

基于随机速率的Lévy游走模型及其反常扩散动力学研究

黄湘文

成都理工大学数学科学学院, 四川 成都

收稿日期: 2025年11月20日; 录用日期: 2025年12月15日; 发布日期: 2025年12月23日

摘要

本研究建立了一个随机速度的Lévy游走模型, 通过引入Gamma和Beta分布来描述随机速度的统计特性, 当游走时间服从指数分布时, 系统会经历从短时超扩散到长时正常扩散的转变; 而当游走时间服从幂律分布时, 系统则始终保持超扩散状态。研究发现, Gamma分布参数 (k, θ) 和Beta分布参数 (α_+, α_-) 决定了扩散过程的强度和各向异性程度。该研究不仅为理解复杂系统中的反常扩散现象提供了新的理论框架, 也为相关领域的定量分析和预测建模奠定了重要基础。

关键词

Lévy Walk, 随机速率, 反常扩散, 扩散转变

Study on the Lévy Walk Model with Random Speeds and Its Anomalous Diffusion Dynamics

Xiangwen Huang

School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: November 20, 2025; accepted: December 15, 2025; published: December 23, 2025

Abstract

This study establishes a Lévy walk model with random speeds by introducing Gamma and Beta distributions to characterize the statistical properties of stochastic velocities. When the walking time follows an exponential distribution, the system undergoes a transition from short-term super-

diffusion to long-term normal diffusion. In contrast, when the walking time follows a power-law distribution, the system persistently exhibits superdiffusive behavior. The research reveals that the parameters of the Gamma and Beta distributions determine the intensity and anisotropy of the diffusion process. This work not only provides a new theoretical framework for understanding anomalous diffusion in complex systems but also lays an important foundation for quantitative analysis and predictive modeling in related fields.

Keywords

Lévy Walk, Random Speeds, Anomalous Diffusion, Diffusion Transition

Copyright © 2025 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

随机运动现象在自然界和人类社会中普遍存在,其动力学特征往往呈现出非高斯和非平衡的统计特性[1][2]。从微观尺度看,布朗运动展现了粒子在流体中的随机游走[3];在介观尺度,动物的觅食行为表现出复杂的空间探索模式[4][5];而在宏观层面,人类迁移和金融市场波动同样显示出非凡的动力学行为[6][7]。这些现象的扩散特性通常通过均方位移(MSD) $\langle x^2(t) \rangle = \int x^2 P(x,t) dx$ 与时间 t 的标度关系 $\langle x^2(t) \rangle \sim t^\delta$ 来表征[1][2][8]:当 $\delta \neq 1$ 时表现为反常扩散,其中 $0 < \delta < 1$ 对应亚扩散, $\delta > 1$ 则对应超扩散。经典的布朗运动($\delta = 1$) [3]因其马尔可夫性和高斯性,难以刻画实际系统中的复杂扩散行为。

在诸多反常扩散模型中,Lévy walk 因其物理上的合理性而备受关注[9]。与连续时间随机游走(CTRW)不同,Lévy walk 通过耦合跳跃长度与等待时间,保证了有限的传播速率和均方位移,这一特性使其成为描述反常热传导、无序介质中光传输等物理过程的理想模型[10]-[12]。研究表明,Lévy walk 不仅是一种高效的搜索策略,其首次通过时间特性也与多种生物运动模式相符[13][14]。从分子运动到癌细胞迁移[15],从原始部落的觅食行为到现代城市中的人类移动[16][17],Lévy walk 动力学特征在多个尺度上被观测到。特别是在 COVID-19 疫情期间,病毒传播模式展现出与 Lévy walk 相似的时空关联特性[18]。

在速率分布模型的选择上,我们采用 Beta 分布描述速率的方向相关性,Gamma 分布刻画速率的幅度涨落,这一设计具有明确的物理合理性。Beta 分布在 $[0, 1]$ 区间上的灵活性使其能够精确刻画速率的方向偏好性:当形状参数 $\alpha = \beta$ 时,系统呈现各向同性扩散;当 $\alpha \neq \beta$ 时,则产生方向偏好性,这与生物趋化性、颗粒在势场中的定向运动等物理情景高度吻合。同时,Gamma 分布通过形状参数 k 和尺度参数 θ 的调节,能够更好地描述速率幅度的涨落特性。传统的均匀分布模型[18]无法刻画实际系统中观测到的非均匀速率特性,本工作采用的 Beta 和 Gamma 分布框架,既保留了数学上的简洁性,又能够通过参数调节生成丰富分布形态,从而更精确地拟合实验观测数据。特别地,Gamma 分布在 $k = 1$ 时退化为指数分布,与热力学系统中 Maxwell 速度分布的高速率尾部具有相似特性,为连接微观粒子运动与宏观统计力学提供了自然桥梁。

值得注意的是,实际系统中的运动速率往往不是恒定值。近期研究表明,速率大小可能与游走步长、持续时间或当前位置存在复杂的依赖关系[19]。这一发现促使我们重新思考传统 Lévy walk 模型的基本假设。基于此,本文提出了一种改进的 Lévy walk 模型,通过引入随机速率分布来更真实地刻画粒子运动特性。具体而言,我们采用 Beta 分布描述速率的方向相关性,Gamma 分布刻画速率的幅度涨落,并系统研究了游走时间服从指数分布和幂律分布两种情形下的动力学行为。这一建模框架不仅保留了传统 LW 在

描述反常扩散方面的优势,更重要的是能够反映实际系统中速率的统计特性,为理解复杂环境下的输运现象提供了新的理论视角。

2. 带有随机速率的 Lévy Walk

2.1. 随机速率模型介绍

考虑一维空间中具有随机速率的 Lévy walk 过程,其具有联合分布

$$\varphi(x, \tau) = \frac{1}{2} \varphi(\tau) \int_0^\infty \delta(|x| - v\tau) h(v) dv, \quad (1)$$

其中 $\varphi(\tau)$ 为游走时间的概率密度函数, $h(v)$ 为随机速率的概率密度函数。

令 $q(x, t)$ 为莱维游走粒子在 t 时刻完成一次更新,恰好位于位置 x 的概率密度函数,基于随机游走理论[20],与上一更新时刻建立关系,可以写成以下形式

$$q(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^\infty q(x-y, t-\tau) \varphi(\tau) \int_0^\infty \delta(|y| - v\tau) h(v) dv dy d\tau + \delta(t) P_0(x), \quad (2)$$

上式右边第一项表示在时刻 $t-\tau$ 位于位置 $x-y$, 由概率密度函数 $\varphi(\tau)$ 生成新的游走时间 τ , 更新一次恰好在时刻 t 位于位置 x 处, 第二项表示初始分布。首项因子 $\frac{1}{2}$ 表示粒子向左和向右运动的概率是一样的, 这与 Lévy walk 是一样的。

令 $P(x, t)$ 为在时间 t 粒子位于位置 x 的概率密度函数, 与上一更新时刻建立联系,

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_{-\infty}^\infty q(x-y, t-\tau) \psi(\tau) \int_0^\infty \delta(|y| - v\tau) h(v) dv dy d\tau, \quad (3)$$

其中 $\psi(\tau)$ 为存活概率, 于是

$$\psi(\tau) = \int_\tau^\infty \varphi(\tau') d\tau'. \quad (4)$$

方程(3)意味着在 $t-\tau$ 时刻完成最后一次更新位于位置 $x-y$, 此时尚未到观测时间 t 且生成的游走时间大于 τ , 随后粒子在这一段存活时间 τ 内将以 $\pm v$ 的速率游走 $|y| = v\tau$ 的位移, 因此 t 时刻粒子到达位置 x 处。

基于方程(2)和(3), 借助狄拉克函数的性质 $\delta(x) = \delta(-x)$ 及 $\int f(x) \delta(x-y) dx = f(y)$ 化简可得

$$q(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \varphi(\tau) \int_0^\infty q(x-v\tau, t-\tau) h(v) dv d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \varphi(\tau) \int_0^\infty q(x+v\tau, t-\tau) h(v) dv d\tau + \delta(t) P_0(x),$$

$$P(x, t) = \frac{1}{2} \int_0^t \psi(\tau) \int_0^\infty q(x-v\tau, t-\tau) h(v) dv d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \psi(\tau) \int_0^\infty q(x+v\tau, t-\tau) h(v) dv d\tau.$$

对上述两式关于 x 作傅里叶变换至 k , 结合其卷积定理和欧拉公式[21]可得

$$\begin{aligned} \tilde{q}(k, t) &= \frac{1}{2} \int_0^t \left\{ \varphi(\tau) \int_0^\infty (e^{-ikv\tau} + e^{ikv\tau}) h(v) dv \right\} \tilde{q}(k, t-\tau) d\tau + \delta(t) \tilde{P}_0(k) \\ &= \int_0^t \left\{ \varphi(\tau) \int_0^\infty \cos(kv\tau) h(v) dv \right\} \tilde{q}(k, t-\tau) d\tau + \delta(t) \tilde{P}_0(k), \\ \tilde{P}(k, t) &= \int_0^t \left\{ \psi(\tau) \int_0^\infty \cos(kv\tau) h(v) dv \right\} \tilde{q}(k, t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

再此对上述两式关于 t 作拉普拉斯变换至 s , 结合其卷积定理[21]可得

$$\hat{\tilde{q}}(k, s) = \mathcal{L}_{t \rightarrow s} \left\{ \varphi(\tau) \int_0^\infty \cos(kv\tau) h(v) dv \right\} \hat{\tilde{q}}(k, s) + \tilde{P}_0(k),$$

$$\hat{P}(k, s) = \mathcal{L}_{\tau \rightarrow s} \left\{ \psi(\tau) \int_0^\infty \cos(kv\tau) h(v) dv \right\} \hat{q}(k, s).$$

对上面两式进行整理, 则在傅里叶 - 拉普拉斯空间下的概率密度函数为

$$\hat{P}(k, s) = \frac{\tilde{P}_0(k) \mathcal{L}_{\tau \rightarrow s} \left\{ \psi(\tau) \int_0^\infty \cos(kv\tau) h(v) dv \right\}}{1 - \mathcal{L}_{\tau \rightarrow s} \left\{ \phi(\tau) \int_0^\infty \cos(kv\tau) h(v) dv \right\}} \quad (5)$$

2.2. 统计矩计算及分析

为了计算 Lévy walk 过程中粒子位置的统计矩, 我们对 $\cos(kv\tau)$ 进行 Taylor 展开, 即

$\cos(kv\tau) \approx 1 - \frac{(kv\tau)^2}{2} + O(k^4)$, 则

$$\int_0^\infty \cos(kv\tau) h(v) d\tau \approx 1 - \frac{k^2 \tau^2}{2} \int_0^\infty v^2 h(v) dv = 1 - \frac{k^2 \tau^2 \langle v^2 \rangle}{2},$$

其中 $\langle v^2 \rangle$ 表示随机速率的二阶矩。

根据上式化简(5)式可得

$$\hat{P}(k, s) \approx \frac{\tilde{P}_0(k) [2\hat{\psi}(s) - \langle v^2 \rangle k^2 \hat{\psi}''(s)]}{2 - 2\hat{\phi}(s) + \langle v^2 \rangle k^2 \hat{\phi}''(s)}, \quad (6)$$

其中 $\hat{\psi}(s)$ 为存活概率在频域空间的表达式, 根据(4)有 $\hat{\psi}(s) = \frac{1 - \hat{\phi}(s)}{s}$ 。

根据 $\langle x^n \rangle = (-i)^n \frac{\partial}{\partial k^n} \hat{P}(k, s) \Big|_{k=0}$ 可得

$$\langle x \rangle \approx 0.$$

进一步可以得到频域空间下的二阶矩为

$$\langle \hat{x}^2(s) \rangle \approx \langle v^2 \rangle \left[\frac{\hat{\psi}''(s)}{1 - \hat{\phi}(s)} + \frac{\hat{\phi}''(s)}{s(1 - \hat{\phi}(s))} \right]. \quad (7)$$

2.2.1. 游走时间服从指数分布

当游走时间服从指数分布:

$$\phi(\tau) = \lambda e^{-\lambda\tau}, \quad (8)$$

我们有

$$\hat{\phi}(s) = \frac{\lambda}{\lambda + s}, \quad \hat{\psi}(s) = \frac{1}{\lambda + s}$$

将上面两式代入(7)并对 s 关于 t 进行拉普拉斯变换逆变换, 得到

$$\langle x^2(t) \rangle \approx 2\langle v^2 \rangle \left[\frac{1}{\lambda} t + \frac{1}{\lambda^2} (e^{-\lambda t} - 1) \right]. \quad (9)$$

上式展示了粒子均方位移(MSD)随时间演化的规律, 其动力学行为呈现两段式特征, 短时间 ($t \ll \lambda^{-1}$) 时,

将指数项 Taylor 展开, $e^{-\lambda t} \approx 1 - \lambda t + \frac{(\lambda t)^2}{2}$, 代入上式可得 $\langle x^2(t) \rangle \sim \langle v^2 \rangle t^2$, 对应于弹道扩散; 长时间

($t \gg \lambda^{-1}$) 时, 指数项 $e^{-\lambda t} \rightarrow 0$, 主导项为线性项, 即 $\langle x^2(t) \rangle \sim \frac{2\langle v^2 \rangle}{\lambda} t$, 此时粒子运动趋近于布朗运动, MSD 随时间线性增长。特征时间尺度 λ^{-1} 决定了两种机制的过渡, 这一模型广泛应用于生物运动和异常输运现象的研究[13] [14]。

2.2.2. 游走时间服从幂律分布

当游走时间服从幂律分布:

$$\varphi(\tau) = \frac{\alpha \tau_0^\alpha}{\tau^{1+\alpha}}, \quad (10)$$

其中 $\tau_0 > 0$, $0 < \alpha < 1$, 当时间充分长时经过拉普拉斯变换后的渐进形式为[22]

$$\hat{\varphi}(s) \sim 1 - \tau_0^\alpha \Gamma(1-\alpha) s^\alpha, \quad \hat{\psi}(s) \sim \tau_0^\alpha \Gamma(1-\alpha) s^{\alpha-1}$$

将上面两式代入(7)并对 s 关于 t 进行拉普拉斯变换逆变换, 得到

$$\langle x^2(t) \rangle \approx \langle v^2 \rangle (1-\alpha) t^2. \quad (11)$$

上式揭示了 Lévy 游走在幂律游走时间分布 ($0 < \alpha < 1$) 下的核心特征: 粒子均方位移随时间呈二次增长, 表现出典型的弹道超扩散行为。这一结果源于游走时间分布的长尾特性 ($\tau^{-1-\alpha}$) 使粒子频繁保持长时间定向运动, 其中参数 α 调控扩散强度, α 越小, 扩散越接近理想弹道运动。该结论不仅解释了生物觅食等自然现象中的高效迁移策略, 还为设计基于超扩散的优化搜索算法提供了理论依据, 突显了幂律统计在非平衡系统中的关键作用[16] [17]。

2.3. 具体随机速率分布分析

2.3.1. 随机速率服从 Beta 分布

当随机速率服从 Beta 分布:

$$h(v) = \frac{v^{\alpha_+ - 1} (1-v)^{\alpha_- - 1}}{B(\alpha_+, \alpha_-)}, \quad (12)$$

其中 $B(\alpha_+, \alpha_-) = \frac{\Gamma(\alpha_+ + \alpha_-)}{\Gamma(\alpha_+) \Gamma(\alpha_-)}$ 为 Beta 函数, $\alpha_+, \alpha_- > 0$, $0 \leq v \leq 1$, Beta 分布的均值与方差分别为

$$\langle v \rangle = \frac{\alpha_+}{\alpha_+ + \alpha_-}, \quad \text{Var}(v) = \frac{\alpha_+ \alpha_-}{(\alpha_+ + \alpha_-)^2 (\alpha_+ + \alpha_- + 1)}.$$

进一步可得到速率的二阶矩为

$$\langle v^2 \rangle = \frac{\alpha_+ (\alpha_+ + 1)}{(\alpha_+ + \alpha_-) (\alpha_+ + \alpha_- + 1)}. \quad (13)$$

(1) 游走时间服从指数分布

将(13)代入(9)中, 可得指数分布游走时间的二阶矩表达式为

$$\langle x^2(t) \rangle \approx \frac{2\alpha_+ (\alpha_+ + 1)}{(\alpha_+ + \alpha_-) (\alpha_+ + \alpha_- + 1)} \left[\frac{1}{\lambda} t + \frac{1}{\lambda^2} (e^{-\lambda t} - 1) \right]. \quad (14)$$

Lévy 游走中, 当游走时间服从指数分布时, 其均方位移(MSD)呈现跨时间尺度的动力学行为: 长时扩散由线性项主导, 短时超扩散行为则由指数修正项决定。图 1 通过 Beta 分布刻画了不同的速率分布特

性,进而对应不同的扩散行为:第一组 U 型速率分布 ($\alpha_+ = \alpha_- = 0.5$) 速率集中在低值与高值两端,呈现间歇性爆发运动(低速率段的“停滞”与高速率段的“爆发”交替),扩散涨落最大;

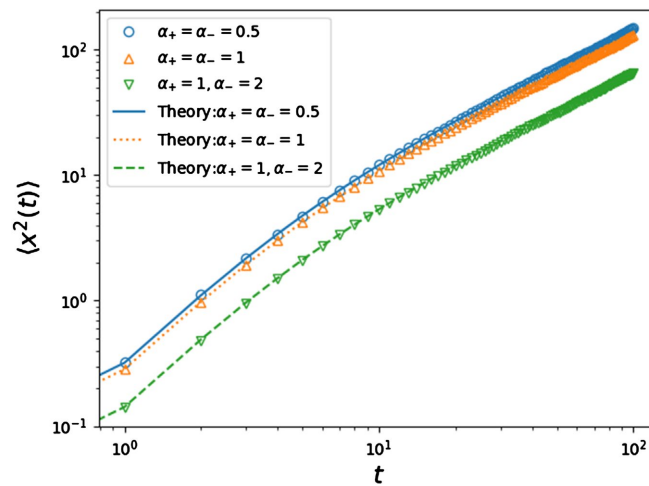


Figure 1. Evolution of the mean squared displacement (MSD) over time for a random walk with waiting times following an exponential distribution and rates following a Beta distribution under different Beta distribution parameters, where $\lambda = 0.5$

图 1. 不同 Beta 分布参数下游走时间服从指数分布, 速率服从 Beta 分布时 MSD 随时间的演化行为。其中 $\lambda = 0.5$

第二组均匀速率分布 ($\alpha_+ = \alpha_- = 1$) 速率在取值范围内均匀分布, 代表无明显快慢偏好的对称扩散, 扩散涨落处于中等水平; 第三组左偏速率分布 ($\alpha_+ = 1, \alpha_- = 2$) 速率集中在低值区域, 描述受阻尼抑制的运动状态。

这种速率分布的形状调控直接影响扩散强度: 对称且分散的速率分布(如 U 型)会因高速率段的“爆发运动”增强扩散; 集中于低值的偏态分布(如左偏)则因速率整体偏低而削弱扩散; 均匀分布的扩散强度则介于两者之间。这一参数化的速率分布调控方法, 可系统模拟不同物理场景(如生物个体的间歇性运动、平衡态下的对称扩散、介质阻尼中的沉降过程等)的扩散行为[15]-[17]。

(2) 游走时间服从幂律分布

类似地, 将(13)代入(11)中, 可得幂律分布游走时间的二阶矩表达式为

$$\langle x^2(t) \rangle = \frac{\alpha_+ (\alpha_+ + 1)(1 - \alpha)}{(\alpha_+ + \alpha_-)(\alpha_+ + \alpha_- + 1)} t^2. \quad (15)$$

图 2 中展示了三种不同参数组合下 Lévy 游走的均方位移(MSD)随时间演化的理论预测与实验结果。幂律分布游走时间导致的 MSD 表现为典型的超扩散行为 ($MSD \propto t^2$), 其中参数 α_+ 和 α_- 通过系数 $C = \frac{\alpha_+ (\alpha_+ + 1)(1 - \alpha)}{(\alpha_+ + \alpha_-)(\alpha_+ + \alpha_- + 1)}$ 调控扩散强度: 当 $\alpha_+ = \alpha_- = 0.5$ 时扩散最强 ($C = 0.1875$), $\alpha_+ = \alpha_- = 1$ 时次之 ($C \approx 0.1667$), 而 $\alpha_+ = 1, \alpha_- = 2$ 时最弱 ($C \approx 0.0556$)。实验数据与理论曲线的高度吻合验证了该模型对幂律游走时间系统的适用性, 特别是能准确描述从对称扩散 ($\alpha_+ = \alpha_-$) 到非对称阻尼扩散 ($\alpha_+ \neq \alpha_-$) 的连续过渡行为。

从上面可以看出, 游走时间分布的选择决定了系统的扩散特性: 当游走时间服从指数分布时, 系统表现出从短时弹道扩散 ($MSD \propto t^2$) 到长时正常扩散 ($MSD \propto t$) 的过渡行为, 由转向率 λ 控制过渡时间尺度; 而当游走时间服从幂律分布 ($0 < \alpha < 1$) 时, 系统则始终维持超扩散状态 ($MSD \propto t^2$), 这是由于幂律分布的长尾特性允许粒子保持极长时间的定向运动。当随机速率服从 Beta 分布时, 两个参数 α_+ 和 α_- 共同

调控速率分布的不对称性和扩散强度，其中指数分布情形适用于具有特征时间尺度的有限记忆系统，而幂律分布则更适合描述具有长程关联的爆发性运动。这两种情况共同构成了 Lévy 游走模型描述从局部扩散到全局输运的完整理论框架。

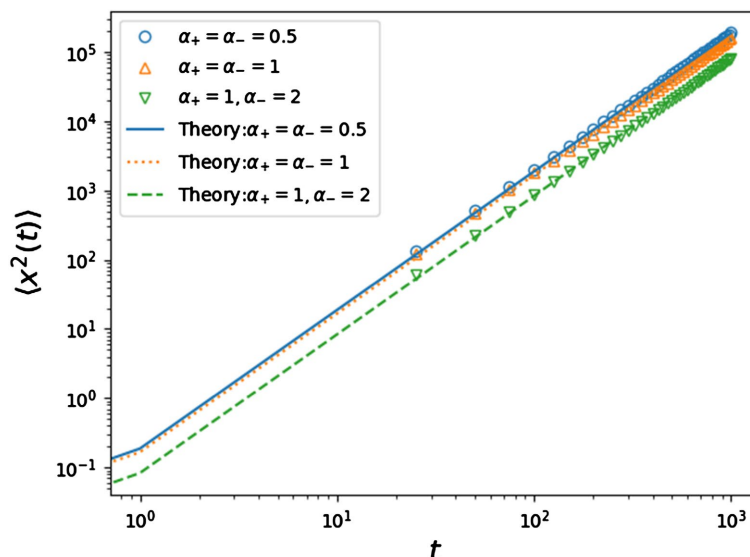


Figure 2. Evolution of MSD over time in a random walk with power-law distributed waiting times and Beta distributed rates under different Beta distribution parameters. Here, $\alpha = 0.5$

图 2. 不同 Beta 分布参数下游走时间服从幂律分布，速率服从 Beta 分布时 MSD 随时间的演化行为。其中 $\alpha = 0.5$

2.3.2. 随机速率服从 Gamma 分布

当随机速率服从 Gamma 分布：

$$h(v) = \frac{v^{k-1} e^{-v/\theta}}{\theta^k \Gamma(k)}, \quad (16)$$

其中 $v \geq 0$ ，Gamma 分布的均值与方差分别为

$$\langle v \rangle = k\theta, \quad \text{Var}(v) = k\theta^2.$$

进一步得到速率的二阶矩为

$$\langle v^2 \rangle = k(k+1)\theta^2. \quad (17)$$

(3) 游走时间服从指数分布

将(17)代入(9)中，可得指数分布游走时间的二阶矩表达式为

$$\langle x^2(t) \rangle \approx 2k(k+1)\theta^2 \left[\frac{1}{\lambda} t + \frac{1}{\lambda^2} (e^{-\lambda t} - 1) \right]. \quad (18)$$

图 3 中展示的三组不同参数 (k, θ) 下的 MSD 曲线，在双对数坐标下均呈现出从短时 t^2 依赖到长时线性增长的典型跨尺度转变，与理论预测完美吻合。特别值得注意的是，系数 $2k(k+1)\theta^2$ 定量反映了 Gamma 分布参数对扩散强度的调控作用，较大的形状参数 k 和尺度参数 θ 会导致更显著的扩散增强，这在不同参数组的曲线间距差异中得到了直观体现。当 $k = 0.5$ 时，系统表现出最强的初始超扩散(曲线初始斜率最大)，而随着 k 增大，扩散行为逐渐趋近于正常扩散。这种理论与实验的一致性，不仅验证了模型的正确性，更为理解复杂系统中反常扩散的微观机制提供了重要依据。

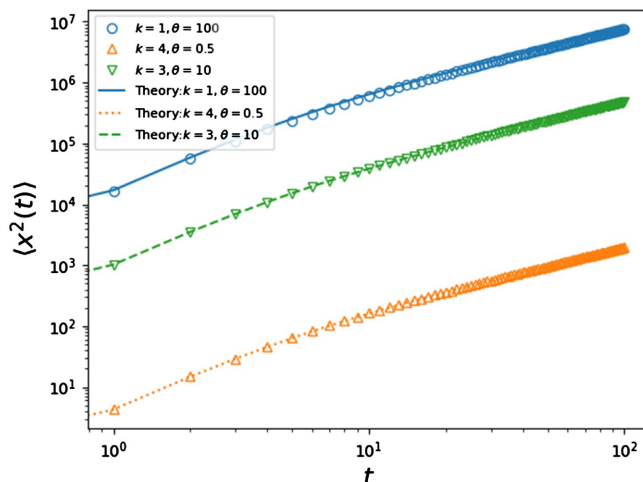


Figure 3. Evolution of the mean squared displacement (MSD) over time for a random walk with exponentially distributed waiting times and Gamma distributed rates, under different Gamma distribution parameters. Here, $\lambda = 0.5$

图 3. 不同 Gamma 分布参数下游走时间服从指数分布, 速率服从 Gamma 分布时 MSD 随时间的演化行为。其中 $\lambda = 0.5$

(4) 游走时间服从幂律分布

将(17)代入(11)中, 可得幂律分布游走时间的二阶矩表达式为

$$\langle x^2(t) \rangle \approx k(k+1)\theta^2(1-\alpha)t^2. \quad (19)$$

上述理论预测表明, 系统的均方位移呈现典型的超扩散行为 ($MSD \propto t^2$), 其扩散强度由系数 $k(k+1)\theta^2(1-\alpha)$ 综合调控: Gamma 分布参数 k 和 θ 决定速率涨落的幅度, 而幂律指数 $\alpha \in (0,1)$ 则通过 $(1-\alpha)$ 项反映长尾游走时间对持续超扩散的贡献。图 4 中不同参数组的曲线在双对数坐标下均保持斜率为 2 的线性增长, 与理论预测的 t^2 标度律完美吻合。特别值得注意的是, 当 α 趋近于 0 时(游走时间分布尾部的幂律衰减越缓慢), 系统的超扩散行为越显著(曲线整体上移); 而随着 α 增大, 扩散强度逐渐减弱, 这与公式(19)中 $(1-\alpha)$ 项的减小趋势一致。这种严格的标度行为证实了幂律记忆效应在维持持续超扩散中的关键作用。

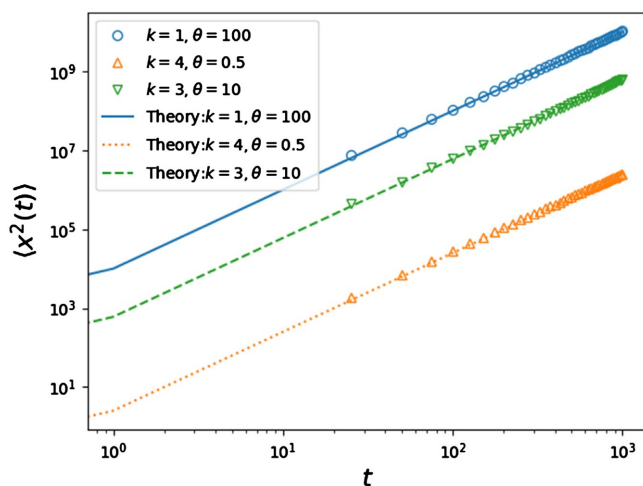


Figure 4. Evolution of the mean squared displacement (MSD) over time for a random walk with power-law distributed waiting times and Gamma distributed rates under different Gamma distribution parameters, where $\alpha = 0.5$

图 4. 不同 Gamma 分布参数下游走时间服从幂律分布, 速率服从 Gamma 分布时 MSD 随时间的演化行为。其中 $\alpha = 0.5$

图3和图4的对比分析完整揭示了 Lévy 游走在不同游走时间分布下的扩散动力学特征。两组实验结果与理论预测的高度一致, 不仅验证了模型参数 $(k, \theta, \alpha, \lambda)$ 对扩散行为的精确调控能力, 更建立了从有限记忆(指数分布)到长程记忆(幂律分布)系统的统一理论框架, 为解释生物迁移、非平衡输运等复杂系统中的反常扩散现象提供了定量依据[15]-[17]。

3. 结论

本研究对随机速率 Lévy 游走模型进行了系统的参数化建模与动力学分析, 通过严格数学推导获得了均方位移的解析表达式, 揭示了不同游走时间分布条件下系统的扩散特性。研究结果表明, 系统的扩散行为主要取决于游走时间分布的选择: 在指数分布情形下, 系统由初始的弹道扩散逐渐过渡至正常扩散, 其过渡时标由系统的转向率决定; 而在幂律分布情形下, 系统因长程记忆效应而持续呈现超扩散状态。理论分析进一步指出, Gamma 分布参数通过特定系数关系调控扩散强度, 而 Beta 分布参数则主导速率分布的非对称性与各向异性程度。本文特别阐述了选择 Gamma 与 Beta 分布作为速率建模基础的物理合理性, 并通过与文献中其他速率分布模型比较, 凸显了本模型在同时刻画速率幅度与方向特性方面的独特价值。该研究构建了一个能够统一描述从短时记忆至长程关联系统的理论框架, 为阐释生物运动、非平衡输运等复杂现象中的反常扩散机制提供了新的视角。数值模拟结果与理论预测高度一致, 验证了模型参数对系统动力学行为的有效调控能力, 展现出在跨尺度复杂输运现象研究中广泛的应用潜力。

参考文献

- [1] Weiss, G.H. and Rubin, R.J. (1983) Random Walks: Theory and Selected Applications. *Advances in Chemical Physics*, **52**, 363-505.
- [2] Méndez, V., Campos, D. and Bartumeus, F. (2016) *Stochastic Foundations in Movement Ecology*. Springer.
- [3] Brown, R. (1828) XXVII. A Brief Account of Microscopical Observations Made in the Months of June, July and August 1827, on the Particles Contained in the Pollen of Plants; and on the General Existence of Active Molecules in Organic and Inorganic Bodies. *The Philosophical Magazine*, **4**, 161-173. <https://doi.org/10.1080/14786442808674769>
- [4] Loverdo, C., Bénichou, O., Moreau, M. and Voituriez, R. (2009) Robustness of Optimal Intermittent Search Strategies in One, Two, and Three Dimensions. *Physical Review E*, **80**, Article 031146. <https://doi.org/10.1103/physreve.80.031146>
- [5] Bénichou, O., Coppey, M., Moreau, M., Suet, P. and Voituriez, R. (2005) Optimal Search Strategies for Hidden Targets. *Physical Review Letters*, **94**, Article 198101. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.94.198101>
- [6] Bijeljic, B., Mostaghimi, P. and Blunt, M.J. (2011) Signature of Non-Fickian Solute Transport in Complex Heterogeneous Porous Media. *Physical Review Letters*, **107**, Article 204502. <https://doi.org/10.1103/physrevlett.107.204502>
- [7] Berkowitz, B., Dror, I., Hansen, S.K. and Scher, H. (2016) Measurements and Models of Reactive Transport in Geological Media. *Reviews of Geophysics*, **54**, 930-986. <https://doi.org/10.1002/2016rg000524>
- [8] Shlesinger, M.F. (1974) Asymptotic Solutions of Continuous-Time Random Walks. *Journal of Statistical Physics*, **10**, 421-434. <https://doi.org/10.1007/bf01008803>
- [9] Zaburdaev, V., Denisov, S. and Klafter, J. (2015) Lévy Walks. *Reviews of Modern Physics*, **87**, 483-530. <https://doi.org/10.1103/revmodphys.87.483>
- [10] Dhar, A., Saito, K. and Derrida, B. (2013) Exact Solution of a Lévy Walk Model for Anomalous Heat Transport. *Physical Review E*, **87**, Article 10103. <https://doi.org/10.1103/physreve.87.010103>
- [11] Barkai, E., Fleurov, V. and Klafter, J. (2000) One-Dimensional Stochastic Lévy-Lorentz Gas. *Physical Review E*, **61**, 1164-1169. <https://doi.org/10.1103/physreve.61.1164>
- [12] Xu, P., Zhou, T., Metzler, R. and Deng, W. (2020) Lévy Walk Dynamics in an External Harmonic Potential. *Physical Review E*, **101**, Article 062127. <https://doi.org/10.1103/physreve.101.062127>
- [13] Lomholt, M.A., Tal, K., Metzler, R. and Joseph, K. (2008) Lévy Strategies in Intermittent Search Processes Are Advantageous. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **105**, 11055-11059. <https://doi.org/10.1073/pnas.0803117105>
- [14] Sims, D.W., Humphries, N.E., Hu, N., Medan, V. and Berni, J. (2019) Optimal Searching Behaviour Generated Intrinsically by the Central Pattern Generator for Locomotion. *eLife*, **8**, e50316. <https://doi.org/10.7554/elife.50316>
- [15] Huda, S., Weigelin, B., Wolf, K., Tretiakov, K.V., Polev, K., Wilk, G., et al. (2018) Lévy-Like Movement Patterns of

-
- Metastatic Cancer Cells Revealed in Microfabricated Systems and Implicated *in Vivo*. *Nature Communications*, **9**, Article No. 4539. <https://doi.org/10.1038/s41467-018-06563-w>
- [16] Raichlen, D.A., Wood, B.M., Gordon, A.D., Mabulla, A.Z.P., Marlowe, F.W. and Pontzer, H. (2014) Evidence of Lévy Walk Foraging Patterns in Human Hunter-Gatherers. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **111**, 728-733. <https://doi.org/10.1073/pnas.1318616111>
 - [17] Murakami, H., Feliciani, C. and Nishinari, K. (2019) Lévy Walk Process in Self-Organization of Pedestrian Crowds. *Journal of the Royal Society Interface*, **16**, Article 20180939. <https://doi.org/10.1098/rsif.2018.0939>
 - [18] Gross, B., Zheng, Z., Liu, S., Chen, X., Sela, A., Li, J., *et al.* (2020) Spatio-Temporal Propagation of COVID-19 Pandemics. *Europhysics Letters*, **131**, Article 58003. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/131/58003>
 - [19] Xu, P., Deng, W. and Sandev, T. (2020) Lévy Walk with Parameter Dependent Velocity: Hermite Polynomial Approach and Numerical Simulation. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, **53**, Article 115002. <https://doi.org/10.1088/1751-8121/ab7420>
 - [20] Zaburdaev, V., Schmiedeberg, M. and Stark, H. (2008) Random Walks with Random Velocities. *Physical Review E—Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, **78**, Article 011119.
 - [21] Abramowitz, M., Stegun, I.A. and Romain, J.E. (1965) Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables. *Physics Today*, **19**, 120-121. <https://doi.org/10.1063/1.3047921>
 - [22] Hou, R., Cherstvy, A.G., Metzler, R. and Akimoto, T. (2018) Biased Continuous-Time Random Walks for Ordinary and Equilibrium Cases: Facilitation of Diffusion, Ergodicity Breaking and Ageing. *Physical Chemistry Chemical Physics*, **20**, 20827-20848. <https://doi.org/10.1039/c8cp01863d>