

高斯域上离散数列短区间加权的Erdős-Kac定理

石云智

青岛大学数学与统计学院, 山东 青岛

收稿日期: 2025年11月27日; 录用日期: 2025年12月31日; 发布日期: 2026年1月12日

摘 要

设 K 是高斯域, $a_K(n)$ 是 $\mathbb{Z}[i]$ 中范数为 n 的非零整理想的个数。本文建立了高斯域上离散数列短区间上以 $a_K(n^2)^l$ ($l \in \mathbb{Z}^+$) 加权的Erdős-Kac型定理, 将使用推广的Selberg-Delange方法来研究此定理。

关键词

Selberg-Delange方法, Erdős-Kac定理, 短区间

Erdős-Kac Theorem of Short Interval Weighting of Discrete Series on Gaussian Domain

Yunzhi Shi

School of Mathematics and Statistics, Qingdao University, Qingdao Shandong

Received: November 27, 2025; accepted: December 31, 2025; published: January 12, 2026

Abstract

The Gaussian domain is the number of non-zero integer ideals in the middle norm. This article has established a high. The Erdős-Kac type theorem, which is weighted by N on the short interval of discrete sequences on the Squain, will use the generalized. The Selberg-Delange method is used to study this theorem.

Keywords

Selberg-Delange Method, Erdős-Kac Theorem, Short Interval

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

设 K 是有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的 d 次代数扩张, 类似于有理数域上的 Riemann zeta 函数, 可以定义数域 K 上对应的 Dedekind zeta 函数

$$\zeta_K(s) = \sum_a \frac{1}{(\mathfrak{N}a)^s}, (\Re s > 1)$$

其中 $\mathfrak{N}a$ 是一个非零整理想 a 的范数. 又定义理想计数函数 $a_K(n)$ 为数域 K 的整环 $\mathcal{O}_K$ 上范数为 n 的非零整理想的个数, 则 Dedekind zeta 函数可以改写为

$$\zeta_K(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{a_K(n)}{n^s}$$

函数 $a_K(n)$ 在代数数论中有着非常重要的作用, 由于它的分布是不规律的, 许多数学家都致力于研究 $a_K(n)$ 的均值渐近估计. 1927 年, Landau [1] 给出了一个关于 $a_K(n)$ 渐近公式并给出了证明, 其中 K 为有理域 $\mathbb{Q}$ 上的阶数为 $d \geq 2$ 的代数数域, 有

$$\sum_{n \leq x} a_K(n) = cx + O\left(x^{\frac{1-\frac{2}{d+1}+\varepsilon}{d+1}}\right),$$

其中 c 是 $\zeta_K(s)$ 在其简单极点 $s=1$ 处的常数, $\varepsilon > 0$ 是一个任意小的常数.

Landau 的结果是很难被改进的, 1993 年, Nowak [2] 证明了对于扩张次数 $d \geq 3$ 的代数数域 K 有如下结果

$$\sum_{n \leq x} a_K(n) = cx + \begin{cases} O\left(x^{\frac{1-\frac{2}{d}+\frac{8}{d(5d+2)}}{d}} (\log x)^{\frac{10}{5d+2}}\right), & 3 \leq d \leq 6, \\ O\left(x^{\frac{1-\frac{2}{d}+\frac{3}{2d^2}}{d}} (\log x)^{\frac{2}{d}}\right), & d \geq 7. \end{cases}$$

当 K 为有理数域 $\mathbb{Q}$ 上的阶数为 $d \geq 2$ 的伽罗瓦扩张. 2010 年, Lü 和 Wang [3] 给出了 $a_K(n)$ 高次的均值渐近公式, 对于 $\forall \varepsilon > 0$ 和任意整数 $l \geq 2$, 有

$$\sum_{n \leq x} a_K(n)^l = xP_l(\log x) + O\left(x^{\frac{1-\frac{3}{d^l+6}+\varepsilon}{d^l+6}}\right)$$

其中 $P_l(t)$ 关于 t 阶为 $d^{l-1}-1$ 的一个多项式.

Lü 和 Yang 给出了在二次域 K 上 $a_K(n)$ 在平方处的渐近公式. 对于任意整数 $l \geq 1$,

$$\sum_{n \leq x} a_K(n^2)^l = xP_m(\log x) + O\left(x^{\frac{1-\frac{3}{2m+2}+\varepsilon}{2m+2}}\right)$$

其中 $m = \frac{3^l + 1}{2}$, $P_m(t)$ 是关于 t 阶为 $m-1$ 的多项式, $\varepsilon > 0$ 是一个任意小的正常数。而且, 当 $l \geq 3$ 时, 得到了更精确的误差项为

$$\sum_{n \leq x} a_K(n^2)^l = x P_m(\log x) + O\left(x^{\frac{1}{2m-1} + \varepsilon}\right)$$

2015 年, Zhai [4] 给出算术函数 $a_K(n)^2$ 的均值渐近公式和最余项, 其中 K 为有理域 $\mathbb{Q}[i]$ 上的阶数为 $d=2$ 的一个扩张, 有

$$\sum_{n \leq x} a_K(n)^2 = B_0 x \log x + B_1 x + O\left(x^{1/2} (\log x)^3\right)$$

其中 D 为 K 的判别式,

$$B_0 = \frac{6}{\pi^2} L^2(1, \chi_D) \prod_{p|D} \frac{p}{p+1}$$

$L(s, \chi_D)$ 是 Dirichlet L 函数, 且 χ_D 为模 $|D|$ 的非主实特征。Zhai 还证明了 $a_K(n)^2$ 在短区间上的均值渐近公式估计, 当 $y = o(x), x \rightarrow \infty$, 有 $y/(x^{1/2} \log x) \rightarrow \infty$ 时间, 有

$$\sum_{x < n \leq x+y} a_K(n)^2 \sim B_0 y \log x$$

算术函数分布问题的讨论可以从概率的观点出发。1939 年, Erdős 和 Kac [5] 利用概率的观点证明了 $\omega(n)$ 在集合 $\{n \in \mathbb{N} : n \leq x\}$ 上的概率分布近似于高斯分布, 即对任意 $\lambda \in \mathbb{R}$, 有

$$\frac{1}{x} \sum_{n \leq x, \omega(n) - \log_2 x \leq \lambda (\log_2 x)^{1/2}} 1 \rightarrow \Phi(\lambda), x \rightarrow \infty$$

研究加权 Erdős-Kac 定理的关键工具是推广的 Selberg-Delange 方法。1954 年至 1971 年间, Selberg [6] 和 Delange [7] [8] 利用与算术函数相关的 Dirichlet 级数的解析性质, 了一种相当普遍的方法, 是现在所知 Selberg-Delange 法。设 $f(n)$ 为算术函数, 相对应的 Dirichlet 级数为

$$F(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{n^s}$$

假设 $F(s)$ 可以分解

$$F(s) = G(s; z) \zeta(s)^z$$

$\Re s > 1$, 其中 $\zeta(s)$ 是 Riemann ζ 函数, $z \in \mathbb{C}$, 我们可以应用 Selberg-Delange 方法建立和函数

$$S_f(x) := \sum_{n \leq x} f(n)$$

精确的渐近公式。Tenenbaum 在文献[9]中对这个理论进行了很好的阐述。

近些年, Lau 和 Wu [10], Gui, Lü 和 Wu [11], M. Tip Easter Phaovibul [12], Wu 和 Wu [13] 和 Labihi 和 Raoujand 等一些数学家在不同的方向和领域推广了 Selberg-Delange 方法。利用上面推广的方法, Liu 和 Yang [14] 建立了在短区间上加权为 $a_K(n^2)^l$ ($l \in \mathbb{Z}^+$) 的 Erdős-Kac 型定理, 其中 K 是高斯域, $a_K(n)$ 是 $\mathbb{Z}[i]$ 上范数为 n 的非零整个数。Wang [15] 利用了 Labihi 的方法建立了在离散短区间上加权为 $d(n)^a$ 的 Erdős-Kac 型定理, 其中 $d(n)$ 是除数函数。在本文中我们将利用 Wang 的方法推广 Liu 和 Yang 的相关结果, 即研究高斯域 $\mathbb{Q}[i]$ 上短区间内离散算术序列上 $a_K(n)^2$ 加权为的 Erdős-Kac 型定理。定义和函数为

$$\bigcup_l(x, y) := \sum_{x < g(n) \leq x+y} a_K(n^2)^l$$

其中 $g(n) = nh(n)$, 对于任意的 $n \geq 1$, 有

$$h(n) > 0, h(n) \gg \frac{1}{n^\beta},$$

$$\limsup \frac{\log n}{\log g(n)} \ll \frac{1}{1-\beta}, 0 \leq \beta < \frac{1}{3}$$

$$h(p) = \frac{1}{\eta}, h(p^2) = \gamma, \eta > 1, \gamma > 0$$

对于任意的素数 p , 我们得到了如下定理。

定理 1.1. $l \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, 对于每个实数 λ , 有

$$\frac{1}{\bigcup_l(x, y)} \sum_{x < g(n) \leq x+y, \omega(n) - 3^l \eta \log_2 x \leq (3^l \eta \log_2 x)^{1/2}} a_K(n^2)^l = \phi(\lambda) + O\left(\frac{1}{(\log_2 x)^{1/2}}\right)$$

当 $x \rightarrow \infty$ 和 $x^{\frac{24}{19+\varepsilon}} \leq y \leq x$, 隐含常数取决于 $l, \eta, \gamma, \beta, \varepsilon$, 此时误差项也是最优的。

为了证明误差项的最优性, 下面给出 Laudan 素数定理。对 $l \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{Z}$, 定义

$$\bigcup_{K,l}(x, y) := \sum_{x < g(n) \leq x+y, \omega(n)=k} a_K(n^2)^l$$

得到以下的结果。

定理 1.2. $l \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$, 有

$$\bigcup_{K,l}(x, y) := \frac{y}{\log x} \frac{(3^l \eta \log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \times \left\{ Y\left(I_1(l), I_2(l), \frac{k-1}{3^l \eta \log_2 x}\right) + O\left(\frac{(\log_2 x)^2}{k \log x} + \frac{k-1}{(\log_2 x)^2}\right) \right\}$$

其中

$$Y(l_1(1), l_2(1), z) = \frac{3^l \eta}{\Gamma(3^l \eta z + 1)} \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{3^l \eta z} \left(1 + \sum_{v \geq 1} \frac{z(2v+1)^l}{g(p^v)}\right) \prod_{p \equiv -1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-3^l \eta z}$$

2. 若干引理

假设 $f: N^* \rightarrow \mathbb{C}$ 是一个算术函数, $g: N^* \rightarrow [0, \infty)$ 为满足下述条件的算术函数

$$\lim_{n \rightarrow \infty} g(n) = \infty, \quad \log \sup \frac{\log n}{\log g(n)} = \kappa \in \mathbb{R}$$

设复数 $s = \sigma + it$, 其中 σ 和 t 均为实数。定义 Dirichlet 级数

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(n)}{g(n)^s}$$

在 $\sigma \geq \sigma_c$ 内收敛, 且绝对收敛, 其中 $\sigma \geq \sigma_c + \kappa$ 为方便后面描述, 下面给出两个定义。

定义 2.1. 按横坐标收敛的 Dirichlet 级数 $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)^{-s}$ 是 $P(A, M, M_1, \sigma, l_1, l_2)$ 型的, 若满足下列条件:

(1) $g(n)$ 是实值算术函数, 使得 $g: N \rightarrow [0, \infty)$, $g(n)$ 随着 $n \rightarrow \infty$ 趋于无穷大, 并且

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log n}{\log g(n)} = \kappa$$

对于任意的 $\kappa \geq 0$ 。

(2) $F(s)$ 满足

$$F(s) = G(s, l_1(s), l_2(s)) \cdot \zeta(s)^{l_1(s)} \cdot \zeta(2s)^{l_2(s)}, \sigma > 1$$

(3) 函数 $G(s, l_1(s), l_2(s))$ 在区域 $\sigma > \frac{1}{2}$ 且满足

$$|G(s, l_1(s), l_2(s))| \leq M(3+|t|)^{\max\{\sigma(1-\sigma), 0\}} \cdot \log^A(3+|t|)$$

(4) 函数 $l_1(s), l_2(s)$ 在区域 $\sigma > \frac{1}{2}$ 内是解析的, 且满足

$$|l_1(s)| \leq M_1, |l_2(s)| \leq M_2, \sigma \in \left[\frac{1}{2}, 2+\varepsilon\right]$$

定义 2.2. 假设 Dirichlet 级数 $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)^{-s}$ 具有 $P(A, M, M_1, M_2, \sigma, l_1, l_2)$ 性质, 则称 $F(s)$ 是 $\tau(A, M, M_1, M_2, \sigma, l_1, l_2, \tilde{l}_1, \tilde{l}_2)$ 型的, 如果存在一个正实数列 $\tilde{f}^+(n)_{n \geq 1}$ 使得

$$|f(n)| \leq \tilde{f}^+(n), n \geq 1$$

和 Dirichlet 级数

$$\tilde{F}^+(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\tilde{f}^+(n)}{g(n)^s}$$

是 $P(A, M, M_1, M_2, \sigma, \tilde{l}_1, \tilde{l}_2)$ 型的。

首先, 我们给出了 Labihi 和 Raoujand 在短区间 Selberg-Delange 方法上的一般结果, 这对定理 1.1 的证明起着关键作用。

引理 2.1 假设 Dirichlet 级数 $F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} f(n)g(n)^{-s}$ 是 $\tau(A, M, M_1, M_2, \sigma, l_1, l_2, \tilde{l}_1, \tilde{l}_2)$ 型的, 那么对于任意的 $\varepsilon > 0$, 有

$$\sum_{x < g(n) \leq x+y, n \geq 1} f(n) = y(\log x)^{h(1)-1} \cdot \left\{ \lambda(l_1(s), l_2(s)) + O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right) \right\}$$

对于 $x \geq 2$, $x^{\theta+\varepsilon} \leq y \leq x$, $\theta := 1 - \frac{1}{(24/5)+2\delta}$, $|l_1(s)| \leq M_1$, $|l_2(s)| \leq M_2$, 其中

$$\lambda(l_1(1), l_2(1)) := \frac{G(1, l_1(s), l_2(s)) \zeta(2)^{l_2(1)}}{\Gamma(l_1(1))}, \quad G(s, l_1(s), l_2(s)) := F(s) \zeta(s)^{-l_1(s)} \zeta(2s)^{-l_2(s)}$$

O 项的隐含常数只 $a, A, M_1, M_2, \delta, \varepsilon$ 有关。

对于定理 1 的证明, 本文使用了加性函数理论中的高斯误差定律和 Berry-Esseen 不等式。

引理 2.2 让 $f(n)$ 是满足 $f(m_1 m_2) = f(m_1) + f(m_2)$, 其中 $(m_1, m_2) = 1$, 假设

$$F(n) = \sum_{p < n} \frac{f(p)^2}{p}$$

发散, 那么

$$f(m) < \sum_{p < m} \frac{f(p)}{p} + \omega \sqrt{2F(m)}$$

等价于

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\omega} \exp(-y^2) dy$$

对于任意的实数 ω 。

假设 $F(x)$ 是一个满足 $F(-\infty)=0$, $F(\infty)=1$ 的分布函数。定义 $F(x)$ 的特征函数为

$$f(\tau) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau x} dF(x)$$

引理 2.3 设 F , G 为分布函数, 分别具有特征函数 f , g , 设 G 可微且 G' 在 R 上有界, 则

$$\|F - G\|_{\infty} \leq 16 \frac{\|G'\|_{\infty}}{T} + 6 \int_{-T}^T \left| \frac{f(\tau) - g(\tau)}{\tau} \right| d\tau$$

对于 $T > 0$, 其中, 对于任意实值函数 $H(x)$, $\|H\|_{\infty} := \sup_{\lambda \in R} |H(\lambda)|$ 。

为了证明定理 2, 下面给出了一个关于 $a_K(n^2) z^{\omega(n)}$ 更一般的求和公式。

引理 2.4 让 $B > 0, |z| \leq B, \varepsilon > 0$, 那么

$$\sum_{x < g(n) < x+y} a_K(n^2)^l z^{\omega(n)} = y(\log x)^{3^l \eta z - 1} \left\{ zY(l_1(1), l_2(1), z) + O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right) \right\}$$

对于 $x \geq 2$ 和 $x^{19/24+\varepsilon} \leq y \leq x$, 其中

$$Y(l_1(1), l_2(1), z) = \frac{3^l \eta}{\Gamma(3^l \eta z + 1)} \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{3^l \eta z} \left(1 + \sum_{v \geq 1} \frac{z(2v+1)^l}{g(p^v)}\right) \prod_{p \equiv -1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{-3^l \eta z}$$

特别地

$$U_1(x, y) = y(\log x)^{3^l \eta - 1} \times Y(l_1(1), l_2(1), 1) + O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right)$$

对于 $x \geq 2$ 和 $x^{19/24+\varepsilon} \leq y \leq x$, 其中

$$Y(l_1(1), l_2(1), 1) = \frac{2^{\frac{(1-3^l)\eta}{2}}}{\Gamma((3^l+1)\eta/2)} \prod_{p \equiv 1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{(3^l+1)\eta}{2}} \left(1 + \sum_{v \geq 1} \frac{(2v+1)^l}{g(p^v)}\right) \prod_{p \equiv -1 \pmod{4}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{\frac{(3^l-1)\eta}{2}}$$

证明定理 2. 定义

$$U_{(k,l)} = \sum_{x < g(n) < x+y, \omega(n)=k} a_K(n^2)^l$$

并且假设

$$\sum_{x < g(n) < x+y} a_K(n^2)^l z^{\omega(n)} = \sum_k U_{(k,l)}(x, y) z^k$$

由柯西积分公式可得

$$U_{k,l} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \left(\sum_{x < g(n) < x+y} a_K(n^2)^l z^{\omega(n)} \right) \frac{dz}{z^{k+1}}$$

其中 $r = \frac{k}{3^l \eta \log(2x)}$, 由定理 2.4, 可以推出

$$U_{k,l}(x, y) = \frac{y}{\log x} I_{k,l}(x, r) + O\left(\frac{y \log_2 x}{(\log x)^2} \oint_{|z|=r} \frac{(\log x)^{3^l \eta \Re z}}{|z|^{k+1}} |dz|\right)$$

对于任意的 $x \geq 2, x^{19/24+\epsilon} \leq y \leq x, |z| \leq B, k \leq 3^l \eta \log_2 x$, 其中

$$I_{k,l}(x, r) := \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{(\log x)^{3^l \eta z} Y(l_1(1), l_2(1), z)}{z^k} dz$$

对于 $U_{k,l}(x, y)$ 的误差项, 有以下的估计

$$\begin{aligned} \oint_{|z|=1} \frac{(\log x)^{3^l \eta \Re z}}{z^{k+1}} |dz| &= \left(\frac{3^l \eta \log_2 x}{k} \right)^k \int_0^{2\pi} e^{k \cos \theta} d\theta \\ &\ll \left(\frac{3^l \eta \log_2 x}{k} \right)^k \left(\int_0^{\pi/2} e^{k \cos \theta} d\theta + 1 \right) \\ &\ll \left(\frac{3^l \eta \log_2 x}{k} \right)^k \left(\int_0^{\pi/2} e^{-t} t^{-1/2} dt + 1 \right) \\ &\ll \left(\frac{3^l \eta \log_2 x}{k!} \right)^k \end{aligned}$$

其中用 $t = k(1 - \cos \theta)$ 进行替换。

下面来估计 $I_{k,l}(x, y)$ 在 $k=1$ 和 $k \geq 2$ 的两种情况下。对于 $k=1$, 当 $|z| \leq B$ 时, 当 $z \rightarrow Y(l_1(1), l_2(1), z)$, 由柯西积分公式有,

$$\begin{aligned} I_{k,l}(x, r) &:= \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{(\log x)^{3^l \eta z} Y(l_1(1), l_2(1), z)}{z^k} dz \\ &= Y(l_1(1), l_2(1), 0) = 3^l \eta \end{aligned}$$

代入(3.1), 可以推出

$$U_{1,l}(x, y) = \frac{3^l \eta y}{\log x} \left\{ 1 + O_{l,\epsilon} \left(\frac{(\log_2 x)^2}{\log x} \right) \right\}$$

对于 $k \geq 2$, 当 $|z| \leq B$ 时, 当 $z \rightarrow Y(l_1(1), l_2(1), z)$, 由柯西积分公式有,

$$I_{k,l}(x, r) = I_{k,l}(x, r_0), r_0 = (k-1)/(3^l \eta \log_2 x)$$

在 $z=r_0$ 处 $Y(l_1(1), l_2(1), z)$ 的泰勒展开是

$$\begin{aligned} Y(l_1(1), l_2(1), z) &= Y(l_1(1), l_2(1), r_0) + Y'(l_1(1), l_2(1), r_0)(z - r_0) \\ &\quad + (z - r_0)^2 \int_0^1 (1-t) Y''(l_1(1), l_2(1), r_0 + t(z - r_0)) dt \end{aligned}$$

下面将估算(3.3)右边三项对 $I_{k,l}(x, r_0)$ 的贡献。根据柯西积分公式, 第一项的贡献是

$$\frac{Y(l_1(1), l_2(1), r_0)}{2\pi i} \oint_{|z|=0} \frac{e^{z 3^l \eta \log_2 x} (z - r_0)}{z^k} dz = \frac{(3^l \eta \log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} Y\left(l_1(1), l_2(1), \frac{k-1}{3^l \eta \log_2 x}\right)$$

同样的, 第二项的贡献是

$$\begin{aligned} & Y'(l_1(1), l_2(1), r_0) \frac{Y'(l_1(1), l_2(1), r_0)}{2\pi i} \oint_{|z|=r_0} \frac{e^{z^{3'} \eta \log_2 x (z-r_0)}}{z^k} dz \\ &= Y'(l_1(1), l_2(1), r_0) \left(\frac{(3' \eta \log_2 x)^{k-2}}{(k-2)!} - r_0 \frac{(3' \eta \log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} \right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

当 $0 < t \leq 1$ 和 $|z| = r_0$ 时。其中,

$$|r_0 + t(z - r_0)| = |r_0(1-t) + tz| \leq r_0(1-t) + t|z| = r_0$$

由 $Y(l_1(1), l_2(1), z)$ 对 $|z| \leq B$ 的解析性可知, 存在一个正常数 C_α , 使得 $Y''(l_1(1), l_2(1), z) < C_\alpha$, 以下是第三项对 $I_{k,l}(x, r_0)$ 的贡献

$$\begin{aligned} & \oint_{|z|=r_0} \frac{(\log x)^{3' \eta \Re z} |z - r_0|^2}{|z|^k} |dz| \ll r_0^{-(k-3)} \int_0^{2\pi} e^{(k-1)\cos\theta} |e^{i\theta} - 1|^2 d\theta \\ & \ll r_0^{-(k-3)} \left(\int_0^{2\pi} e^{(k-1)\cos\theta} (1 - \cos\theta) d\theta + \pi \right) \\ & \ll r_0^{-(k-3)} e^{k-1} (k-1)^{-3/2} \left(\int_0^{k-1} e^{-t} t^{-1/2} dt + \pi \right) \\ & \ll \frac{(3' \eta \log_2 x)^{k-3}}{(k-2)!} \end{aligned}$$

其中用到了 $t = (k-1)(1 - \cos\theta)$ 进行替换。将(3.2), (3.4), (3.6)带入(3.1), 可以得到

$$\begin{aligned} (3.7) \quad U_{k,l}(x, y) &= \frac{y}{\log x} \frac{(3' \eta \log_2 x)^{k-1}}{(k-1)!} Y\left(l_1(1), l_2(1), \frac{k-1}{3' \eta \log_2 x}\right) \\ &+ O\left(\frac{y \log_2 x (3' \eta \log_2 x)^k}{(\log x)^2 k!} + \frac{y}{\log x} \frac{(3' \eta \log_2 x)^{k-3}}{(k-2)!}\right) \end{aligned}$$

证明定理 1. 定义

$$F_{x,y}(\lambda) := \frac{1}{U_l(x, y)} \sum_{\substack{x < g(n) \leq x+y \\ \omega(n) - 3' \eta \log_2 x \leq \left(\lambda 3' \eta \log_2 x \right)^{\frac{1}{2}}}} a_K(n^2)^l$$

让 $\varphi_{x,y}$ 是 $F_{x,y}(\lambda)$, 例

$$\begin{aligned} \varphi_{x,y}(\tau) &:= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\tau\lambda} dF_{x,y}(\lambda) \\ &= \frac{1}{U_l(x, y)} \sum_{x < g(n) \leq x+y} a_K(n^2)^l \exp\left\{i\tau \frac{\omega(n) - 3' \eta \log_2 x}{\sqrt{3' \eta \log_2 x}}\right\} \\ \frac{e^{-i\tau T}}{U_l(x, y)} &= \sum_{x < g(n) \leq x+y} a_K(n^2)^l e^{i(\tau/T)\omega(n)} \end{aligned}$$

其中 $T = \sqrt{3' \eta \log_2 x}$, 由引理 2. 3 $F, G = (F_{x,y}, \Phi)$, 可以得到以下

$$\|F_{x,y} - \Phi\|_{\infty} \leq \frac{16}{\sqrt{2\pi}T} + 6 \int_{-T}^T \left| \frac{\varphi_{x,y}(\tau) - e^{-\tau^2/2}}{\tau} \right| d\tau$$

其中 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ 是 Φ 的最大值, 下面需要得到

$$(4.2) \quad \int_{-T}^T \left| \frac{\varphi_{xy}(\tau) - e^{-\tau^2/2}}{\tau} \right| d\tau \ll \frac{1}{T}$$

对于 $x \geq 2, x^{19/24+\epsilon} \leq y \leq x$ 。将 $z = e^{it}$ 应用到引理 2.4, 可以推出

$$\frac{1}{U_l(x, y)} \sum_{x < g(n) \leq x+y} a_K(n^2)^l e^{it\omega(n)} = (\log x)^{3^l \eta(e^{it}-1)} \left\{ A(e^{it}) + O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right) \right\}$$

对于 $t \in R, x \geq 2, x^{19/24+\epsilon} \leq y \leq x$, 并有

$$A(z) := \frac{zY(l_1(1), l_2(1), z)}{Y(l_1(1), l_2(1), 1)}$$

对于 $|z| \leq B$ 是解析的函数, 其中 $A(1) = 1; Y(l_1(1), l_2(1), z), Y(l_1(1), l_2(1), 1)$ 是引理 2.4 中所定义的。将 $t = \tau/T$ 带入上面的渐近公式, 可以得出

$$(4.3) \quad \varphi_{x,y}(\tau) = (\log x)^{3^l \eta(e^{i\tau/T}-1)} e^{-i\tau T} \left\{ A(e^{i\tau/T}) + O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right) \right\}$$

对于任意 $x \leq 2, x^{19/24+\epsilon} \leq y \leq x$ 和 $|\tau| \leq T$, 对于 $\cos t - 1 \leq -2(t/\pi)^2$, $|t| \leq 1$ 有

$$\left| (\log x)^{3^l \eta(e^{i\tau/T}-1)} e^{-i\tau T} \right| = e^{(\cos(\tau/T)-1)T^2} \leq e^{-2(\tau/\pi)^2}$$

因此, 可以推出

$$\varphi_{x,y}(\tau) \ll_{\epsilon} e^{-2(\tau/\pi)^2}$$

对于任意 $x \leq 2, x^{19/24+\epsilon} \leq y \leq x, |\tau| \leq T$ 。有以下的结论

$$(4.4) \quad \int_{\pm T^{1/3}}^{\pm T} \left| \frac{\varphi_{xy}(\tau) - e^{-\tau^2/2}}{\tau} \right| d\tau \ll \int_{T^{1/3}}^T e^{-2(\tau/\pi)^2} d\tau \ll \frac{1}{T}$$

对于任意 $(\log x)^{-1} < |\tau| \leq T^{1/3}$, 利用泰勒展开

$$\begin{aligned} A(e^{i\tau/T}) &= 1 + O(\tau/T) \\ e^{i\tau/T} - 1 &= i\tau/T - \frac{1}{2}(\tau/T)^2 + O((\tau/T)^3) \end{aligned}$$

从而可以得到

$$\begin{aligned} & (\log x)^{3^l \eta(e^{i\tau/T}-1)} A(e^{i\tau/T}) e^{-i(\tau/T)} \\ &= e^{-\tau^2/2 + O(\tau^3/T)} \left\{ 1 + O\left(\frac{|\tau|}{T}\right) \right\} \\ &= e^{-\tau^2/2} \left\{ 1 + O\left(\frac{|\tau| + |\tau|^3}{T}\right) \right\} \end{aligned}$$

将上述式子代入(4.3)

$$\varphi_{x,y}(\tau) = e^{-\tau^2/2} \left\{ 1 + O\left(\frac{|\tau| + |\tau|^3}{T}\right) \right\} \left\{ 1 + O\left(\frac{\log_2 x}{\log x}\right) \right\}$$

对于任意 $x \leq 2, x^{19/24+\epsilon} \leq y \leq x, (\log x)^{-1} < |\tau| \leq T^{1/3}$, 通过对 $\varphi_{x,y}(\tau)$ 的估计, 可以推出

$$(4.5) \quad \int_{\pm 1/\log x}^{\pm T^{1/3}} \left| \frac{\varphi_{x,y}(\tau) - e^{-\tau^2/2}}{\tau} \right| d\tau \ll \int_{1/\log x}^{T^{1/3}} \left(e^{-\tau^2/2} \frac{1+\tau^2}{T} + \frac{\log_2 x}{\tau \log x} \right) d\tau \\ \ll \frac{1}{T} + \frac{(\log_2 x)}{\log x} \ll \frac{1}{T}$$

对于任意 $|\tau| \leq (\log x)^{-1}$, 平凡地

$$\left| \tau \frac{\omega(n) - 3^l \eta \log_2 x}{\sqrt{3^l \eta \log_2 x}} \right| \ll \frac{|\tau| \log x}{T}, \quad \exp \left\{ i\tau \frac{\omega(n) - 3^l \eta \log_2 x}{\sqrt{3^l \eta \log_2 x}} \right\} = 1 + O\left(\frac{|\tau| \log x}{T}\right)$$

代入上述式子进入(4.1), 给出

$$\varphi_{x,y}(\tau) = 1 + O\left(\frac{|\tau| \log x}{T}\right) \\ e^{-\tau^2/2} = 1 + O(\tau^2)$$

得到

$$(4.6) \quad \int_{-1/\log x}^{1/\log x} \left| \frac{\varphi_{x,y}(\tau) - e^{-\tau^2/2}}{\tau} \right| d\tau \ll \int_{-1/\log x}^{1/\log x} \left(\frac{\log x}{T} + |\tau| \right) d\tau \ll \frac{1}{T}$$

现在(4.2)立即从(4.4)~(4.6)开始。最后, 证明误差项是最优的。定义

$$R_\lambda(x, y) := \frac{1}{U_l(x, y)} \prod_{\substack{x < g(n) \leq x+y \\ \omega(n) - 3^l \eta \log_2 x \leq \lambda (\sqrt{3^l \eta \log_2 x})^{1/2}}} a_K(n^2)^l - \Phi(\lambda) \\ R(x, y) := \sup_{\lambda \in R} |R_\lambda(x, y)|$$

让, $k = \lceil 3^l \eta \log_2 x \rceil, \theta = k - 3^l \eta \log_2 x$ 那么

$$(4.7) \quad \frac{U_{k,l}(x, y)}{U_l(x, y)} = F_{x,y} \left(\frac{\theta}{\sqrt{3^l \eta \log_2 x}} \right) - F_{x,y} \left(\frac{\theta - \frac{1}{3\sqrt{3\pi}}}{\sqrt{3^l \eta \log_2 x}} \right) \\ \leq \Phi \left(\frac{\theta}{\sqrt{3^l \eta \log_2 x}} \right) - \Phi \left(\frac{\theta - \frac{1}{3\sqrt{3\pi}}}{\sqrt{3^l \eta \log_2 x}} \right) + 2R(x, y) \\ = \int_{\left(\theta - \frac{1}{3\sqrt{3\pi}}\right)/\sqrt{3^l \eta \log_2 x}}^{\theta/\sqrt{3^l \eta \log_2 x}} e^{-\tau^2/2} d\tau + 2R(x, y) \\ \leq \frac{1}{3\sqrt{\pi 3^{l+1} \eta \log_2 x}} + 2R(x, y)$$

用 Stirling's 公式, 定理 2 和引理 2.4, 我们可以推断出

$$\frac{U_{k,l}(x,y)}{U_l(x,y)} \frac{Y\left(l_1(1), l_2(1), \frac{k-1}{3^l \eta \log_2 x}\right)}{Y(l_1(1), l_2(1), 1)} \frac{(3^l \eta \log_2 x)^{k-1}}{(\log x)^{3^l \eta} (k-1)!}$$

结合(4.7)和(4.8), 就可以得出

$$R(x,y) \geq \frac{1+o(1)}{2\sqrt{\pi 3^{l+1} \eta \log_2 x}} - \frac{1}{6\sqrt{\pi 3^{l+1} \eta \log_2 x}} = \frac{1+o(1)}{3\sqrt{\pi 3^{l+1} \eta \log_2 x}}$$

对于任意 $x \leq 2, x^{19/24+\epsilon} \leq y \leq x$ 。

参考文献

- [1] Landau, E. (1918) Einführung in die elementare und analytische theorie der algebraischen zahlen und der Ideale. BG Teubner.
- [2] Georg, W. (1993) On the Distribution of Integer Ideals in Algebraic Number Fields. *Mathematische Nachrichten*, **161**, 59-74. <https://doi.org/10.1002/mana.19931610107>
- [3] Chandrasekharan, K. and Good, A. (1983) On the Number of Integral Ideals in Galois Extensions. *Monatshefte für Mathematik*, **95**, 99-109. <https://doi.org/10.1007/bf01323653>
- [4] Zhai, W. (2015) Asymptotics for a Class of Arithmetic Functions. *Acta Arithmetica*, **170**, 135-160. <https://doi.org/10.4064/aa170-2-3>
- [5] Erdős, P. and Kac, M. (1939) On the Gaussian Law of Errors in the Theory of Additive Functions. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, **25**, 206-207. <https://doi.org/10.1073/pnas.25.4.206>
- [6] Selberg, A. (1954) Note on a Paper by LG Sathe. *Journal of the Indian Mathematical Society*, **18**, 83-87.
- [7] Delange, H. (1959) Sur des formules dues à Atle Selberg. *Bulletin des Sciences Mathématiques*, **83**, 101-111.
- [8] Delange, H. (1971) Sur des formules de Atle Selberg. *Acta Arithmetica*, **19**, 105-146. <https://doi.org/10.4064/aa-19-2-105-146>
- [9] Tenenbaum, G. (2015) Introduction to Analytic and Probabilistic Number Theory. American Mathematical Society. <https://doi.org/10.1090/gsm/163>
- [10] Lau, Y.K. and Wu, J. (2002) Sums of Some Multiplicative Functions over a Special Set of Integers. *Acta Arithmetica*, **101**, 365-394. <https://doi.org/10.4064/aa101-4-5>
- [11] Cui, Z., Lü, G. and Wu, J. (2018) The Selberg-Delange Method in Short Intervals with Some Applications. *Science China Mathematics*, **62**, 447-468. <https://doi.org/10.1007/s11425-017-9172-7>
- [12] Berndt, B.C. and Moree, P. (2025) Sums of Two Squares and the Tau-Function: Ramanujan's Trail. *Expositiones Mathematicae*, **43**, 125721. <https://doi.org/10.1016/j.exmath.2025.125721>
- [13] Wu, J. and Wu, Q. (2020) Mean Values for a Class of Arithmetic Functions in Short Intervals. *Mathematische Nachrichten*, **293**, 178-202. <https://doi.org/10.1002/mana.201800276>
- [14] Labihi, O. and Raouj, A. (2020) Estimation de certaines sommes courtes. *Journal of Number Theory*, **206**, 231-249. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2019.06.012>
- [15] Wang, D. (2024) Weighted Erdős-Kac Type Theorems in Short Intervals. *Acta Arithmetica*, **212**, 255-267. <https://doi.org/10.4064/aa230129-22-8>