Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(1), 12-16
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.161002

6A型顶点算子代数中一种平凡Miyamoto对合自同构

武文斌*，李俊华#

汉江师范学院数学与计算机科学学院，湖北 十堰

收稿日期：2025年12月1日；录用日期：2025年12月31日；发布日期：2026年1月8日

摘 要

本文针对6A型顶点算子代数中的Miyamoto对合自同构和自同构群的生成元做了研究。通过顶点算子代数中的一个Ising向量定义出的Miyamoto对合自同构，其在顶点算子代数与群论之间建立了重要联系。在顶点算子代数中，一般的Ising的对合自同构是非平凡的。在本文我们在6A型顶点算子代数中通过某个Ising向量构造出一种平凡的Miyamoto对合自同构，并且给出了6A型顶点算子代数的自同构群的所有生成元。

关键词

顶点算子代数，对合自同构，Ising向量

A Trivial Miyamoto Involution in 6A-Vertex Operator Algebra

Wenbin Wu*, Junhua Li#

Department of Mathematics and Computer Science, Hanjiang Normal University, Shiyan Hubei

Received: December 1, 2025; accepted: December 31, 2025; published: January 8, 2026

Abstract

This paper investigates the Miyamoto involution and the generators of the automorphism group of the 6A vertex operator algebra. The Miyamoto involutions defined by Ising vectors and establish an important connection between vertex operator algebras and group theory. In vertex operator algebras, general Ising involutions are nontrivial. In this paper, we construct a trivial Miyamoto involution in the 6A vertex operator algebra, and we present all generators of the automorphism group of

*第一作者。

#通讯作者。

文章引用：武文斌，李俊华. 6A 型顶点算子代数中一种平凡 Miyamoto 对合自同构[J]. 理论数学, 2026, 16(1): 12-16.
DOI: 10.12677/pm.2026.161002

the 6A vertex operator algebra.

Keywords

Vertex Operator Algebras, Involution, Ising Vectors

1. 引言

1986 年，Borcherds 根据 Frenkel 提出构造一类无限维李代数的想法，提出了顶点代数的概念。后来 1988 年 Frenkel、Lepowsky 及 Meurman 在构造 Monster 群的无限维分次表示(月光模)时，引入了顶点算子代数的概念。从此顶点算子代数成为代数学的一个分支被人们所研究，其在数学中的几何朗兰兹纲领及物理中的二维共形场论、弦论等方面发挥了重要作用。

在顶点算子代数中，Ising 向量是权为 2 且中心载荷为二分之一的共形向量，且每一个 Ising 向量生成的 Virasoro 顶点算子代数同构于 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$。Miyamoto 利用中心载荷为二分之一的 Virasoro 代数的不可约表示，对 Ising 向量 e 构造出一种自同构，我们称其为 Miyamoto 对合自同构，记作 τ_e。这对研究顶点算子代数的自同构群和构造月光模提供了一种新思路。根据 Virasoro 顶点算子代数 $L(c_m,0)$ 的融合律与 τ_e 的定义方式我们知道 τ_e 的阶数最大为 2，在遇到的已经构造出的 Miyamoto 对合自同构都是非平凡的，很自然我们会去研究是否存在一个 Ising 向量其定义的 Miyamoto 对合自同构是平凡的。我们在 6A 型顶点算子代数的 Ising 向量中找到了其对应的平凡 Miyamoto 对合自同构。

以上面结果为契机，我们又对 6A 型顶点算子代数的自同构群的生成元做了研究。在[1]中知 3A 型顶点算子代数的自同构群可以由两个 Ising 向量的 Miyamoto 对合自同构生成，且其自同构群同构于 S_3。由[2]知 6A 型顶点算子代数的自同构群同构于 D_{12} (12 阶的二面体群)，但是仅仅通过 Miyamoto 对合自同构无法生成整个自同构群，为此我们在 6A 型顶点算子代数中我们定义了一个自同构，与某两个 Miyamoto 对合自同构一起构成了整个 6A 型顶点算子代数自同构群的生成元集。

2. 相关定义及结论

定义 2.1 顶点算子代数是一个四元组 $(V,Y,1,\omega)$，这里 $(V,Y,1)$ 是域 $\mathbb{F}$ 上的顶点代数，且 $V=\oplus_{n\in\mathbb{Z}}V_n$ 是到它的子空间的直和分解，使得 $\dim V_n<\infty,\forall n\in\mathbb{Z};\ V_n\le 0,n\ll 0$。元素 $\omega\in V_2$ 是一个特定的向量，称为 V 的 Virasoro 向量或共形向量，它对应的顶点算子通常表示为两种不同的形式：

$$Y(\omega,z)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}L(n)z^{-n-2}=\sum_{n\in\mathbb{Z}}\omega(n)z^{-n-1}$$

并且它的系数满足下列三个条件：

(1) $L(-1)=D:L(-1)u=D(u)=u_{(-2)}1,\forall u\in V$；

(2) $L(0)|_{V_n}=nId_{V_n}:L(0)u=nu,\forall u\in V_n$；

(3) $[L(m),L(n)]=(m-n)L(m+n)+\frac{m^3-m}{12}\delta_{m+n}cId_V$。

上述等式中的 $c\in\mathbb{F}$ 是常量，称为顶点算子代数 V 的中心载荷，且算子 $L(0)$ 是可对角化的(注：

$L(n)=\omega_{(n+1)}, 1\in V_0$)。

定义 2.2 我们称向量 $e\in V_2$ 是中心载荷为 c_e 的共形向量，如果它满足 $e_1e=2e, e_3e=\frac{c_e}{2}1$。此时算子 $L_n^e:=e_{n+1}, n\in\mathbb{Z}$，并满足 Virasoro 换位关系式：

$$\left[L_m^e, L_n^e\right]=(m-n)L_{m+n}^e+\delta_{m+n,0}\frac{m^3-m}{12}c_e,$$

其中 m 和 n 是整数。如果共形向量 e 的中心载荷为 $\frac{1}{2}$，并且它生成 Virasoro 型顶点算子代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$，那么我们就称 e 是 Ising 向量。

对于 6A 型顶点算子代数 V 的一个 Ising 向量 e，由其生成的顶点算子子代数同构于 Virasoro 顶点算子代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$，由[3]知 Virasoro 顶点算子代数 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 是有理的并且有三个不可约模 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$，$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，$L\left(\frac{1}{2},\frac{1}{16}\right)$。因此 V 作为 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 的模有如下分解：

$$V=V_e(0)\oplus V_e\left(\frac{1}{2}\right)\oplus V_e\left(\frac{1}{16}\right),$$

这里的 $V_e(h)$，$h=0,\frac{1}{2},\frac{1}{16}$ 是同构于 $L\left(\frac{1}{2},h\right)$ 的一些子模的直和。

在[4]中定义了关于 Ising 向量 e 的 Miyamoto 对合自同构，定义方式如下：

$$\tau_e(v)=\begin{cases} v & v\in V_e(0)\oplus V_e\left(\frac{1}{2}\right) \\ -v & v\in V_e\left(\frac{1}{16}\right)\end{cases}。$$

根据 $L\left(\frac{1}{2},0\right)$ 的融合律 τ_e 就是 V 上的阶至多为 2 的 Miyamoto 对合自同构。

注记 2.3 对 $u,v\in V_2$，我们定义 V_2 中的元素乘积：$uv:=u_1v\in V_2$。利用顶点算子代数中的(n)运算，容易看出定义的乘法满足交换律，不满足结合律(顶点算子代数中的(n)运算不满足结合律)。此时 V_2 成为一个交换非结合高斯代数。对任意的 $u,v\in V_2$，我们定义 $\alpha(u,v):=uv-\frac{u+v}{16}$。并且对于 V_2 中的任意 Ising 向量 e，直接有 $\alpha(u,v)=\alpha(v,u)$，$\alpha(e,v)=\tau_e(\alpha(e,v))$。

引理 2.4 [5] 设 e 是 6A 型顶点算子代数 V 的一个 Ising 向量，且 V_2 有如下分解

$$V_2=\mathbb{R}e\oplus E^e(0)\oplus E^e\left(\frac{1}{2}\right)\oplus E^e\left(\frac{1}{16}\right)。$$

这里的 $E^e(h)$ 表示 $e_{(1)}$ 的特征值为 h 的特征子空间。

引理 2.5 [4] 对于由两个 Ising 向量 e,f 生成的 6A 型顶点算子代数，其高斯代数 V_2 可以由集合

$$S:=\left\{e,\tau_f(e),\tau_f\tau_e(e),f,\tau_e(f),\tau_e\tau_f(f),\alpha(e,f),\alpha(e,\tau_f(e))\right\}$$

中的元素张成，S 中的元素在实数域上线性无关，因此可以作为 V_2 的一组基。

3. 平凡 Miyamoto 对合自同构

在 V_2 中有 7 个 Ising 向量，分别为 $e,\tau_f(e),\tau_f\tau_e(e),f,\tau_e(f),\tau_e\tau_f(f)$ 以及 ω。为了计算 τ_ω 在 S 这组基下的具体形式，我们需要将 ω 表示成 S 这组基的线性组合。由[6]知 ω 在 S 这组基下的表达式为

$\frac{1}{3}\left(e+\tau_f\left(e\right)+\tau_f\tau_e\left(e\right)\right)+\left(f+\tau_e\left(f\right)+\tau_e\tau_f\left(f\right)\right)+32\alpha\left(e,f\right)+\frac{32}{3}\alpha\left(e,\tau_f\left(e\right)\right)$。为证明 ω 所定义的 Miyamoto 对合自同构 τ_ω 是平凡的我们只需要证明 τ_ω 在 V_2 上的作用是平凡的即可。

定理 3.1 上述 ω 所定义的 Miyamoto 对合自同构 τ_ω 在 6A 型顶点算子代数上的作用是平凡的。

证明 由引理 2.4 知 6A 型顶点算子代数的 V_2 有如下分解

$$V_2=\mathbb{R}\omega\oplus E^{\omega}\left(0\right)\oplus E^{\omega}\left(\frac{1}{2}\right)\oplus E^{\omega}\left(\frac{1}{16}\right)。$$

根据 τ_ω 的定义方式，只需要说明 $\omega_{(1)}$ 没有特征值为 $\frac{1}{16}$ 的特征子空间，也就是上述 $E^{\omega}\left(\frac{1}{16}\right)$ 须为 0。把 $\omega_{(1)}$ 看作 V_2 上的线性变换，利用[6]与[7]中的引理 3.5 的乘积关系式计算出 $\omega_{(1)}$ 在这组基下的线性变换矩阵，由于上述 ω 写成了 S 这组基的线性表达式，此时需要计算 S 中每一个基之间的乘积(即 V 中的(1)运算)，然后再乘以相应系数即可，这里我们给出计算的几个结果：$ee=2e$，$ef=\alpha\left(e,f\right)+\frac{1}{16}\left(e+f\right)$，$e\cdot\alpha\left(f,f^{\tau_e}\right)=-\frac{1}{48}\left(f+f^{\tau_e}\right)-\frac{7}{3\cdot2^8}f^{\tau_e\tau_f}-\frac{13}{2^8}e+\frac{7}{2^9}\left(e^{\tau_f}+e^{\tau_f\tau_e}\right)-\frac{3}{8}\alpha\left(e,f\right)+\frac{7}{48}\alpha\left(f,\tau_e\left(f\right)\right)$ 等，最后计算出 $\omega_{(1)}$ 在这组基下的线性变换矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{192} & \frac{1}{32}\\
\frac{1}{12} & \frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{192} & \frac{1}{32}\\
\frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{192} & \frac{1}{32}\\
\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32}\\
\frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32}\\
0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{64} & \frac{1}{32}\\
8 & 8 & 8 & 8 & 8 & 8 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2}\\
\frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2}
\end{pmatrix}。$$

通过计算得到 $\mathrm{Rank}\left(A\right)=4$，$\mathrm{Rank}\left(A-2I\right)=7$，$\mathrm{Rank}\left(A-\frac{1}{2}I\right)=5$，$\mathrm{Rank}\left(A-\frac{1}{16}I\right)=8$，这里的 I 是 8 阶单位矩阵。因此 $\frac{1}{16}$ 不是 $\omega_{(1)}$ 的一个特征值，故 $E^{\omega}\left(\frac{1}{16}\right)=0$。因此我们在 6A 型顶点算子代数中找到了一个 Ising 向量 ω，它定义的 Miyamoto 对合自同构在 6A 型顶点算子代数上是平凡的。

4. 6A 型顶点算子代数的自同构群

对于 6A 型顶点算子代数 V 的任意一个 Ising 向量，其定义的 Miyamoto 对合自同构自然都在 $\mathrm{Aut}\left(V\right)$ 中，但是由[2] [4]知 V 上的所有的 Miyamoto 对合自同构无法生成 $\mathrm{Aut}\left(V\right)$。我们通过在 V_2 的基上定义了一个映射来确定了 V 的另一个自同构，至此把 $\mathrm{Aut}\left(V\right)$ 的生成元完全确定出来。

定理 4.1 对于由两个 Ising 向量 e，f 生成的 6A 型顶点算子代数 V，其自同构群 $\mathrm{Aut}\left(V\right)$ 可以由 τ_e，

τ_f 和 σ 生成，其中 σ (将 V 的两个生成元互换)的在 S 上的定义如下

$$e \to f, \tau_f(e) \to \tau_e(f), \tau_f\tau_e(e) \to \tau_e\tau_f(f), \alpha(e,f) \to \alpha(e,f),$$

$$f \to e, \tau_e(f) \to \tau_f(e), \tau_e\tau_f(f) \to \tau_f\tau_e(e), \alpha(e,\tau_f(e)) \to \alpha(f,\tau_e(f))。$$

证明 由于 6A 型顶点算子代数 V 中两个 Ising 向量 e， f 生成，所以上述映射 σ 定义在 V 中任意一个元素下的像实际上只需要将此元素表达式中的 e 与 f 的位置互换。例如取 V 中的元素 $e_{(n)}f$，定义 $\sigma(e_{(n)}f) = f_{(n)}e$，由于 $\sigma(e) = f, \sigma(f) = e$，此时 $\sigma(e_{(n)}f) = \sigma(e)_{(n)}\sigma(f)$，根据 e 与 f 的地位的对等性知 σ 是 V 上的一个自同构且 $|\sigma| = 2$。并且无法由所有 Miyamoto 对合自同构生成。由[4]知 $|\tau_e\tau_f| = 3$，所以 $\langle\tau_e,\tau_f\rangle = \left\{I, \tau_e, \tau_f, \tau_e\tau_f, \tau_e\tau_f\tau_e, (\tau_e\tau_f)^2\right\}$ 同构于 6 阶二面体群(其中 I 为恒等映射)，下面说明 $\sigma \notin \langle\tau_e,\tau_f\rangle$ 只需要说明 σ 不等于其中任意一个元素即可。

由于 $e, \tau_f(e), \tau_f\tau_e(e), f, \tau_e(f), \tau_e\tau_f(f)$ 是互不相同的 Ising 向量，由 $I(e) = e \neq f$ 知 $\sigma \neq I$；由 $\tau_e(f) \neq e$ 知 $\sigma \neq \tau_e$；由 $\tau_f(e) \neq f$ 知 $\sigma \neq \tau_f$；由 $\tau_e\tau_f(f) \neq e$ 知 $\sigma \neq \tau_e\tau_f$；由 $\tau_f\tau_e(e) \neq \tau_e(f)$ 知 $\tau_e\tau_f\tau_e(e) \neq f$，故 $\sigma \neq \tau_e\tau_f\tau_e$；由 $\tau_f\tau_e(e) \neq \tau_e\tau_f(f)$ 知 $(\tau_e\tau_f)^2(f) \neq e$，故 $\sigma \neq (\tau_e\tau_f)^2$。由[2]知 $\mathrm{Aut}(V) \cong D_{12}$，而 $\langle\tau_e,\tau_f,\sigma\rangle \cong D_{12}$，所以 $\langle\tau_e,\tau_f,\sigma\rangle$ 就是整个自同构群 $\mathrm{Aut}(V)$。τ_e, τ_f, σ 就是自同构群的三个生成元。

5. 结论

本文通过 6A 型顶点算子代数的一个 Ising 向量定义出来了一种平凡 Miyamoto 对合自同构，弥补了“非平凡对合”之外的理论空白，在一定程度上有利于顶点算子代数的结构刻画与唯一性判定，但是在其他类型的顶点算子代数中是否存在这种特殊 Ising 向量还需要继续研究。另一方面本文具体给出了 6A 型顶点算子代数的自同构群生成元，为后续计算不动点子代数奠定了基础。

基金项目

2024 年度汉江师范学院校级科研项目(项目编号：2024B30)。

参考文献

[1] Sakuma, S. and Yamauchi, H. (2003) Vertex Operator Algebra with Two Miyamoto Involutions Generating S3. *Journal of Algebra*, **267**, 272-297. https://doi.org/10.1016/s0021-8693(03)00170-4

[2] Hung, L.C., Hiromichi, Y. and Hiroshi, Y. (2005) Mckay's Observation and Vertex Operator Algebras Generated by Two Conformal Vectors of Central Charge 1/2. *International Mathematics Research Papers*, **3**, 117-181.

[3] Wang, W.Q. (1993) Rationality of Virasoro Vertex Operator Algebras. *International Mathematics Research Notices*, **7**, 197-211.

[4] Sakuma, S. (2007) 6-Transposition Property of τ-Involutions of Vertex Operator Algebras. *International Mathematics Research Notices*, **9**, rnm030.

[5] Miyamoto, M. (1996) Griess Algebras and Conformal Vectors in Vertex Operator Algebras. *Journal of Algebra*, **179**, 523-548. https://doi.org/10.1006/jabr.1996.0023

[6] 武文斌. 6A 型顶点算子代数中的 Ising 向量[J]. 理论数学, 2022, 12(10): 8.

[7] Jiao, X. and Zheng, W. (2022) Vertex Operator Algebras Generated by Two Ising Vectors. *Journal of Algebra*, **610**, 546-570. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2022.07.034