

两个涉及Göllnitz-Gordon函数的模关系

张明洪

重庆师范大学数学科学学院, 重庆

收稿日期: 2025年11月28日; 录用日期: 2025年12月29日; 发布日期: 2026年1月12日

摘要

Göllnitz-Gordon函数是整数分拆理论中非常重要的函数, 它与著名的Rogers-Ramanujan恒等式密切相关。我们通过已知的连分数的2-剖分公式, 通过奇偶分离的方法, 得到了两个新的涉及Göllnitz-Gordon函数的模关系。

关键词

Göllnitz-Gordon函数, 2-剖分, 模关系

Two Modular Relations Involving the Göllnitz-Gordon Functions

Minghong Zhang

School of Mathematical Sciences, Chongqing Normal University, Chongqing

Received: November 28, 2025; accepted: December 29, 2025; published: January 12, 2026

Abstract

The Göllnitz-Gordon function is a crucial function in the theory of integer partitions, closely related to the renowned Rogers-Ramanujan identity. By utilizing the known 2-dissection formulas for continued fractions and employing the method of separating odd and even terms, we have derived two new modular relations involving the Göllnitz-Gordon functions.

Keywords

Göllnitz-Gordon Function, 2-Dissection Formulas, Modular Relations



1. 引言

在经典的分拆理论与 q -级数理论中, Göllnitz-Gordon 函数[1] [2]占据着重要的地位。它们源于数学家 H.Göllnitz 和 B.Gordon 在 1960 年代的开创性工作, 这两个函数分别为

$$S(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n}{(q^2; q^2)_n} q^{n^2}, \quad T(q) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-q; q^2)_n}{(q^2; q^2)_n} q^{n^2+2n}.$$

从数论的角度看, 它们与模形式理论紧密相连, 揭示了分拆函数在模特定算术级数下的同余性质。2011 年 Chadwick Gugg 证明了两个新的涉及 Göllnitz-Gordon 函数的立方的恒等式[3], 2016 年姚祥妹通过新的方法, 对已有的 2-剖分公式[4]将无穷乘积表示为 Göllnitz-Gordon 函数 $S(q)$ 和 $T(q)$ 的线性组合, 从而将模关系的证明转化为对这些组合的代数操作。通过分离偶次幂和奇次幂的项, 将原等式拆分为两个独立的恒等式, 推导出了许多新的涉及 Göllnitz-Gordon 函数立方的模关系。本文利用已知的 2-剖分公式, 通过奇偶分离和替换变量等方法得到了两个新的涉及 Göllnitz-Gordon 函数的模关系。

2. 预备知识

这一节介绍后续研究用到的 q -级数的术语和符号。

定义 1 假设 $|q| < 1$, 对于任意非负整数 n , 有限 q 移位阶乘和 q 移位阶乘定义为

$$(a; q)_n = \prod_{k=0}^{n-1} (1 - aq^k) = (1-a)(1-aq)(1-aq^2) \cdots (1-aq^{n-1}), \quad (1)$$

$$(a; q)_{\infty} = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k) = (1-a)(1-aq)(1-aq^2) \cdots \quad (2)$$

Jacobi 三重积恒等式为

$$f(a, b) = (-a; ab)_{\infty} (-b; ab)_{\infty} (ab; ab)_{\infty}. \quad (3)$$

(3)的一个重要的特例为

$$f(-q) := f(-q, -q^2) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{\frac{n(3n-1)}{2}} = (q; q)_{\infty}. \quad (4)$$

对于任意正整数 n , f_n 表示为

$$f_n = (q^n; q^n)_{\infty} = \prod_{k=1}^{\infty} (1 - q^{nk}) \quad (5)$$

Göllnitz-Gordon 函数 $S(q)$ 和 $T(q)$ 满足下列恒等式

$$S(q) = \frac{1}{(q, q^4, q^7; q^8)_{\infty}}, \quad (6)$$

$$T(q) = \frac{1}{(q^3, q^4, q^5; q^8)_{\infty}}. \quad (7)$$

3. 主要结果

模关系 1

$$S(q)S(q^3) - q^2 T(q)T(q^3) = \frac{f_1 f_3 f_4^8}{f_2^7 f_8^2 f_{12}} + 2q \frac{f_1^3 f_8^2 f_{12}}{f_2^5 f_3} \quad (8)$$

模关系 2

$$S(q^3)T(q) + qS(q)T(q^3) = 2 \frac{f_1 f_3 f_4^2 f_8^2}{f_2^5 f_{12}} - \frac{f_1^3 f_4^6 f_{12}}{f_2^7 f_3 f_8^2}. \quad (9)$$

注: Gugg [3]证明了如下模关系, 与本文的结论并不矛盾。

$$\begin{aligned} S(q)S(q^3) - q^2 T(q)T(q^3) &= \frac{f_2^2 f_6 f_8 f_{12}}{f_1 f_3 f_4^2 f_{24}}, \\ S(q^3)T(q) + qS(q)T(q^3) &= \frac{f_2 f_4 f_6^2 f_{24}}{f_1 f_3 f_8 f_{12}^2}. \end{aligned}$$

定理 1 对于(4), 用 $-q$ 代替 q , 并使用 f_n 表示可得到

$$f(q) = \frac{f_2^3}{f_1 f_4}.$$

证明:

$$\begin{aligned} \frac{f_2^3}{f_1 f_4} &= \frac{(q^2; q^2)_\infty^3}{(q; q)_\infty (q^4; q^4)_\infty} \\ &= \frac{\prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^{2+2i})^3}{\prod_{i=0}^{\infty} (1 - q^{1+i})(1 - q^{4+4i})} \\ &= \frac{(1 - q^2)(1 - q^4)(1 - q^6)(1 - q^8) \cdots}{[(1 - q)(1 - q^2)(1 - q^3) \cdots][(1 - q^4)(1 - q^8)(1 - q^{12}) \cdots]} \\ &= (1 + q)(1 - q^2)(1 + q^3)(1 - q^4) \cdots \\ &= \prod_{i=0}^{\infty} [1 - (-q)^{1+i}] \\ &= (-q; -q)_\infty \\ &= f(q). \end{aligned}$$

在本文中 $f(q)$ 特别用 f_{-1} 来表示, 即

$$f_{-1} = \frac{f_2^3}{f_1 f_4}. \quad (10)$$

Baruah, N.D 证明了如下 $f_1 f_3$ 的 2-剖分公式[5]

$$\frac{1}{f_1 f_3} = \frac{f_8^2 f_{12}^5}{f_2^2 f_4 f_6^4 f_{24}^2} + q \frac{f_4^5 f_{24}^2}{f_2^4 f_6^2 f_8^2 f_{12}}. \quad (11)$$

Xia 和 Yao 证明了如下 f_1 的 2-剖分公式[6]

$$f_1 = f_4 S(-q^2) - q f_4 T(-q^2) \quad (12)$$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{f_4^2}{f_2^3} S(-q^2) + q \frac{f_4^2}{f_2^3} T(-q^2) \quad (13)$$

$$f_1^2 = \frac{f_2 f_8^5}{f_4^2 f_{16}^2} - 2q \frac{f_2 f_{16}^2}{f_8}. \quad (14)$$

由(11)(12)(13)(14)可得

$$\begin{aligned} \frac{f_1}{f_3} &= \left[\frac{f_{12}^2}{f_6^3} S(-q^6) + q^3 \frac{f_{12}^2}{f_6^3} T(-q^6) \right] \left[f_4 S(-q^2) - q f_4 T(-q^2) \right] \\ &= \left(\frac{f_8^2 f_{12}^5}{f_2^2 f_4 f_6^4 f_{24}^2} + q \frac{f_4^5 f_{24}^2}{f_2^4 f_6^2 f_8^2 f_{12}} \right) \left(\frac{f_2 f_8^5}{f_4^2 f_{16}^2} - 2q \frac{f_2 f_{16}^2}{f_8} \right) \\ &= \frac{f_8^7 f_{12}^5}{f_2^2 f_4 f_6^4 f_{24}^2} - 2q^2 \frac{f_4^5 f_{16}^2 f_{24}^2}{f_2^3 f_6^2 f_8^3 f_{12}} + q \frac{f_4^3 f_8^3 f_{24}^2}{f_2^3 f_6^2 f_{12} f_{16}^2} - 2q \frac{f_8 f_{12}^5 f_{16}^2}{f_2 f_4 f_6^4 f_{24}^2} \\ &= \frac{f_4 f_{12}^2}{f_6^3} S(-q^2) S(-q^6) - q^4 \frac{f_4 f_{12}^2}{f_6^3} T(-q^2) T(-q^6) \\ &\quad + q^3 \frac{f_4 f_{12}^2}{f_6^3} S(-q^2) T(-q^6) - q \frac{f_4 f_{12}^2}{f_6^3} S(-q^6) T(-q^2). \end{aligned} \quad (15)$$

令(15)的偶数部分相等, 我们得到

$$\frac{f_4 f_{12}^2}{f_6^3} S(-q^2) S(-q^6) - q^4 \frac{f_4 f_{12}^2}{f_6^3} T(-q^2) T(-q^6) = \frac{f_8^7 f_{12}^5}{f_2^2 f_4 f_6^4 f_{24}^2} - 2q^2 \frac{f_4^5 f_{16}^2 f_{24}^2}{f_2^3 f_6^2 f_8^3 f_{12}}$$

化简得

$$\begin{aligned} S(-q^2) S(-q^6) - q^4 T(-q^2) T(-q^6) &= \left(\frac{f_8^7 f_{12}^5}{f_2 f_4 f_6 f_{16} f_{24}^2} - 2q^2 \frac{f_6 f_4 f_{16}^2 f_{24}^2}{f_2^3 f_8^3 f_{12}^2} \right) \left(\frac{f_6^3}{f_4 f_{12}^2} \right) \\ &= \frac{f_8^7 f_{12}^3}{f_2 f_4 f_6 f_{16} f_{24}^2} - 2q^2 \frac{f_4 f_6 f_{16}^2 f_{24}^2}{f_2^3 f_8^3 f_{12}^2}. \end{aligned} \quad (16)$$

对于(16), 用 $-q$ 代替 q^2 , 利用(10)得到

$$\begin{aligned} S(q) S(q^3) - q^2 T(q) T(q^3) &= \frac{f_4 f_6^3}{f_{-1} f_4^4 f_{-3} f_8^2 f_{12}^2} + 2q \frac{f_{-3} f_2^4 f_8^2 f_{12}^2}{f_{-1} f_4^3 f_6^3} \\ &= \frac{f_4 f_6^3}{f_4^4 f_8^2 f_{12}^2} \times \frac{f_1 f_4}{f_2^3} \times \frac{f_3 f_{12}}{f_6^3} + 2q \frac{f_{-3} f_2^4 f_8^2 f_{12}^2}{f_{-1} f_4^3 f_6^3} \times \frac{f_6^3}{f_3 f_{12}} \times \frac{f_1^3 f_4^3}{f_2^9} \\ &= \frac{f_1 f_3 f_4^8}{f_2^7 f_8^2 f_{12}} + 2q \frac{f_1^3 f_8^2 f_{12}}{f_2^5 f_3}. \end{aligned} \quad (17)$$

模关系 1 得证。

令(15)的奇数部分相等, 我们得到

$$q^3 \frac{f_4 f_{12}^2}{f_6^3} S(-q^2) T(-q^6) - q \frac{f_4 f_{12}^2}{f_6^3} S(-q^6) T(-q^2) = q \frac{f_4 f_8^3 f_{24}^2}{f_2^3 f_6^2 f_{12} f_{16}^2} - 2q \frac{f_8 f_{12}^5 f_{16}^2}{f_2 f_4 f_6^4 f_{24}^2}$$

化简得

$$\begin{aligned}
 q^2 S(-q^2) T(-q^6) - S(-q^6) T(-q^2) &= \left(\frac{f_4^3 f_8^3 f_{24}^2}{f_2^3 f_6^2 f_{12} f_{16}^2} - 2 \frac{f_8 f_{12}^5 f_{16}^2}{f_2 f_4 f_6^4 f_{24}^2} \right) \left(\frac{f_6^3}{f_4 f_{12}^2} \right) \\
 &= \frac{f_4^2 f_6 f_8^3 f_{24}^2}{f_2^3 f_{12}^3 f_{16}^2} - 2 \frac{f_8 f_{12}^3 f_{16}^2}{f_2 f_4^2 f_6 f_{24}^2}.
 \end{aligned} \tag{18}$$

对于(18), 用 $-q$ 代替 q^2 , 利用(10)得到

$$\begin{aligned}
 S(q^3) T(q) + q S(q^q) T(q^3) &= 2 \frac{f_4 f_6^3 f_8^2}{f_{-1} f_2^2 f_{-3} f_{16}^2} - \frac{f_2^2 f_{-3} f_4^3 f_{12}^2}{f_{-1}^3 f_6^3 f_8^2} \\
 &= 2 \frac{f_4 f_6^3 f_8^2}{f_2^2 f_{16}^2} \times \frac{f_1 f_4}{f_2^3} \times \frac{f_3 f_{12}}{f_6^3} - \frac{f_2^2 f_{-3} f_4^3 f_{12}^2}{f_{-1}^3 f_6^3 f_8^2} \times \frac{f_6^3}{f_3 f_{12}} \times \frac{f_1^3 f_4^3}{f_2^9} \\
 &= 2 \frac{f_1 f_3 f_4^2 f_8^2}{f_2^5 f_{12}} - \frac{f_1^3 f_4^6 f_{12}}{f_2^7 f_3 f_8^2}.
 \end{aligned} \tag{19}$$

模关系 2 得证。

4. 结束语

本文探讨并建立了两个新的涉及 Göllnitz-Gordon 函数的新模关系。通过已知的连分数的 2-剖分, 通过奇偶分离的方法, 可以系统地构造一系列新的涉及 Göllnitz-Gordon 函数的模关系。涉及 Göllnitz-Gordon 函数的模关系是连接 q -级数、数论、模形式理论的关键环节, 其理论价值和重要性不仅体现在对经典模关系体系的拓展, 更在于为组合数学、数论等领域的问题解决提供了新的工具和视角。此外, 还有其他方法可以证明涉及 Göllnitz-Gordon 函数的模关系。例如 2011 年 Chadwick Gugg 通过另外的方法证明了两个新的涉及 Göllnitz-Gordon 函数的立方的模关系。今后可研究是否这两种方法可以共同证明相同的模关系, 是否可以得到新的模关系。

参考文献

- [1] Göllnitz, H. (1967) Partitionen mit Differenzenbedingungen. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, **225**, 154-190. <https://doi.org/10.1515/crll.1967.225.154>
- [2] Gordon, B. (1965) Some Continued Fractions of the Rogers-Ramanujan Type. *Duke Mathematical Journal*, **32**, 741-748. <https://doi.org/10.1215/S0012-7094-65-03278-3>
- [3] Gugg, C. (2012) Modular Equations for Cubes of the Rogers-Ramanujan and Ramanujan-Göllnitz-Gordon Functions and Their Associated Continued Fractions. *Journal of Number Theory*, **132**, 1519-1553. <https://doi.org/10.1016/j.jnt.2012.01.005>
- [4] Xia, E.X.W. and Yao, O.X.M. (2014) Parity Results for 9-Regular Partitions. *The Ramanujan Journal*, **34**, 109-117. <https://doi.org/10.1007/s11139-013-9493-z>
- [5] Baruah, N.D. and Ojah, K.K. (2012) Analogues of Ramanujan's Partition Identities and Congruences Arising from His Theta Functions and Modular Equations. *The Ramanujan Journal*, **28**, 385-407. <https://doi.org/10.1007/s11139-011-9296-z>
- [6] Xia, E.X.W. and Yao, O.X.M. (2012) Some Modular Relations for the Göllnitz-Gordon Functions by An Even-Odd Method. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **387**, 126-138. <https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.08.059>