Pure Mathematics 理论数学, 2025, 15(12), 205-212
Published Online December 2025 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2025.1512307

一题多解发展数学思维

——以一道中考数学题为例

何佳雯[*]，王海军[#]

太原师范学院数学与统计学院，山西 晋中

收稿日期：2025年11月19日；录用日期：2025年12月16日；发布日期：2025年12月23日

摘　要

“一题多解”是发展数学思维及核心素养的载体，以2024年四川省成都市中考数学第22题引入，探究其本质与变式，详细研究了其中六种不同的解题方法，通过解法对比揭示数学思想的一致性，进一步通过探究本题的变式把握数学解题的本质，从而有效提升数学思维品质，进而推动数学思维的发展。

关键词

中考数学题，一题多解，数学思维

Solving One Problem in Multiple Ways Develops Mathematical Thinking

—Taking a Math Problem from the High School Entrance Examination as an Example

Jiawen He[*], Haijun Wang[#]

School of Mathematics and Statistics, Taiyuan Normal University, Jinzhong Shanxi

Received: November 19, 2025; accepted: December 16, 2025; published: December 23, 2025

Abstract

“Solving one problem in multiple ways” serves as a carrier for developing mathematical thinking and core competencies. Taking Question 22 of the 2024 Chengdu High School Entrance Examination (HSEE) Mathematics Paper in Sichuan Province as the entry point, this study explores its essence and variations, conducts an in-depth analysis of six distinct solution methods, and reveals the

[*]第一作者。
[#]通讯作者。

文章引用: 何佳雯, 王海军. 一题多解发展数学思维[J]. 理论数学, 2025, 15(12): 205-212.
DOI: 10.12677/pm.2025.1512307

consistency of mathematical ideas through comparative analysis of these methods. Furthermore, by investigating the variations of this problem, the inherent nature of mathematical problem-solving is grasped, thereby effectively improving the quality of mathematical thinking and further promoting the development of mathematical thinking.

Keywords

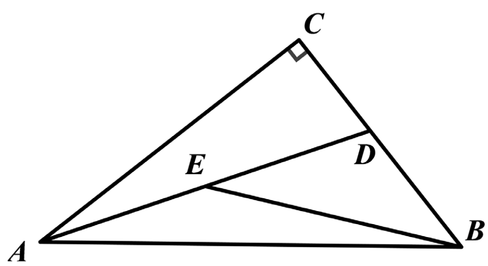
HSEE Mathematics Problems, Multi-Method Problem-Solving, Mathematical Thinking

1. 引言

“一题多解”是从不同角度分析问题，根据所给信息，应用已有的数学知识、经验，通过观察、推测和想象，沿着不同方向思考、重组已有信息，获得多种解法的过程[1]。“一题多解”作为有效的教学手段，能够促进学生对数学思想的领悟和对数学方法的娴熟应用，锻炼思维的广阔性、深刻性、灵活性和独创性，从而发展学生的核心素养。本文以 2024 年四川省成都市中考题第 22 题为例说明。

2. 试题呈现

题目 (2024·四川省成都市 22 题) 如下图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C=90^\circ$，AD 是 ΔABC 的一条角平分线，E 为 AD 的中点，连接 BE，若 $BE=BC$，$CD=2$，则 BD 为__。



本题是 2024 年四川省成都市中考题第 22 题，我们以该题为例探究多种解法的生成。本题中学生需主动挖掘考点间的内在联系，从图形中识别出相关的几何模型，此题在三角形基础上构造边角关系，使得解题思路多元，需要学生进行严谨的逻辑推理，从已知条件出发，逐步推导得出所需的结论，对学生数学思维和解决问题的能力提出了挑战。

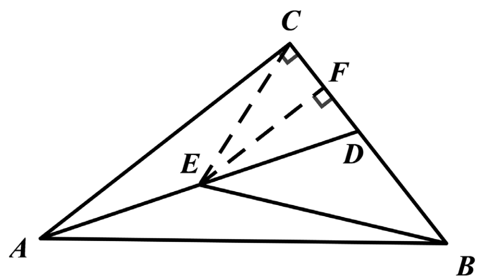
3. 思路分析与解法展示

思路 1： 通过观察不同三角形之间的关系，可以明显发现此题存在相似三角形的比例关系，于是自然而然构造相似三角形，寻求相似三角形线段之间的比例关系而建立等式，从而求出 BD 的长度。

解法 1： 如下图，连接 CE，过点 E 作 $EF\perp CD$ 交 CD 于点 F；点 E 为 AD 中点，$\angle ACB=90^\circ$，根据直角三角形斜边中线定理可得 $AE=DE=CE$。因为 AD 为角平分线，得 $\angle CAD=\angle BAD$。$AE=CE$，故 $\angle ACE=\angle CAD=\angle BAD$，由 $CE=DE$，得三角形 CED 为等腰三角形，已知 $EF\perp CD$，根据等腰三角形性质得，F 为 CD 中点，故 $AC\parallel EF$，根据三角形中位线定理可得，EF 是 ΔACD 的中位线，故

$\angle CEF = \angle DEF = \angle CAD$，因为 $\angle ECB = \angle CEB = 90^\circ - \angle CEF$，根据三角形内角和关系可得 $\angle CAB = \angle EBC = 2\angle CAD$。根据相似三角形的判定定理(若两个三角形有两个对应角相等，则这两个三角形相似)，$\angle CED = \angle EBC$，且 $\angle ECB$ 为公共角。可得 $\Delta CDE \backsim \Delta CEB$。设 $BD = x$，所以 $BD = x$。所以 $AD^2 = 4CE^2 = 8(2+x)$。在 ΔACD 中，由勾股定理得：$CD^2 + AC^2 = AD^2$，所以 $AC^2 = 8x + 12$，$AC = 2\sqrt{2x+3}$，$EF = \sqrt{2x+3}$，根据相似三角形的判定定理(若两个三角形有两个对应角相等，则这两个三角形相似)，$\angle CAB = \angle EBC$，且 $\angle EFB = \angle ACB$。

所以 $\Delta BEF \backsim \Delta ABC$，由 $\frac{EF}{BF} = \frac{BC}{AC}$ 得 $\frac{\sqrt{2x+3}}{x+1} = \frac{x+2}{2\sqrt{2x+3}}$，解得 $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$ 故 BD 的长为 $\frac{1+\sqrt{17}}{2}$。

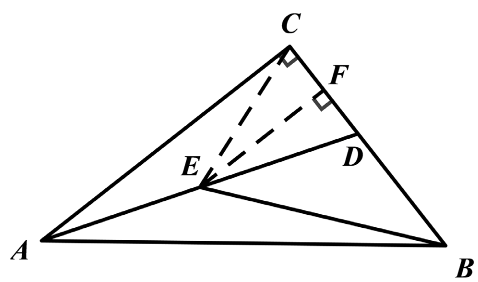


是否可以利用题目中的条件，在辅助线不改变的情况下使用其他不同且更加简洁的方式得到这个结果？

思路 2：通过观察发现解法 1 中没有涉及具体角度之间的关数量关系，根据其直角三角形的特殊性以及中点的特点，明显发现其中有大量的边角关系可以应用，利用角平分线性质以及直角三角形中相同角度余弦值的比例建立等式，寻求线段之间的关系，从而求出长度。

解法 2：如下图，连接 CE，过点 E 作 $EF \perp CD$ 交 CD 于点 F；点 E 为 AD 中点，$\angle ACB = 90^\circ$，根据直角三角形斜边中线定理可得 $AE = DE = CE$。由于 $\angle CAD = \angle BAD$，$AE = CE$，所以 $\angle ACE = \angle CAD$，因为 $DE = CE$，故三角形 CED 为等腰三角形，$EF \perp CD$，根据等腰三角形性质得，F 为 CD 中点，且 $AC /\!/ EF$，故 $\angle CEF = \angle DEF = \angle ACE$，因为 $\angle ECB = \angle CEB = 90^\circ - \angle ACE$，根据三角形内角和可得 $\angle CAB = \angle EBC = 2\angle ACE$。

设 $BD = x$，由角平分线比例性质(在三角形中，一个角的平分线将对边分成两段，这两段与角的两边长度成比例)得：$\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{2}{x}$，又因为在直角三角形中 $\cos\angle CAB = \cos 2\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{2}{x}$，在 ΔBEF 中 $\cos\angle EBF = \cos 2\alpha = \frac{BF}{BE} = \frac{1+x}{2+x}$，所以 $\frac{1+x}{2+x} = \frac{2}{x}$，解得 $x = \frac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ 故 $x = \frac{1+\sqrt{17}}{2}$。

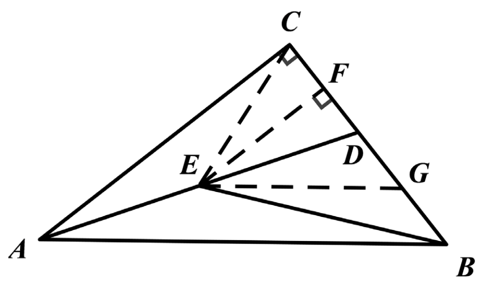


在辅助线不改变的情况下，与解法 1 相比，使用角平分线性质建立数量关系，解题过程更加简便。综合应用已有的知识，促进知识迁移[2]。是否还有其他不同视角下的不同解法？

思路 3：通过利用中点构造中位线，寻找与线段 BD 相关的相似三角形，利用已知线段和未知线段的比例关系建立等式。

解法 3：如下图，连接 CE，过点 E 作 $EF \perp CD$ 交 CD 于点 F；点 E 为 AD 中点，$\angle ACB = 90^\circ$，即 $AE = DE = CE$；过点 E 作 $EG /\!/ AB$ 交 BC 于点 G，即 G 为 BD 中点。由于 $\angle CAD = \angle BAD$，$BE = BC$，所以 $\angle CEF = \angle DEF = \angle DEG = \angle CAD$，$\angle CAB = \angle EBC = 2\angle CAD$。设 $BD = 2x$，即 $DG = BG = x$；根据相似三角形的判定定理(若两个三角形有两个对应角相等，则这两个三角形相似)，$\angle CED = \angle EBC$，且 $\angle ECB$ 为公共角。可得 $\Delta CDE \backsim \Delta CEB$，所以 $CE^2 = CD \cdot BC = 2(2+2x)$；根据相似三角形的判定定理(若两个三角形有两个对应角相等，则这两个三角形相似)，$\angle FEG = \angle EBF$，且 $\angle EFB$ 为公共角。故 $\Delta EFG \backsim \Delta BFE$，所以 $EF^2 = GF \cdot BF = (1+x)(1+2x)$；在 ΔCEF 中，由勾股定理得 $CF^2 + EF^2 = CE^2$

故 $1+(1+x)(1+2x) = 2(2+2x)$；解得 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{4}$，故 BD 的长为 $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$。

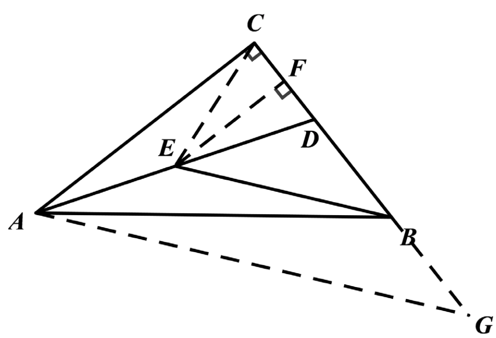


本题中出现的中点条件为构造中位线、利用相似三角形进行求解创造了条件。还有其他构造中位线的方法吗？

思路 4：利用已知中点条件，与解法 3 不同的是在三角形外构造中位线，通过未知线段与相似三角形之间的比例关系建立等式求解。

解法 4：如下图，连接 CE，过点 E 作 $EF \perp CD$ 交 CD 于点 F；点 E 为 AD 中点，$\angle ACB = 90^\circ$，即 $AE = DE = CE$；过点 A 作 $AG /\!/ BE$ 交 BC 于点 G，即 B 为 DG 中点。因为 $\angle CAD = \angle BAD$，且 $BE = BC$，所以 $\angle CEF = \angle DEF = \angle CAD$，$\angle CAB = \angle EBC = \angle AGC = 2\angle CAD$。设 $BD = x$，即 $BG = x$；根据相似三角形的判定定理(若两个三角形有两个对应角相等，则这两个三角形相似)，$\angle CED = \angle EBC$ 且 $\angle ECB$ 为公共角，可得 $\Delta CDE \backsim \Delta CEB$，故 $CE^2 = CD \cdot BC = 2(2+x)$，$AD^2 = 4CE^2 = 8(2+x)$。根据相似三角形的判定定理(若两个三角形有两个对应角相等，则这两个三角形相似)，$\angle AGC = \angle BAC$，且 $\angle ACG$ 为公共角 $\Delta ABC \backsim \Delta GAC$，所以 $AC^2 = BC \cdot CG = (2+x)(2+2x)$；在 ΔACD 中，由勾股定理得：$CD^2 + AC^2 = AD^2$

所以 $4+(2+x)(2+2x) = 8(2+2x)$；解得 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ 故 $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$。故 BD 的长为 $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$。

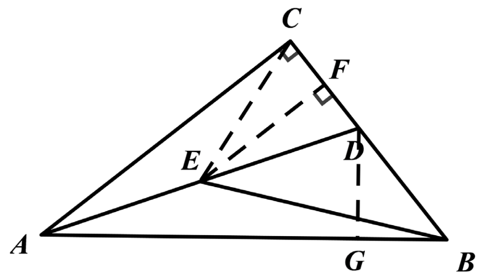


解法 3 与解法 4 思路都利用中位线的知识点，增加辅助线后使用两次相似三角形之间比例关系，从而建立等式。是否可以只利用一次相似三角形进行解答？

思路 5：通过先构造全等三角形，增加已知边与长度相等，后利用一次相似三角形比例寻找数量关系。

解法 5：如下图，连接 CE，过点 E 作 $EF \perp CD$ 交 CD 于点 F，过点 D 作 $DG \perp AB$ 交 AB 于点 G，由于 AD 是 ΔABC 的一条角平分线，$DG \perp AB$ 且 $\angle ACB = 90^\circ$，可得 $\Delta ACD \cong \Delta ADG$，则 $DG = CD = 2$，根据直角三角形中角度关系可得 $\angle GDB = \angle CAB$。根据相似三角形的判定定理(若两个三角形有两个对应角相等，则这两个三角形相似)，$\angle EFB = \angle BGD = 90^\circ$，且 $\angle BDG = \angle FBE$。故 $\Delta BDG \backsim \Delta BEM$

设 $BD = x$，则 $\dfrac{BD}{EB} = \dfrac{DG}{BF}$，故 $\dfrac{x}{x+2} = \dfrac{2}{x+1}$。解得 $x = \dfrac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$ 故 $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$。故 BD 的长为 $\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$。

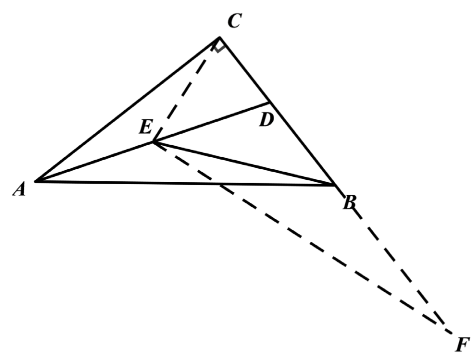


以上解法均为构造相似三角形，利用其线段比例求解，是否还有不同方法进行解答？

思路 6：求解线段 BD 长度时，需找到与其相关的数量关系，根据四点共圆以及割线定理与相似三角形的比例建立等式，求解出线段 BD 长度。

解法 6：如下图，连接 CE，过点 B 作 $BF = BC$，连接 EF，根据相似三角形的判定定理(若两个三角形有两个对应角相等，则这两个三角形相似)，$\angle CED = \angle EBC$，且 $\angle ECB$ 为公共角。故 $\Delta CDE \backsim \Delta CEB$，设 $BD = x$ 则 $CE^2 = CD \cdot BC = 2(2+x)$，又因为 $BE = BC = BF$，所以 $\angle CEF = 90^\circ$，$\angle CEB = \angle ECB = 90^\circ - \angle ACE$，故 $\angle BEF = \angle ACE$。所以 $\angle F = \angle DAB$，根据同侧共底边顶角相等则四点共圆，故 A、E、B、F 四点共圆，根据割线定理可得 $DE \cdot DA = DB \cdot DF$

所以 $2CE^2 = DB \cdot DF$，$2(2x+4) = x(2x+2)$ 解得 $x = \dfrac{1+\sqrt{17}}{2}$。



通过对六种解法进行分析，从“知识模块”、“核心思想”、“思维路径”、“创新性/复杂度”等维度对六种解法进行系统的比较分析，清晰明确的展现了思维发展的过程。见表 1 六种解法系统对比分析。

Table 1. Comparative analysis of six solution methods
表 1. 六种解法系统对比分析

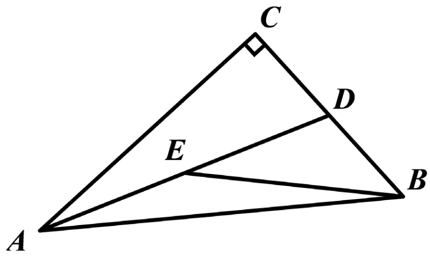
解法	知识模块	核心思想	思维路径	创新性/复杂度
解法 1	直角三角形斜边中线定理，三角形中位线定理，相似三角形的判定定理	数形结合思想转化与化归思想	观察三角形，根据已知比例构造相似三角形，最后建立等式求解。	构造相似三角形，利用其比例建立等式。但计算较为复杂。
解法 2	直角三角形斜边中线定理，角平分线比例性质	数形结合思想 转化与化归思想	观察角度的数量关系，利用角平分线性质以及直角三角形中相同角度余弦值建立等式。	使用角平分线性质建立数量关系，解题过程更加简便。
解法 3	相似三角形的判定定理，勾股定理	数形结合思想	利用中点构造中位线，寻找相似三角形，建立等式。	利用中点条件在三角形内部构造中位线进行求解。
解法 4	相似三角形的判定定理，勾股定理	数形结合思想	利用中点在三角形外部构造中位线，建立等式求解。	创新在于利用中点条件在三角形外部构造中位线。
解法 5	全等三角形，相似三角形的判定定理	数形结合思想	构造全等三角形，增加条件，后利用相似三角形比例关系求解	构造全等三角形，创造长度关系。
解法 6	相似三角形的判定，四点共圆以及割线定理	数形结合思想 转化与化归思想	观察图形，根据四点共圆以及割线定理与相似三角形的比例建立等式	利用四点共圆以及割线定理，角度新颖，更加简便。

4. 题目变式

2024 年四川省成都市中考数学第 22 题需要学生运用角平分线、直角三角形性质、等腰三角形性质、三角形外角性质等知识，通过角与角、线段与角之间的关联，逐步推导得出新的边角相等关系，再建立等式，层层递进推理出的长度。充分考察了学生的数学核心素养，对学生的解题思维有一定的要求。针对此题引申出对其的变式。对例题进行变通推广，重新认识。培养学生的探索精神和创新意识，并能使学生举一反三、事半功倍。

变式 1 如下图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle C = 90^\circ$，AD 是 ΔABC 的一条中线，E 为 AD 的中点，连接 BE，若 $AD = 4$，则 BD 为__。

变式 1 与原题相比，将角平分线变为中线，在数学结构上二者均以直角三角形为载体，核心围绕线段中点、特殊线展开，本质是通过几何性质(直角三角形斜边中线、相似三角形)建立线段关系，最终转化为方程求解或比例计算。

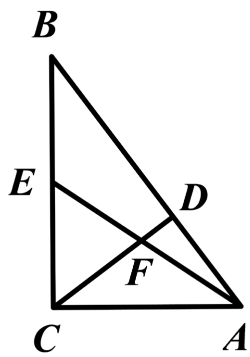


解法探究对于原题中的六种解法，其中解法 1 核心方法依然适用。连接线段后作垂线。证明相似三角形，后利用其比例关系建立等式解答；解法 2 由于涉及具体角度之间的关数量关系，利用角平分线性质以及直角三角形中相同角度余弦值的比例建立等式，而变式将角平分线这一条件进行改变，因此不适用；解法 3 与解法 4 通过构造中位线进行解答，变式如采用此种方法会更为繁琐，复杂；解法 5 涉及构造全等三角形进行解决，对于变式只需通过相似三角形比例关系解决，也较为繁琐；解法 6 涉及四点共圆知识点要求角度之间的关系，变式改变角平分线这一条件，因此也不适用。

变式 2：题目中模型变式在中考题中十分常见，将其题目中的 AD 角平分线变为 AB 上的垂线，将点 E 为 AD 中点变为 BC 中点。求解 DF 的长度，就变成了 2020 年山西中考数学第 15 题。

两题在数学结构均以直角三角形为载体，核心围绕线段中点、特殊线(角平分线/高)、线段交点展开，本质是通过几何性质建立线段关系，最终转化为方程求解或比例计算。具体共性是都包含“中点”，需利用中点性质(如直角三角形斜边中线等于斜边一半)；都涉及线段等量或比例关系的推导，需结合角的转化或相似三角形；最终目标是求线段长度，需通过设未知数、列方程或比例运算解决。

题目 (2020·山西 15 题) 如下图，在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle ACB = 90^{\circ}$，$AC = 3$，$BC = 4$，$CD \perp AB$，垂足为 D，E 为 BC 的中点，AE 与 CD 交于点 F，则 DF 的长为__。



本题是 2020 年的山西中考数学题第 15 题，本题主要考察学生如何通过添加辅助线，构造出相似三角形和中位线，从而利用相关定理进行求解。需要学生对三角形的各种性质和定理有深入的理解，并能灵活运用。除此之外还可以由于高等几何中的梅涅劳斯定理(任何一条直线截三角形的各边或者其延长线，都使得三条不相邻线段之积等于另外三条线段之积)进行求解。两道中考题的模型类似，解法涉及到知识点也类似，此类模型仍有较高的研究意义。

5. 解题反思

5.1. 引导学生多思解题角度，促进思维灵活性发展

“一题多解”是指从不同的角度、用不同的思维方式和知识来解决同一个数学问题。其核心在于通过对问题的深入分析，挖掘出多种可能的解题途径，这体现了数学思维的灵活性和发散性。它要求解题者不局限于一种固定的模式，而是能够根据题目特点和自身知识储备，灵活运用各种数学方法来寻找答案。学生在解题过程中用不同角度去看待问题，他们将会发现不同的思路及解法，通过对比其解法后进行变式探究，会拓宽其思维，促进思维的灵活性发展。

反思上述六种解法均以构造已知线段与未知线段的数量关系为核心思路，通过联系相似三角形，角平分线性质，全等三角形等知识点，寻求方法去建立等式。由于观察的角度不同，得出的解决方案也不同。从多种解法通过多角度分析找到最优解。同时，我们应通过解法研究，以题促教[3]，为我们的课堂

教学提供新的思路。

5.2. 透过解题本质促进思维品质发展

通过上述六种不同解法可以发现，尽管其六种解法使用了不同角度，不同知识点，但其均可转化为寻求未知线段与已知线段之间的关系的问题。以及通过本题对其变式题进行对比，发现两道题目几何模型类似。这就启示我们在进行教学时，不能一味的“灌输式”“为了完成任务”去教学，遇到基本的数学模型时，要有意识地进行引申，变式。对该模型进行深刻认识。同样，在讲解模型及其变式时，要能够抓重点和本质，透过模型变式去挖掘其基本图形，实现图形的“化繁为简”[4]。

本文呈现的 6 种几何解法，核心技巧均锚定“直角三角形性质、中点关联(中位线/斜边中线)、相似/全等构造”三大知识，以“数形结合、转化化归”为共通思想：或借角平分线、四点共圆等条件简化线段关系，或通过内部或外部中位线、全等三角形搭建等量桥梁，最终均落脚于“几何性质→线段等式→数值求解”的逻辑链。对教学而言，可先聚焦“中点 + 直角三角形”的基础关联(如解法 1、2)，再拓展构造性技巧(如内/外中位线、全等)，最后用“四点共圆”等新颖角度拓宽思维。让学生能通过解法差异体会“同一问题的多元推理路径”，助力从“会解题”到“会选法、会创法”的思维进阶。

参考文献

[1] 程华. 从“一题多解”审思解题教学的思维培养[J]. 数学通报, 2020, 59(8): 50-54.

[2] 陈露, 姜合峰. 一道中考数学题的多角度思考及教学启示[J]. 初中数学教与学, 2023(20): 36-38.

[3] 王燕荣, 王佳丽, 李者. 一道中考数学题多种解法的探究及思考[J]. 中学数学, 2024(24): 88-90.

[4] 黄晓雨, 董晶晶. 一题多解散思维殊途同归觅“质因”——以一道中考题为例[J]. 初中数学教与学, 2025(8): 45-47+44.