frac{1}{k_0}, k_0 \right]$ , 对任意整数  $k \geq k_0$ , 定义停止时间:

$$\tau_k = \inf \left\{ t \in [0, \tau_e) : \min \{x(t), y(t)\} < \frac{1}{k} \text{ 或 } \max \{x(t), y(t)\} > k \right\}$$

令  $\inf \emptyset = \infty$ , 根据  $\tau_k$  的定义可以得到,  $\tau_k$  随着  $k$  的增大而增大, 若令  $\tau_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} \tau_k$ , 则有  $\tau_\infty \leq \tau_e$  恒成立。若可以证明出  $\tau_\infty = \infty$ , 那么就有  $\tau_e = \infty$ 。从而就可以证得解  $(x(t), y(t))$  的全局性, 即对任意  $t \geq 0$ , 此解依概率 1 在  $R_+^3$  中。

接下来, 我们构造 Lyapunov 函数

$$V(x, y) = (x - \ln x) + (y - \ln y)$$

利用 Itô 公式, 可以得到

$$\begin{aligned}
dV &= \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 y^2}{(x+a)^2} dt \\
&= \left[ r(x-1) - \frac{r(x-1)x}{k} - \frac{q(x-1)}{x+a} y + s(y-1) \left( 1 - \frac{y}{nx+c} \right) + \frac{\sigma^2 y^2}{2(x+a)^2} \right] dt \\
&\quad + \frac{y\sigma}{x+a} dB(t) - \frac{xy\sigma}{x+a} dB(t)
\end{aligned}$$

则有,

$$\begin{aligned}
dV &\leq \left[ rV + r + \max\left(q, \frac{q}{a}\right)(V+1) + sV + s + \frac{\sigma^2 M}{2} \right] dt + \frac{y\sigma}{x+a} dB(t) - \frac{xy\sigma}{x+a} dB(t) \\
&\leq \left[ \left( r + \max\left(q, \frac{q}{a}\right) + s \right) V + \left( r + \max\left(q, \frac{q}{a}\right) + s + \frac{\sigma^2 M}{2} \right) \right] dt + \frac{y\sigma}{x+a} dB(t) - \frac{xy\sigma}{x+a} dB(t)
\end{aligned} \tag{1}$$

令

$$C_1 = r + \max\left(q, \frac{q}{a}\right) + s, C_2 = r + \max\left(q, \frac{q}{a}\right) + s + \frac{\sigma^2 M}{2}$$

则(1)式变为:

$$dV \leq (C_1 V + C_2) dt + \sigma \left( \frac{1}{x} - 1 \right) \frac{xy}{x+a} dB(t)$$

两边取期望, 得到(由于布朗运动的随机积分项是鞅, 其期望为零):

$$dE(V) \leq C_1 E(V) + C_2$$

该非齐次方程  $\frac{d}{dt} E(V) = C_1 E(V) + C_2$  的解为  $E(V) = A e^{C_1 t} - \frac{C_2}{C_1}$ ,  $A$  为常数。

当  $t=0$  时,  $E(V) = A - \frac{C_2}{C_1}$ , 即有  $A = E(V(0)) + \frac{C_2}{C_1}$ ,

因此,

$$E(V) = \left( E(V(0)) + \frac{C_2}{C_1} \right) e^{C_1 t} - \frac{C_2}{C_1}$$

综上, 可得

$$E(V) \leq \left( V(0) + \frac{C_2}{C_1} \right) e^{C_1 t} - \frac{C_2}{C_1} < \infty$$

这表明  $E(V)$  不会在有限时间内趋于无穷, 因此  $\tau_e = \infty$  成立。

### 3.2. 种群的随机最终有界性

**定理 1** 考虑模型(2), 因为模型参数  $s > 0, n > 0, c > 0, \sigma \neq 0$ , 则对任意  $p > 1$  存在与初始值无关的正常数  $Q_p$ , 使得捕食者种群  $y(t)$  满足:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} E[y^p(t)] \leq Q_p$$

特别的, 捕食者种群  $y(t)$  是随机最终有界的, 即对任意  $\varepsilon \in (0, 1)$ , 存在正常数  $x = x(\varepsilon)$ , 使得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{y(t) \leq x\} \geq 1 - \varepsilon$$

**证明:** 构造 Lyapunov 函数  $V(y) = y^p$ , 其中  $p > 1$ 。应用 Itô 公式:

$$dV(y) = \ell V(y) dt + p\sigma y^p(t) dW(t)$$

其中  $\ell$  为生成元, 其表达式为

$$\ell V(y) = py^{p-1} \cdot \left[ sy \left( 1 - \frac{ny}{c+x} \right) \right] + \frac{1}{2} p(p-1) y^{p-2} \cdot (\sigma^2 y^2)$$

$$\ell V(y) = psy^p \left( 1 - \frac{ny}{n+c} \right) + \frac{1}{2} p(p-1) \sigma^2 y^p$$

由于  $x(t) > 0$ , 有  $c+x(t) > c$ , 故  $-\frac{ny}{c+x} \leq -\frac{ny}{c}$  代入上式得:

$$\ell V \leq psy^p \left( 1 - \frac{ny}{c} \right) + \frac{1}{2} p(p-1) \sigma^2 y^p$$

令  $A = ps + \frac{1}{2} p(p-1) \sigma^2, B = \frac{psn}{c}$ , 则有

$$\ell V \leq Ay^p - By^{p+1}$$

定义函数  $f(y) = Ay^p - By^{p+1}, y > 0$ , 令

$$f'(y) = Apy^{p-1} - B(p+1)y^p = y^{p-1} [Ap - B(p+1)y] = 0$$

解得:

$$y^* = \frac{Ap}{B(p+1)}$$

代入  $f(y)$  得最大值:

$$Q = f(y^*) = A(y^*)^p - B(y^*)^{p+1} = \frac{A^{p+1}}{B^p} \cdot \frac{p^p}{(p+1)^{p+1}}$$

因此, 存在正常数  $Q$  与  $\theta > 0$ , 使得  $\ell V \leq Q - \theta V(y)$ , 其中  $\theta = B(p+1) \left( \frac{B(p+1)}{Ap} \right)^{\frac{1}{p}}$ 。

由 Itô 公式可得:

$$dV(y) \leq [Q - \theta V(y)] dt + p\sigma y^p(t) dW(t)$$

对两边从 0 到  $t$  积分:

$$V(y(t)) \leq V(y(0)) + \int_0^t [Q - \theta V(y(s))] ds + M(t)$$

其中  $M(t) = \int_0^t p\sigma y^p(s) dW(s)$  为鞅, 满足  $E[M(t)] = 0$ 。

所以, 两边取期望得:

$$E[V(y(t))] \leq V(y(0)) + Qt - \theta \int_0^t E[V(y(s))] ds$$

令  $u(t) = E[V(y(t))]$ , 则  $u(t) + \theta \int_0^t u(s) ds \leq V(y(0)) + Qt$

定义  $w(t) = \int_0^t u(s) ds$ , 则  $w'(t) = u(t)$ , 代入得

$$w'(t) + \theta w(t) \leq V(y(0)) + Qt$$

两边同时乘以  $e^{\theta t}$  后并从 0 到  $t$  积分得:

$$e^{\theta t} w(t) \leq \frac{V(y(0))}{\theta} (e^{\theta t} - 1) + Q \int_0^t s e^{\theta s} ds$$

计算可得:

$$\int_0^t s e^{\theta s} ds = \frac{e^{\theta t} (\theta t - 1) + 1}{\theta^2}$$

故

$$w(t) \leq \frac{V(y(0))}{\theta} (1 - e^{-\theta t}) + \frac{Q}{\theta^2} [\theta t - 1 + e^{-\theta t}]$$

因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{w(t)}{t} \leq \frac{Q}{\theta}$$

由平均值性质可知, 存在  $Q_p > 0$ , 使得  $\limsup_{t \rightarrow \infty} E[y^p(t)] = \limsup_{t \rightarrow \infty} u(t) \leq Q_p$ 。

由 Chebyshev 不等式, 对任意  $\varepsilon > 0$ , 取  $x = \frac{Q_p}{\varepsilon}$ , 则

$$P\{y(t) > x\} \leq \frac{E[y^p(t)]}{x^p} \leq \frac{Q_p}{x^p}$$

对于任意的  $\varepsilon > 0$ , 取  $x = \left(\frac{Q_p}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{p}}$ , 则  $\frac{Q_p}{x^p} = \varepsilon$ , 代入得:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} P\{y(t) \leq x\} \geq 1 - \varepsilon$$

随机最终有界性得证。

### 3.3. 随机持久性

**定理 2** 若  $r > \frac{\sigma^2}{2}$ , 则被捕食者种群  $x(t)$  是随机持久的, 即存在正常数  $m, M$ , 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P(m \leq x(t) \leq M) > 0.$$

**证明:** 构造辅助函数  $V_1(x, y) = x^{-p}$ , 应用 Itô 公式得到:

$$dV_1 = -px^{-p-1}dx + \frac{1}{2}p(p+1)x^{-p-2}$$

代入  $dx$  表达式并化简, 可得其生成元

$$\ell V_1 = px^{-p} \left[ -r \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qy}{x+a} + \frac{1}{2}(p+1) \frac{\sigma^2 y^2}{(x+a)^2} \right]$$

由定理 1 可知,  $y(t)$  有界, 即  $y \leq Y_{\max}$  且  $x \geq 0$ , 当  $x \rightarrow 0^+$  时

$$\ell V_1 \leq px^{-p} \left[ -r + \frac{qY_{\max}}{a} + \frac{1}{2}(p+1) \frac{\sigma^2 Y_{\max}^2}{a^2} \right]$$

当  $p$  足够小时, 因为  $r > \frac{\sigma^2}{2}$ , 所以存在  $\varepsilon > 0$ , 使得当  $x \leq \varepsilon$  时,

$$\ell V_1 \leq -C_1 < 0$$

并且在紧区间  $[\delta, D]$  上连续且有界:

$$\sup_{x \in [\delta, D]} |LV_1(x)| \leq M < \infty, \quad M \text{ 为任意常数}$$

在考虑  $V_2(x) = x$ , 应用 Itô 公式可得:

$$dV_2 = \left[ rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qxy}{x+a} \right] dt - \frac{\sigma xy}{x+a} dB(t)$$

其生成元

$$\ell V_2 = rx \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qxy}{x+a} \leq rx - \frac{r}{K} x^2 \leq -C_2 x^2 < 0, \quad \text{当 } x \text{ 足够大时}$$

定义停时:

$$\tau_\delta = \inf \{ t \geq 0 : x(t) \leq \delta \}, \tau_D = \inf \{ t \geq 0 : x(t) \geq D \}, \tau = \tau_\delta \wedge \tau_D$$

由伊藤公式可以得出:

$$E[V(x(t \wedge \tau))] = V(x(0)) + E\left[\int_0^{t \wedge \tau} LV_1(x(s)) ds\right]$$

结合随机 Lyapunov 函数与边界行为理论, 可以推出存在  $\alpha > 0$ , 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} P(\delta \leq x(t) \leq D) \geq \alpha > 0$$

取  $\delta = m, D = M$ , 即  $x(t)$  是随机持久的。

### 3.4. 系统灭绝性

**定理 3** 若  $r < \frac{\sigma^2}{2}$ , 则被捕食者种群  $x(t)$  将以概率 1 灭绝, 即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$$

成立。

**证明:** 构造 Lyapunov 函数  $V_3(x, y) = \ln x$ ,

应用 Itô 公式可得:

$$dV_3 = \frac{1}{x} dx - \frac{1}{2x^2} (dx)^2 = \left[ r \left( 1 - \frac{r}{K} \right) - \frac{qy}{x+a} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 y^2}{(x+a)^2} \right] dt - \frac{\sigma y}{x+a} dB(t) \quad (2)$$

记生成元

$$\ell V_3 = r \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qy}{x+a} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 y^2}{(x+a)^2}$$

因为  $y \geq 0, x \geq 0$ , 有:

$$\ell V_3 \leq r - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 y^2}{(x+a)^2} \quad (3)$$

对(2)式从 0 到  $t$  积分后两边同时除以  $t$ , 得到:

$$\frac{\ln x(t)}{t} = \frac{\ln x(0)}{t} + \frac{1}{t} \int_0^t V_3(x(s), y(s)) ds - \frac{\sigma}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{x(s)+a} dB(s) \quad (4)$$

由强大数定律[8]可得

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y(s)}{x(s)+a} dB(s) = 0 \quad (5)$$

结合(3)~(5)式:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \int_0^t \left[ r - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 y^2(s)}{(x(s)+a)^2} \right] ds \quad (6)$$

记

$$A(t) = \frac{1}{t} \int_0^t \frac{y^2(s)}{(x(s)+a)^2} ds$$

则(6)式可改写为

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \left[ r - \frac{\sigma^2}{2} A(t) \right] \quad (7)$$

应用极限不等式性质:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \left[ r - \frac{\sigma^2}{2} A(t) \right] = r - \frac{\sigma^2}{2} \liminf_{t \rightarrow \infty} A(t)$$

情形I: 若  $\liminf_{t \rightarrow \infty} A(t) > \frac{2r}{\sigma^2}$ , 则

$$r - \frac{\sigma^2}{2} \liminf_{t \rightarrow \infty} A(t) < 0 \Rightarrow \limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} < 0 \Rightarrow x(t) \rightarrow 0$$

情形 II: 若  $\liminf_{t \rightarrow \infty} A(t) \leq \frac{2r}{\sigma^2}$ 。

假设  $x(t)$  不趋于 0, 则存在  $\xi > 0$  和子列  $\{t_k\}$  使得

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} x(t_k) > \xi$$

由捕食者  $y(t)$  的方程可知, 当  $x \geq \frac{\xi}{2}$  时,  $y$  的容纳量满足  $nx + c \geq n \cdot \frac{\xi}{2} + c$ , 因此存在  $\gamma > 0$ , 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \gamma > 0$$

于是

$$\frac{y^2}{(x+a)^2} \geq \frac{\gamma^2}{(K+a)^2} > 0$$

从而



$$\liminf_{t \rightarrow \infty} A(t) \geq \frac{\gamma^2}{(K+a)^2} > 0 \quad (8)$$

现在考虑原始生成元  $\ell V_3$  :

$$\ell V_3 = r \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qy}{x+a} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 y^2}{(x+a)^2}$$

由于  $-\frac{qy}{x+a} \leq 0$  且  $-\frac{r}{K}x \leq 0$ , 结合(8)式,

$$\ell V_3 \leq r - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\gamma^2}{(K+a)^2} - \frac{qy}{x+a} - \frac{r}{K}x$$

由于  $r < \frac{\sigma^2}{2}$ , 可知存在  $\varepsilon > 0$ , 使得  $\ell V_3 \leq -\varepsilon < 0$  (对所有  $t$  充分大成立)。

代入(4)式:

$$\frac{\ln x(t)}{t} \leq \frac{\ln x(0)}{t} - \varepsilon + o(1)$$

因此

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq -\varepsilon < 0 \Rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0。这与假设矛盾。$$

因此当  $\liminf_{t \rightarrow \infty} A(t) \leq \frac{2r}{\sigma^2}$  时,  $x(t) \rightarrow 0$  仍成立。

综上所述, 当  $r < \frac{\sigma^2}{2}$  时, 总有  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$  成立。

### 3.5. 捕食者种群的渐近行为分析

**定理 4** 若被捕食者种群  $x(t) \rightarrow 0$  几乎必然成立, 则捕食者种群  $y(t)$  将趋于由参数  $c$  决定的稳定水平, 即:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = sc \quad \text{a.s.}$$

**证明:** 考虑捕食者种群的随机微分方程:

$$dy = \left[ sy \left( 1 - \frac{y}{nx+c} \right) \right] dt$$

当  $x(t) \rightarrow 0$  时, 分母  $nx+c \rightarrow c$ , 因此方程可近似为  $dy = \left[ sy \left( 1 - \frac{y}{c} \right) \right] dt$ 。

这是一个确定性逻辑增长方程, 其稳定点为  $y^* = sc$  下面给出严格证明。

定义函数  $V_4 = \ln y$ , 应用 Itô 公式:

$$d(\ln y) = \left[ s - \frac{y}{nx+c} \right] dt$$

由于  $x(t) \rightarrow 0$ , 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $T > 0$ , 使得当  $t > T$  时,  $x(t) < \varepsilon$ 。于是

$$\frac{y}{nx+c} \geq \frac{y}{n\varepsilon+c}$$

因此:

$$d(\ln y) \leq \left[ s - \frac{y}{n\varepsilon + c} \right] dt$$

考虑辅助方程

$$\frac{dz}{dt} = z \left( s - \frac{z}{n\varepsilon + c} \right), \quad z(T) = y(T)$$

该方程的解收敛到:  $z^* = s(n\varepsilon + c)$ , 又由比较原理可知:  $\limsup_{t \rightarrow \infty} y(t) \leq s(n\varepsilon + c)$ 。

同理可得,  $\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \frac{sc}{1}$  a.s.

实际上, 更精确的下界为:

$$\frac{y}{nx + c} \leq \frac{y}{c}, \quad \text{当 } x(t) \geq 0 \text{ 时}$$

因此  $d(\ln y) \geq \left( s - \frac{y}{c} \right) dt$ , 由比较原理可得:

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq sc \quad \text{a.s.}$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 由夹逼定理可得:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = sc \quad \text{a.s.}$$

### 3.6. 进一步刻画灭绝速率

**定理 5** 证明灭绝速率是指数级的, 即存在  $\lambda > 0$  使得

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln x(t) \leq -\lambda$$

**证明:** 由定理 3 证明可知  $\ell V_3 = r \left( 1 - \frac{x}{K} \right) - \frac{qy}{x+a} - \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 y^2}{(x+a)^2}$ 。

由  $y(t) \leq Y_{\max}$ , 当  $x(t) \rightarrow 0$  时, 对任意的  $\varepsilon > 0$ , 都存在  $\delta > 0$ , 使得当  $0 < x < \delta$  时,

$$\ell V_3 \leq r - \frac{qy}{a} + q\varepsilon - \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{y^2}{a^2} - \varepsilon \right)$$

由捕食者方程  $y(t)$  可知, 当  $x(t) \rightarrow 0$  时, 容纳量  $nx + c \rightarrow c$ , 因此存在正常数  $\underline{y}$ , 使得

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} y(t) \geq \underline{y}$$

因此, 对充分大的  $t$ , 有  $y(t) \geq \underline{y} - \varepsilon$ , 取  $\varepsilon$  充分小, 当  $x < \varepsilon$  且  $y \geq \underline{y} - \varepsilon$  时:

$$\ell V_3 \leq r - \frac{q(\underline{y} - \varepsilon)}{a} - \frac{1}{2} \sigma^2 \left( \frac{(\underline{y} - \varepsilon)^2}{a^2} - \varepsilon \right) + \left( q + \frac{1}{2} \sigma^2 \cdot \frac{2\underline{y}}{a^2} \right) \varepsilon$$

其中  $\underline{y}$  是  $y$  的某个下界。

记

$$\lambda_0 = - \left[ r - \frac{q\underline{y}}{a} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\underline{y}^2}{a^2} \right]$$

由于  $r < \frac{\sigma^2}{2}$  且  $y > 0$ , 选取适当参数可保证  $\lambda_0 > 0$ 。

于是对充分小的  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\lambda > 0$ , 使得当  $x < \delta$  且  $t$  充分大时:

$$\ell V_3 \leq -\lambda \quad (9)$$

接着, 由定理 3 可知  $\tau_\delta < \infty$  且  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$

对  $t > \tau_\delta$ , 将 Itô 公式从  $\tau_\delta$  到  $t$  积分:

$$\ln x(t) - \ln x(\tau_\delta) = \int_{\tau_\delta}^t \ell V_3(x(s), y(s)) ds - \sigma \int_{\tau_\delta}^t \frac{y(s)}{x(s) + a} dB(s)$$

由(9)可知, 当  $s \geq \tau_\delta$  且  $s$  充分大时,

$$\ell V_3 \leq -\lambda$$

因此,

$$\ln x(t) - \ln x(\tau_\delta) = -\lambda(t - \tau_\delta) + M(t), \text{ 其中 } M(t) = -\sigma \int_{\tau_\delta}^t \frac{y(s)}{x(s) + a} dB(s) \text{ 是鞅项}$$

所以有:

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln x(t)}{t} \leq \limsup_{t \rightarrow \infty} \left[ \frac{\ln x(\tau_\delta)}{t} - \lambda \left( 1 - \frac{\tau_\delta}{t} \right) + \frac{M(t)}{t} \right] = -\lambda.$$

综上所述, 当满足灭绝速率常数  $\lambda$  时, 系统以指数速率灭绝。

## 4. 数值模拟

### 4.1. 数值方法与参数设置

为验证本文理论结果的正确性, 采用 Euler-Maruyama 方法[9]对随机微分方程系统(1)进行数值求解。考虑如下离散格式:

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \left[ rx_i \left( 1 - \frac{x_i}{K} \right) - \frac{qx_i y_i}{x_i + a} \right] \Delta t - \frac{\sigma x_i y_i}{x_i + a} \sqrt{\Delta t} \cdot \xi_i \\ y_{i+1} &= y_i + \left[ sy_i \left( 1 - \frac{y_i}{nx_i + c} \right) \right] \Delta t \end{aligned}$$

其中  $\xi_i \sim N(0, 1)$  为独立同分布的标准高斯随机变量, 时间步长取  $\Delta t = 0.005$  来保证数值稳定性。其中参数取值如表 1 所示。所有模拟均使用 MATLAB 完成。

### 4.2. 持久性验证

当噪声强度  $\sigma = 0.3$  时, 满足定理 2 的条件  $\lambda = 0.755 > 0$ 。如图 1, 数值模拟结果显示。

种群动态特征: 被捕食者种群  $x(t)$  和捕食者种群  $y(t)$  围绕正平衡水平持续波动, 种群密度始终保持在正区间内。

相图分析: 在相平面中, 系统轨迹形成紧集, 表现出稳定的极限环行为。

上述结果验证了定理 2 的结论: 当  $\lambda > 0$  时, 系统具有随机持久性。

Table 1. Parameter description  
表 1. 参数说明

参数	生物学意义	持久性情形	灭绝性情形
$r$	被捕食者内禀增长率	0.8	0.8
$k$	被捕食者环境承载力	1.0	1.0
$q$	捕食率系数	1.2	1.2
$a$	半饱和常数	0.5	0.5
$s$	捕食者内禀增长率	0.4	0.4
$n$	转化效率系数	0.6	0.6
$c$	捕食者环境调节参数	0.3	0.3
$\sigma$	噪声强度	0.3	1.8
$\lambda = r - \frac{\sigma^2}{2}$	持久性指标	$0.755 > 0$	$-0.820 < 0$

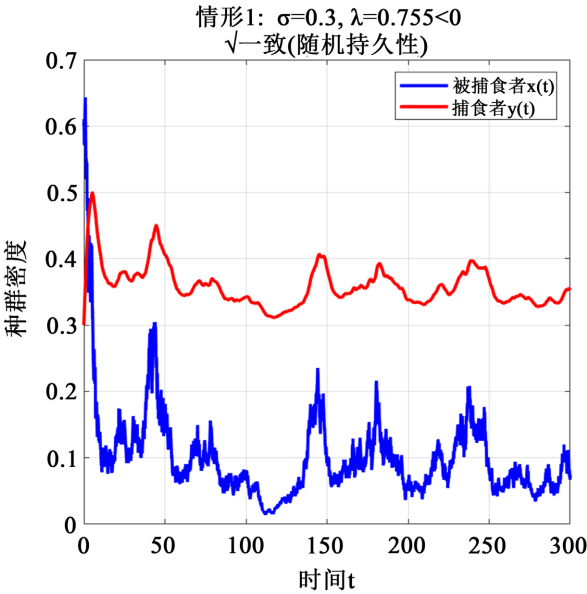


Figure 1. Population density image of  $\lambda > 0$

图 1.  $\lambda > 0$  时种群密度图像

4.3. 灭绝性验证

当噪声强度增大至  $\sigma = 1.8$  时, 满足定理 3 的条件  $\lambda = -0.820 < 0$ 。如图 2, 数值模拟结果显示。  
灭绝过程: 被捕食者种群  $x(t)$  在有限时间内衰减至接近零, 由于食物来源丧失, 捕食者种群  $y(t)$  随之灭绝。

相图特征: 系统轨迹趋向于  $x = 0$  的边界, 最终导致整个生态系统崩溃。

4.4. 灭绝速率分析

对灭绝情形下的  $\ln x(t)$  进行线性回归分析, 如图 3, 得到灭绝速率常数  $K \approx 0.023$ 。这表明灭绝过程

呈现指数级特征:  $x(t) \sim O(e^{-Kt})$  当  $t \rightarrow \infty$ 。该结果验证了定理 4 关于指数级灭绝速率的理论预测。

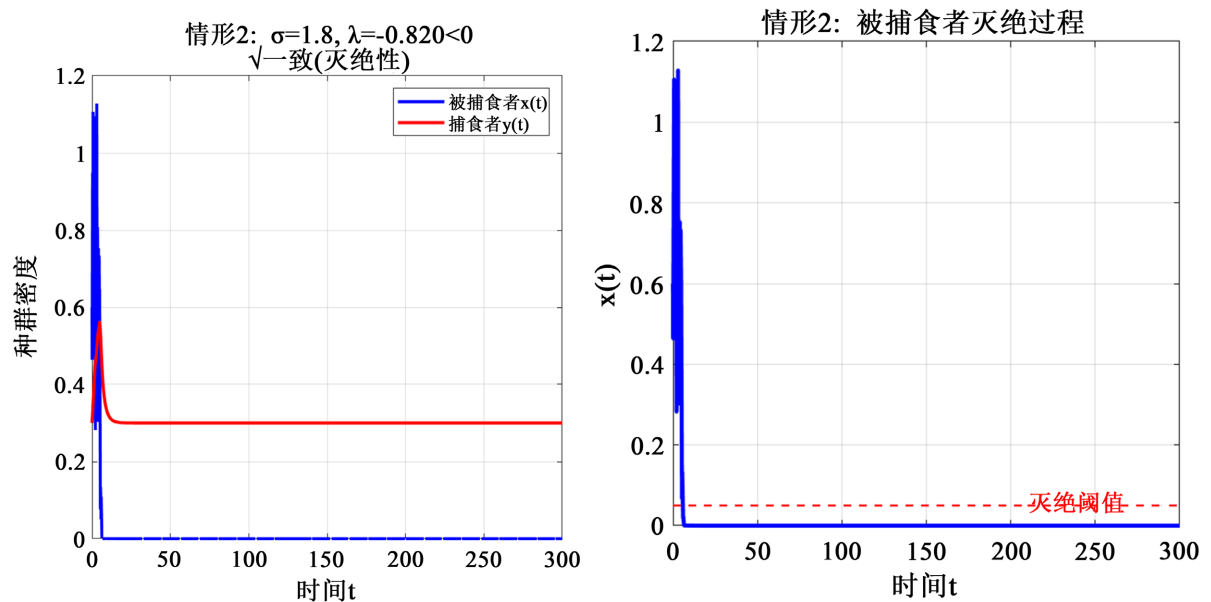


Figure 2. Population density images and extinction processes of  $\lambda < 0$

图 2.  $\lambda < 0$  时种群密度图像以及灭绝过程

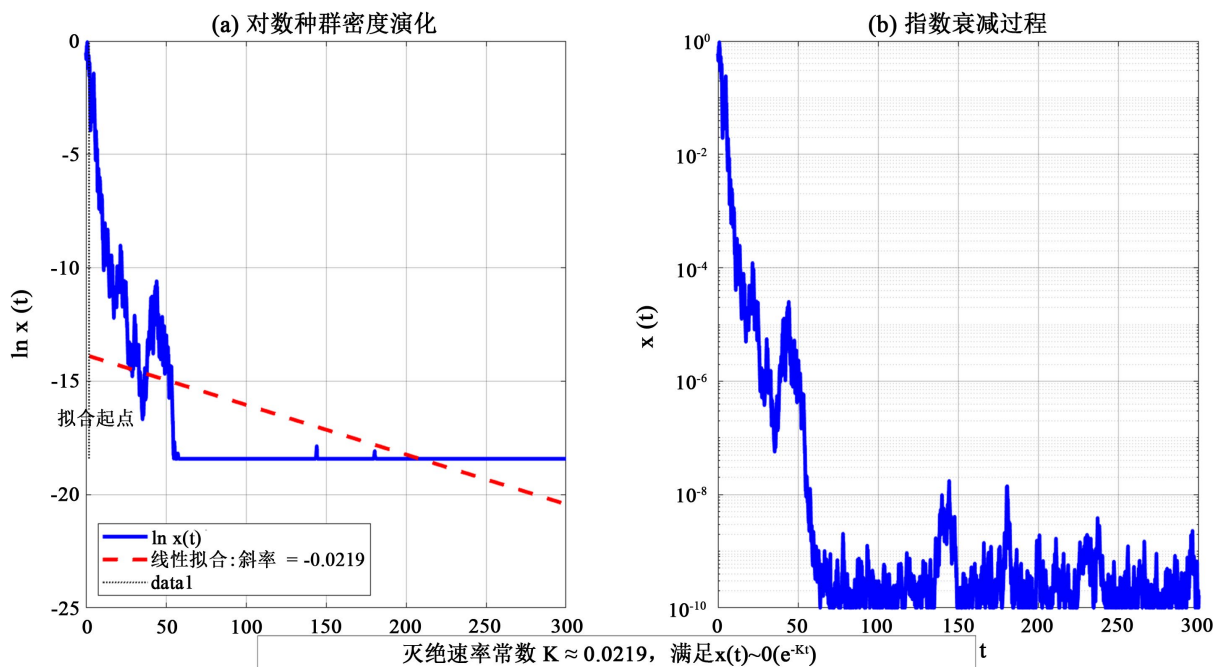


Figure 3. Linear regression analysis

图 3. 线性回归分析

#### 4.5. 参数敏感性分析

通过系统地改变噪声强度  $\sigma$ , 得到图 4, 研究其对系统长期行为的影响。

临界行为: 存在临界噪声强度  $\sigma_c = 2r \approx 1.265$ , 当  $\sigma < \sigma_c$  时系统保持随机持久性, 当  $\sigma > \sigma_c$  时系统走

向灭绝。

连续相变：最终种群密度随噪声强度的增加呈现连续下降趋势，在临界点附近发生显著变化。

鲁棒性[10]验证：数值结果与理论预测高度一致，验证了本文理论分析的鲁棒性。

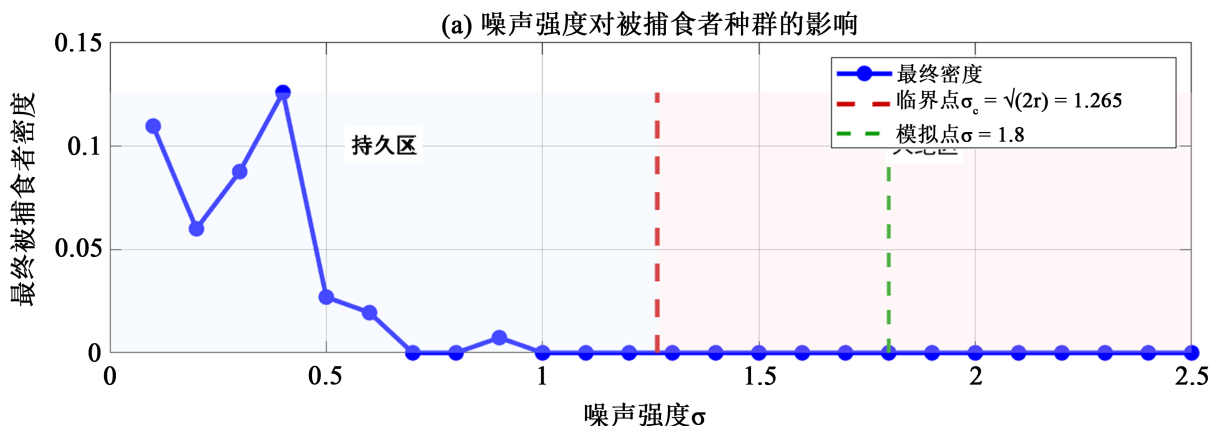


Figure 4. The influence of noise intensity

图 4. 噪声强度的影响

## 5. 结论

本文研究了一类具有 Holling II 型功能反应、且随机噪声仅作用于捕食过程的随机捕食 - 被捕食模型，重点探讨了环境随机性对种群动态的影响。通过构造适当的 Lyapunov 函数并运用 Itô 公式、随机比较原理等随机分析工具，系统分析了模型的全局正解存在唯一性、有界性、随机持久性与灭绝性。研究结果表明，捕食者种群具有随机最终有界性，而被捕食者种群在满足一定条件时具有随机持久性；当噪声强度较大时，被捕食者种群将以概率 1 趋于灭绝。数值模拟进一步验证了理论结果的正确性，揭示了噪声强度在系统动态中的关键作用：存在临界噪声强度，低于该阈值时系统呈现随机持久性，高于该阈值时系统走向灭绝，体现了环境随机性对种群生存的影响。本研究不仅深化了对随机捕食-被捕食系统动态行为的理解，也为生态系统中物种保护与风险管理提供了理论依据与方法支持。未来可进一步考虑多种噪声共同作用、时滞效应等因素，以更全面地揭示复杂随机生态系统的动态机制。

## 参考文献

- [1] Borysenko, O. and Borysenko, O. (2024) Stochastic Lotka-Volterra Mutualism Model with Jumps. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, **11**, 289-301. <https://doi.org/10.15559/23-vmsta242>
- [2] Haque, M. (2011) A Detailed Study of the Beddington-Deangelis Predator-Prey Model. *Mathematical Biosciences*, **234**, 1-16. <https://doi.org/10.1016/j.mbs.2011.07.003>
- [3] Rozenfeld, A.F., Tessone, C.J., Albano, E. and Wio, H.S. (2001) On the Influence of Noise on the Critical and Oscillatory Behavior of a Predator-Prey Model: Coherent Stochastic Resonance at the Proper Frequency of the System. *Physics Letters A*, **280**, 45-52. [https://doi.org/10.1016/s0375-9601\(01\)00033-0](https://doi.org/10.1016/s0375-9601(01)00033-0)
- [4] Leahu, H. (2011) On the Bernstein-Von Mises Phenomenon in the Gaussian White Noise Model. *Electronic Journal of Statistics*, **5**, 373-404. <https://doi.org/10.1214/11-ejs611>
- [5] Zhang, Y. and Zhang, Q. (2013) Dynamical Analysis of a Delayed Singular Prey-Predator Economic Model with Stochastic Fluctuations. *Complexity*, **19**, 23-29. <https://doi.org/10.1002/cplx.21486>
- [6] Arancibia-Ibarra, C. and Flores, J. (2021) Dynamics of a Leslie-Gower Predator-Prey Model with Holling Type II Functional Response, Allee Effect and a Generalist Predator. *Mathematics and Computers in Simulation*, **188**, 1-22. <https://doi.org/10.1016/j.matcom.2021.03.035>
- [7] Garofalo, N. and Nhieu, D. (1998) Lipschitz Continuity, Global Smooth Approximations and Extension Theorems for Sobolev Functions in Carnot-Carathéodory Spaces. *Journal d'Analyse Mathématique*, **74**, 67-97. <https://doi.org/10.1007/bf02819446>

- [8] Mao, X.R. (2007) Stochastic Differential Equations and Applications. Elsevier.
- [9] Cao, W., Liu, M. and Fan, Z. (2004) MS-Stability of the Euler-Maruyama Method for Stochastic Differential Delay Equations. *Applied Mathematics and Computation*, **159**, 127-135. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.10.015>
- [10] Kitano, H. (2004) Biological Robustness. *Nature Reviews Genetics*, **5**, 826-837. <https://doi.org/10.1038/nrg1471>