**Pure Mathematics** 理论数学, 2026, 16(1), 1-11
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.161001

Hans汉斯

# 复值$b$-距离空间的两类非线性压缩不动点定理

**杨宇轩[*]，贺　飞**

内蒙古大学数学科学学院，内蒙古　呼和浩特

收稿日期：2025年12月2日；录用日期：2025年12月31日；发布日期：2026年1月8日

## 摘　要

复值$b$-距离空间是比复值距离空间和$b$-距离空间更一般的空间。本文在复值$b$-距离空间建立$\varphi$-压缩不动点定理和Geraghty压缩不动点定理。这两类非线性压缩不动点定理是$b$-距离空间相应结果的推广，同时也为研究复值距离空间和非线性问题提供了新的工具。

## 关键词

复值$b$-距离空间，$\varphi$-压缩，Geraghty压缩，不动点定理

# Two Nonlinear Fixed Point Theorems on Complex-Valued $b$-Metric Spaces

**Yuxuan Yang[*], Fei He**

School of Mathematical Sciences, Inner Mongolia University, Hohhot Inner Mongolia

Received: December 2, 2025; accepted: December 31, 2025; published: January 8, 2026

## Abstract

**Complex-valued $b$-metric spaces are more general spaces than both complex-valued metric spaces and $b$-metric spaces. The $\varphi$-contractive fixed point theorems and the Geraghty contractive fixed point theorems are established in complex-valued $b$-metric spaces. These two types of nonlinear contraction fixed point theorems are generalizations of the corresponding results in $b$-metric spaces, and they also provide new tools for studying complex-valued metric spaces and nonlinear problems.**

## Keywords

**Complex-Valued $b$-Metric Space, $\varphi$-Contractive, Geraghty Contractive, Fixed Point Theorem**

[*]通讯作者。

文章引用：杨宇轩，贺飞．复值 $b$-距离空间的两类非线性压缩不动点定理[J]．理论数学, 2026, 16(1): 1-11.
DOI: 10.12677/pm.2026.161001

## 1. 引言

距离型空间的相关概念最初由 Bakhtin [1]提出，随后在 1993 年，Czerwik [2]将这类空间正式命名为 $b$-距离空间。作为经典距离空间的一种推广，$b$-距离空间构建了更为一般的空间框架。2011 年，Azam 等人[3]。

通过对距离空间的推广研究，引入了复值距离空间的概念。2013 年，Rao 等人[4]进一步开展研究，提出了复值 $b$-距离空间。相较于复值距离空间与 $b$-距离空间，复值 $b$-距离空间具备更强的一般性，例如见[5] [6]。

1969 年，Boyd 和 Wong [7]首次提出$\varphi$-压缩的经典定义。1975 年，Matkowski [8]对$\varphi$-压缩的比较函数的条件进行了弱化与推广，同时证明在完备距离空间中$\varphi$-压缩映射仍存在唯一不动点。这一推广进一步扩大了$\varphi$-压缩的应用范围，成为后续非线性压缩理论研究的重要基础。2018 年，shahi 等人[9]将$\alpha$-$\varphi$压缩映射推广到复值距离空间中并给出了复值距离空间$\alpha$-$\varphi$压缩映射不动点定理。2021 年，Berinde [10]提出了增强型压缩以及增强型$\varphi$压缩的概念，将其推广到了凸距离空间中，并给出了凸距离空间下的增强型压缩以及增强型$\varphi$压缩不动点定理。2023 年，Rossafi 和 Kari 等人[11]将$\theta$-$\varphi$压缩条件的定义推广到了 $b$-距离空间，并给出了 $b$-距离空间下的$\theta$-$\varphi$压缩不动点定理。2025 年，Qawaqneh [12]通过引入模拟函数等新的辅助工具，在 $b$-距离空间中建立了更精细的 Istratescu 型广义压缩条件，进一步弱化了$\varphi$-压缩的限制。

1973 年，Geraghty [13]首次提出 Geraghty 压缩的定义，同时证明了在完备距离空间中 Geraghty 压缩映射存在唯一不动点。该结果将 Banach 压缩映射定理中的压缩系数由常数形式弱化为特定函数形式，实现对经典不动点定理的推广。之后，许多学者考虑了关于此类非线性压缩映射不动点定理的推广形式。2016 年，Arshad 等人[14]给出距离空间下的 $a$-Geraghty 型压缩不动点定理。2019 年，Aydi 等人[15]将$\alpha$-$\beta_E$-Geraghty 压缩映射推广到 $b$-距离空间中，并给出 $b$-距离空间$\alpha$-$\beta_E$-Geraghty 压缩映射不动点定理。2020 年，Afshari 等人[16]将广义$\alpha$-$\varphi$-Geraghty 压缩映射推广到 $b$-距离空间中，并给出 $b$-距离空间广义$\alpha$-$\varphi$-Geraghty 压缩映射不动点定理。2023 年，Choudhury 和 Chakraborty 等人[17]通过 $w$-距离给出距离空间下的多值 Kannan-Geraghty 型压缩不动点定理。

复值 $b$-距离空间上的不动点理论为解决特定类型的数学模型提供了有力的工具。以下我们以 Urysohn 型积分方程为例。

令空间 $X=C([0,1],\mathbb{C})$，距离 $d(u,u^*)=h(u,u^*)+ih(u,u^*)$，其中 $h(u,u^*)=\sup\limits_{t\in[0,1]}|u(t)-u^*(t)|$，则 $(X,d)$ 构成一个完备复值距离空间，当然也是一个完备复值 $b$-距离空间。

Urysohn 型积分方程 $u(t)=\int_0^1 K(t,s,u(s))\mathrm{d}s$ 的解的存在唯一性等价于以下映射不动点的存在唯一性，定义 $T:X\to X$ 为

$$(Tu)(t)=\int_0^1 K(t,s,u(s))\mathrm{d}s,$$

其中积分核 $K:[0,1]\times[0,1]\times\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是一个连续的复值核函数。

## 2. 预备知识

首先给出一些符号的表述：$\mathbb{N}$ 表示所有自然数的集合，$\mathbb{N}^*$ 表示所有正整数的集合，$\mathbb{R}$ 表示所有实数

的集合，$\mathbb{C}$ 表示所有复数的集合，$\mathbb{R}^+$ 表示所有正实数的集合，$i\mathbb{R}^+$ 表示实部为零且虚部为正实数的集合，$\mathbb{C}^+$ 表示实部和虚部均为正实数的集合，$\mathbb{C}^* = \mathbb{C}^+ \cup \mathbb{R}^+ \cup i\mathbb{R}^+$。

下面先回顾一些基本概念。

定义 2.1. [4] 设 $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. 定义 $z_1 \preceq z_2$ 为 $\mathrm{Re}(z_1) \le \mathrm{Re}(z_2)$ 且 $\mathrm{Im}(z_1) \le \mathrm{Im}(z_2)$，定义 $z_1 \prec z_2$ 为 $\mathrm{Re}(z_1) < \mathrm{Re}(z_2)$ 且 $\mathrm{Im}(z_1) < \mathrm{Im}(z_2)$，其中 Re 表示复数的实部，Im 表示复数的虚部。

引理 2.1. 设数列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$，$z_n \in \mathbb{C}$，满足以下条件：

(i) 对任意 $n \in \mathbb{N}$，均有 $z_{n+1} \preceq z_n$；

(ii) 存在 $\alpha \in \mathbb{C}$，对任意 $n \in \mathbb{N}$，均有 $\alpha \preceq z_n$，

则存在 $z_0 \in \mathbb{C}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$。

证明：令 $z_n = \mathrm{Re}(z_n) + \mathrm{Im}(z_n)i$，$\alpha = \mathrm{Re}(\alpha) + \mathrm{Im}(\alpha)i$。由 $z_{n+1} \preceq z_n$ 可得，$\mathrm{Re}(z_{n+1}) \le \mathrm{Re}(z_n)$ 且 $\mathrm{Im}(z_{n+1}) \le \mathrm{Im}(z_n)$。由 $\mathrm{Re}(z_{n+1}) \le \mathrm{Re}(z_n)$ 可得，$\mathrm{Re}(z_n)$ 单调递减。由(ii)可得，$\mathrm{Re}(\alpha)$ 为 $\mathrm{Re}(z_n)$ 的下界。由实数的单调有界定理可得，存在 $a_0 \in \mathbb{R}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}(z_n) = a_0$。同理可得存在 $b_0 \in \mathbb{R}$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Im}(z_n) = b_0$。记 $z_0 = a_0 + b_0 i$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = a_0 + b_0 i = z_0$。

引理 2.2. 若 $u, v, w \in \mathbb{C}$，$u \preceq v \preceq w$ 且 $v \ne w$，则 $u \ne w$。

证明：设 $u = a + bi,\ v = c + di,\ w = e + fi$，其中 $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$，由 $u \preceq v \preceq w$ 可得，$a \le c \le e$，$b \le d \le f$。由 $v \ne w$ 可得 $c \ne e$ 或 $d \ne f$。因此 $c < e$ 或 $d < f$。当 $c < e$ 时，有 $a \le c < e$，故 $a \ne e$。当 $d \ne f$ 时，有 $b \le d < f$，故 $b \ne f$。因此，$u = a + bi \ne e + fi = w$。

定义 2.2. [4]设 $V$ 为非空集合，$s \ge 1$。若映射 $d: V \times V \to \mathbb{C}$ 满足对于任意的 $x, y, z \in V$，

(i) $0 \preceq d(x, y)$，$d(x, y) = 0$ 当且仅当 $x = y$；

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$；

(iii) $d(x, y) \preceq s\left[d(x, z) + d(z, y)\right]$，

则称 $(V, d)$ 是系数为 $s$ 的复值 $b$-距离空间。

注 1 当复值 $b$-距离的虚部均为 0 时，复值 $b$-距离空间就变成了 $b$-距离空间。因此，$b$-距离空间就是特殊的复值 $b$-距离空间。

注 2 当 $s = 1$ 时，复值 $b$-距离空间就是复值距离空间。因此，复值距离空间是特殊的复值 $b$-距离空间。

定义 2.3. [4]设 $(V, d, s)$ 是一个复值 $b$-距离空间 $(s \ge 1)$，$\{v_n\}$ 为 $V$ 中一序列，

(i) 对于任意 $c \in \mathbb{C}$，$0 \prec c$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $n > N$，有 $d(v_n, v) \prec c$，则称序列 $\{v_n\}$ 收敛于 $v$。记作 $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$。

(ii) 对于任意 $c \in \mathbb{C}$，$0 \prec c$，存在 $N \in \mathbb{N}$，使得对于任意 $n > N$ 和任意 $m \in \mathbb{N}^*$，有 $d(v_n, v_{n+m}) \prec c$，则称序列 $\{v_n\}$ 为 Cauchy 列。

(iii) 如果对于 $V$ 中每个 Cauchy 列都收敛，则称 $(V, d, s)$ 为完备复值 $b$-距离空间。

引理 2.3. 设 $(V, d, s)$ 是一个复值 $b$-距离空间 $(s \ge 1)$，$V$ 中点列 $\{x_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$，且 $\{x_n\}$ 不

是 Cauchy 列，则存在 $0 \prec \varepsilon_0$ 以及 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\{x_{n_k}\}$ 和 $\{x_{m_k}\}$，使得以下结果之一成立：

(i) $\mathrm{Re}(\varepsilon_0) \le \mathrm{Re}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right)$ 且 $\mathrm{Re}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k - 1}\right)\right) < \mathrm{Re}(\varepsilon_0)$；

(ii) $\mathrm{Im}(\varepsilon_0) \le \mathrm{Im}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right)$ 且 $\mathrm{Im}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k - 1}\right)\right) < \mathrm{Im}(\varepsilon_0)$。

证明：由于 $\{x_n\}$ 不是 Cauchy 列，故存在 $0 \prec \varepsilon_0$，使得对任意 $N \in \mathbb{N}$，存在 $n, m \in \mathbb{N}$ 且 $m > n > N$ 使得 $\mathrm{Re}(\varepsilon_0) \le \mathrm{Re}(d(x_n, x_m))$ 或 $\mathrm{Im}(\varepsilon_0) \le \mathrm{Im}(d(x_n, x_m))$。由 $\lim\limits_{n\to\infty} d(x_n, x_{n+1}) = 0$ 可知，存在 $n_0 > 0$ 使得对于任意

$n \ge n_0$ 时，有

$$d\left(x_n, x_{n+1}\right) \prec \varepsilon_0 \tag{1}$$

分以下两种情形证明。

情形 1，存在无限多整数对 $(n,m)$ 满足 $m > n > N$ 且 $\operatorname{Re}(\varepsilon_0) \le \operatorname{Re}\left(d\left(x_n, x_m\right)\right)$。下面证明在这种情形下，存在 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 和 $\left\{x_{m_k}\right\}$ 满足对于所有 $k > 1$，有

$$\operatorname{Re}(\varepsilon_0) \le \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right) \text{ 且 } \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k-1}\right)\right) < \operatorname{Re}(\varepsilon_0)\text{。}$$

令 $N = n_0$。由存在无限多整数对 $(n,m)$ 满足 $\operatorname{Re}(\varepsilon_0) \le \operatorname{Re}\left(d\left(x_n, x_m\right)\right)$ 可得，存在 $m_1^*, n_1 \in \mathbb{N}$ 且 $m_1^* > n_1 > n_0$ 使得 $\operatorname{Re}(\varepsilon_0) \le \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_1}, x_{m_1^*}\right)\right)$。由(1)可得，在集合 $\left\{n_1+1, n_1+2, n_1+3, \cdots, m_1^*\right\}$ 中，可以找到最小下标 $m_1$ 满足 $m_1 \ge n_1 + 2$ 并且

$$\operatorname{Re}(\varepsilon_0) \le \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_1}, x_{m_1}\right)\right) \text{ 以及 } \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_1}, x_{m_1-1}\right)\right) < \operatorname{Re}(\varepsilon_0)\text{。}$$

令 $N = m_1$。由存在无限多整数对 $(n,m)$ 满足 $\operatorname{Re}(\varepsilon_0) \le \operatorname{Re}\left(d\left(x_n, x_m\right)\right)$ 可得，存在 $m_2^*, n_2 \in \mathbb{N}$ 且 $m_2^* > n_2 > m_1$ 使得 $\operatorname{Re}(\varepsilon_0) \le \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_2}, x_{m_2^*}\right)\right)$。由(1)可得，在集合 $\left\{n_2+1, n_2+2, n_2+3, \cdots, m_2^*\right\}$ 中，可以找到最小下标 $m_2$ 满足 $m_2 \ge n_2 + 2$ 并且

$$\operatorname{Re}(\varepsilon_0) \le \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_2}, x_{m_2}\right)\right) \text{ 以及 } \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_2}, x_{m_2-1}\right)\right) < \operatorname{Re}(\varepsilon_0)\text{。}$$

继续上述过程，归纳可以构造出 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 和 $\left\{x_{m_k}\right\}$，使得满足对于所有 $k > 1$，有

$$\operatorname{Re}(\varepsilon_0) \le \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right) \text{ 且 } \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k-1}\right)\right) < \operatorname{Re}(\varepsilon_0)\text{。}$$

情形 2，存在无限多整数对 $(n,m)$ 满足 $m > n > N$ 且 $\operatorname{Im}(\varepsilon_0) \le \operatorname{Im}\left(d\left(x_n, x_m\right)\right)$。类似于情形 1 的证明方法，可以构造出 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 和 $\left\{x_{m_k}\right\}$ 满足对于所有 $k > 1$，有

$$\operatorname{Im}(\varepsilon_0) \le \operatorname{Im}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right) \text{ 且 } \operatorname{Im}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k-1}\right)\right) < \operatorname{Im}(\varepsilon_0)\text{。}$$

综上所述，存在 $0 \prec \varepsilon_0$ 以及 $\{x_n\}$ 的两个子列 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 和 $\left\{x_{m_k}\right\}$，使得(i)和(ii)其中之一成立。

定义 2.4. 设函数 $\varphi: \mathbb{C}^* \cup \{0\} \to \mathbb{C}^* \cup \{0\}$ 且满足 $\varphi^{-1}(\{0\}) = \{0\}$ 及以下条件，

(i) 对任意 $t_1, t_2 \in \mathbb{C}^* \cup \{0\}$，当 $t_1 \preceq t_2$ 且 $t_1 \ne t_2$ 时，有 $\varphi(t_1) \preceq \varphi(t_2)$ 且 $\varphi(t_1) \ne \varphi(t_2)$；当 $t_1 \prec t_2$ 时，有 $\varphi(t_1) \prec \varphi(t_2)$；当 $t_1 = t_2$ 时，有 $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$；

(ii) 对于任意的 $0 \preceq x$，$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n(x) = 0$；

(iii) 对于任意的 $0 \preceq x$，$\varphi(x) \preceq x$，

则称 $\varphi$ 为复比较函数。

注 3 若函数 $\varphi$ 是复比较函数，则当 $x \ne 0$ 时，$\varphi(x) \ne x$。

证明：假设存在 $0 \preceq x_0$ 并且 $x_0 \ne 0$ 使得 $\varphi(x_0) = x_0$，故 $\varphi^n(x_0) = \varphi^{n-1}(x_0) = \cdots = \varphi(x_0) = x_0$。因此，$\lim\limits_{n\to\infty} \varphi^n(x_0) = x_0$，与定义 2。4。(iii)矛盾。

定义 2.5. 设函数 $\beta: \mathbb{C}^* \cup \{0\} \to [0,1)$ 且满足对于任意的数列 $\{t_n\}$，若 $\beta(t_n) \to 1$，有 $t_n \to 0$，则称这样的函数为复 $\beta$ 函数。记所有复 $\beta$ 函数构成的集合为 $\Theta$。

## 3. 主要结果

定理 3.1. 设 $(V,d,s)$ 是一个完备复值 $b$-距离空间 $(s \ge 1)$，映射 $T: V \to V$ 为一个自映射，且对任意的 $x, y \in V$，有

$$d\left(Tx,Ty\right)\preceq\varphi\left(d\left(x,y\right)\right) \tag{2}$$

其中 $\varphi$ 为复比较函数，则 $T$ 在 $V$ 中存在唯一不动点 $x^*$，且对任意 $x\in V$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}T^n\left(x\right)=x^*$。

证明：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi^n\left(1+i\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Re}\left(\varphi^n\left(1+i\right)\right)+i\,\mathrm{Im}\left(\varphi^n\left(1+i\right)\right)=0$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Re}\left(\varphi^n\left(1+i\right)\right)=0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{Im}\left(\varphi^n\left(1+i\right)\right)=0$，从而存在 $n_1,n_2\in\mathbb{N}$ 使得 $\mathrm{Re}\,\varphi^{n_1}\left(1+i\right)<\dfrac{1}{2s}$ 且 $\mathrm{Im}\,\varphi^{n_2}\left(1+i\right)<\dfrac{1}{2s}$。令 $n_0=\max\left(n_1,n_2\right)$，由定义 2。4。(iii)可得 $\varphi^{n_0}\left(1+i\right)\preceq\varphi^{n_1}\left(1+i\right)$ 并且 $\varphi^{n_0}\left(1+i\right)\preceq\varphi^{n_2}\left(1+i\right)$，则 $\mathrm{Re}\,\varphi^{n_0}\left(1+i\right)\le\mathrm{Re}\,\varphi^{n_1}\left(1+i\right)$ 并且 $\mathrm{Im}\,\varphi^{n_0}\left(1+i\right)\le\mathrm{Im}\,\varphi^{n_2}\left(1+i\right)$，从而 $\mathrm{Re}\,\varphi^{n_0}\left(1+i\right)<\dfrac{1}{2s}$ 且 $\mathrm{Im}\,\varphi^{n_0}\left(1+i\right)<\dfrac{1}{2s}$。由此可知

$$\varphi^{n_0}\left(1+i\right)\prec\frac{1+i}{2s} \tag{3}$$

令 $f=T^{n_0}$，对于任意 $m\in\mathbb{N}$，定义序列

$$x_m=fx_{m-1}=f^2x_{m-2}=\cdots=f^mx_0 \tag{4}$$

第一步，证明 $\lim\limits_{m\to\infty}d\left(x_m,x_{m+1}\right)=0$。

由(4)可得，

$$d\left(x_m,x_{m+1}\right)=d\left(fx_{m-1},f\left(fx_{m-1}\right)\right)=\cdots=d\left(f^mx_0,f^m\left(fx_0\right)\right)。$$

由 $f=T^{n_0}$ 可得，

$$d\left(f^mx_0,f^m\left(fx_0\right)\right)=d\left(T^{n_0m}x_0,T^{n_0m}\left(fx_0\right)\right)。$$

由(2)可得，

$$\begin{aligned}d\left(x_m,x_{m+1}\right)&=d\left(T^{n_0m}x_0,T^{n_0m}\left(fx_0\right)\right)\\&\preceq\varphi\left(d\left(T^{n_0m-1}x_0,T^{n_0m-1}\left(fx_0\right)\right)\right)\\&\preceq\cdots\\&\preceq\varphi^{n_0m}\left(d\left(x_0,fx_0\right)\right).\end{aligned}$$

由定义 2.4. (ii)可得 $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi^{n_0m}\left(d\left(x_0,fx_0\right)\right)=0$，故 $\lim\limits_{m\to\infty}d\left(x_m,x_{m+1}\right)=0$。

第二步，证明 $\left\{x_m\right\}$ 为 Cauchy 列。

由 $\lim\limits_{m\to\infty}d\left(x_m,x_{m+1}\right)=0$ 可得，对于任意 $c\in\mathbb{C}$，$0\prec c$，存在 $N\in\mathbb{N}$，对任意 $m>N$ 使得 $d\left(x_m,x_{m+1}\right)\preceq c$。现在任取 $m_0$ 满足 $m\ge m_0>N$，使得 $d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)\prec\dfrac{1+i}{2s}\prec1+i$。

下面利用数学归纳法证明对任意 $k\in\mathbb{N}$ 且 $k>1$ 时，$d\left(x_{m_0},x_{m_0+k}\right)\prec1+i$。

先证明 $d\left(x_{m_0},x_{m_0+2}\right)\prec1+i$。由(2)，(4)，$f=T^{n_0}$ 以及定义 2.4. (iii)可得

$$\begin{aligned}d\left(x_{m_0},x_{m_0+2}\right)&\preceq s\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)+d\left(x_{m_0+1},x_{m_0+2}\right)\right)\\&\preceq s\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)+d\left(fx_{m_0},fx_{m_0+1}\right)\right)\\&\preceq s\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)+d\left(T^{n_0}x_{m_0},T^{n_0}x_{m_0+1}\right)\right)\\&\preceq\cdots\\&\preceq s\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)+\varphi^{n_0}\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)\right)\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\preceq s\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)+\varphi^{n_0-1}\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)\right)\right)\\
&\preceq\cdots\\
&\preceq s\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)+d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)\right)\\
&\prec s\left(\frac{1+i}{2s}+\frac{1+i}{2s}\right)=1+i.
\end{aligned}
$$

假设 $d\left(x_{m_0},x_{m_0+k-1}\right)\prec 1+i$ 成立，下证 $d\left(x_{m_0},x_{m_0+k}\right)\prec 1+i$ 。由(2)，(3)，(4)以及 $f=T^{n_0}$ 可得

$$
\begin{aligned}
d\left(x_{m_0},x_{m_0+k}\right)&\preceq s\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)+d\left(x_{m_0+1},x_{m_0+k}\right)\right)\\
&\preceq s\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)+d\left(fx_{m_0},fx_{m_0+k-1}\right)\right)\\
&\preceq s\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)+\varphi^{n_0}\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+k-1}\right)\right)\right)\\
&\prec s\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+1}\right)+\varphi^{n_0}\left(1+i\right)\right)\\
&\prec s\left(\frac{1+i}{2s}+\frac{1+i}{2s}\right)=1+i.
\end{aligned}
$$

下证 $\{x_m\}$ 为 Cauchy 列。对任意的 $m\ge m_0$ ，当 $k\ge 1$ 时，由(2)，(4)， $f=T^{n_0}$ 以及 $d\left(x_{m_0},x_{m_0+k}\right)\prec 1+i$ 可得

$$
\begin{aligned}
d\left(x_m,x_{m+k}\right)&=d\left(f^{m-m_0}x_{m_0},f^{m-m_0}x_{m_0+k}\right)\\
&=d\left(T^{n_0(m-m_0)}x_{m_0},T^{n_0(m-m_0)}x_{m_0+k}\right)\\
&=\varphi\left(d\left(T^{n_0(m-m_0)-1}x_{m_0},T^{n_0(m-m_0)-1}x_{m_0+k}\right)\right)\\
&\preceq\cdots\\
&\preceq\varphi^{n_0(m-m_0)}\left(d\left(x_{m_0},x_{m_0+k}\right)\right)\\
&\circ\,\varphi^{n_0(m-m_0)}\left(1+i\right).
\end{aligned}
$$

由定义 2.4. (ii)可得 $\lim\limits_{m\to\infty}\varphi^{n_0(m-m_0)}\left(1+i\right)=0$ ， 故 $\lim\limits_{m\to\infty}d\left(x_m,x_{m+k}\right)=0$ 。因此 $\{x_m\}$ 为 Cauchy 列。

第三步，证明 $T$ 和 $f$ 有唯一的不动点。

由于 $(V,d,s)$ 完备，则存在 $x^*\in V$ 使得 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=x^*$ 。

下证 $x^*$ 为 $f$ 的不动点。由 $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=x^*$ 可得当 $m\to\infty$ 时， $d\left(x_m,x^*\right)\to 0$ 。由(2)，(4)， $f=T^{n_0}$ 以及定义 2.4. (iii)可得

$$
\begin{aligned}
d\left(x^*,fx^*\right)&=\lim_{m\to\infty}d\left(x_m,fx^*\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}d\left(x_{m+1},fx^*\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}d\left(fx_m,fx^*\right)\\
&=\lim_{m\to\infty}d\left(T^{n_0}x_m,T^{n_0}x^*\right)\\
&\preceq\lim_{m\to\infty}\varphi\left(d\left(T^{n_0-1}x_m,T^{n_0-1}x^*\right)\right)\\
&\preceq\cdots\\
&\preceq\lim_{m\to\infty}\varphi^{n_0}\left(d\left(x_m,x^*\right)\right)\\
&\preceq\cdots
\end{aligned}
$$

$$\preceq \lim_{m\to\infty} d\left(x_m, x^*\right).$$

由于 $\lim_{m\to\infty} d\left(x_m, x^*\right)=0$，故 $d\left(x^*, fx^*\right)=0$。即 $x^*$ 为 $f$ 的不动点。

下证 $x^*$ 是 $f$ 的唯一不动点。假设存在 $y^*\in V$ 使得 $fy^*=y^*$ 且 $x^*\neq y^*$，$0\preceq d\left(x^*, y^*\right)$ 但 $d\left(x^*, y^*\right)\neq 0$。由(2)，(4)，$f=T^{n_0}$ 以及定义 2.4. (iii)可得

$$\begin{aligned} d\left(x^*, y^*\right) &= d\left(fx^*, fy^*\right) \\ &= d\left(T^{n_0}x^*, T^{n_0}y^*\right) \\ &\preceq \varphi^{n_0}\left(d\left(x^*, y^*\right)\right) \\ &\preceq \cdots \\ &\preceq d\left(x^*, y^*\right). \end{aligned}$$

即 $d\left(x^*, y^*\right)\preceq \varphi^{n_0}\left(d\left(x^*, y^*\right)\right)\preceq d\left(x^*, y^*\right)$。

由注 3 可得 $\varphi^{n_0}\left(d\left(x^*, y^*\right)\right)\neq\cdots\neq\varphi\left(d\left(x^*, y^*\right)\right)\neq d\left(x^*, y^*\right)$，即 $\varphi^{n_0}\left(d\left(x^*, y^*\right)\right)\neq d\left(x^*, y^*\right)$。由引理 2.2.可得 $d\left(x^*, y^*\right)\neq d\left(x^*, y^*\right)$，矛盾。因此 $x^*=y^*$。即 $f$ 的不动点是唯一的。

下证 $x^*$ 为 $T$ 的不动点。由于

$$f\left(Tx^*\right)=T^{n_0+1}x^*=T\left(fx^*\right)=Tx^*,$$

故 $Tx^*$ 为 $f$ 的不动点。又由于 $x^*$ 为 $f$ 的唯一不动点，故 $Tx^*=x^*$，从而 $x^*$ 为 $T$ 的不动点。类似 $f$ 的不动点唯一性的证明可证 $x^*$ 是 $T$ 的唯一不动点。

最后，证明对任意 $x\in V$，有 $\lim_{n\to\infty} T^n\left(x\right)=x^*$。由 $x^*$ 是 $T$ 的唯一不动点可得 $T^n x^*=T^{n-1}x^*=\cdots=x^*$。由(2)可得

$$d\left(T^n x, x^*\right)=d\left(T^n x, T^n x^*\right)\preceq \varphi\left(d\left(T^{n-1}x, T^{n-1}x^*\right)\right)\cdots\preceq \varphi^n\left(d\left(x, x^*\right)\right),$$

由 $\lim_{n\to\infty}\varphi^n\left(d\left(x, x^*\right)\right)=0$ 可得 $\lim_{n\to\infty} d\left(T^n x, x^*\right)=0$，结论成立。

推论 3.1.设 $\left(V, d\right)$ 是一个完备复值距离空间，映射 $T:V\to V$ 为一个自映射，且对任意的 $x, y\in V$，有

$$d\left(Tx, Ty\right)\preceq \varphi\left(d\left(x, y\right)\right),$$

其中 $\varphi$ 为复比较函数，则 $T$ 在 $V$ 中存在唯一不动点 $x^*$，且对任意 $x\in V$，有 $\lim_{n\to\infty} T^n\left(x\right)=x^*$。

证明：由于复值距离空间是复值 $b$-距离空间的特殊情形，故由定理 3.1.直接可得结论成立。

推论 3.2.设 $\left(V, d, s\right)$ 是一个完备 $b$-距离空间 $\left(s\geq 1\right)$，映射 $T:V\to V$ 为一个自映射，且对任意的 $x, y\in V$，有

$$d\left(Tx, Ty\right)\leq \varphi\left(d\left(x, y\right)\right),$$

其中 $\varphi$ 为实比较函数，则 $T$ 在 $V$ 中存在唯一不动点 $x^*$，且对任意 $x\in V$，有 $\lim_{n\to\infty} T^n\left(x\right)=x^*$。

证明：由于 $b$-距离空间是复值 $b$-距离空间的特殊情形，$\leq$ 为 $\preceq$ 的特殊情形，实比较函数是复比较函数的特殊情形，故由定理 3.1.直接可得结论成立。

定理 3.2.设 $\left(V, d, s\right)$ 是完备复值 $b$-距离空间 $\left(s\geq 1\right)$，映射 $T:V\to V$ 为一个自映射。若存在 $\beta\in\Theta$ 使得对任意的 $x, y\in V$ 且 $x\neq y$，有

$$d\left(Tx, Ty\right)\preceq \beta\left(d\left(x, y\right)\right)d\left(x, y\right) \tag{5}$$

则 $T$ 在 $V$ 中存在唯一不动点 $x^*$。

证明：给定 $x_0 \in V$，设 $x_n = Tx_{n-1} = T^n x_0$， $n = 1,2\cdots$，则有

$$0 \preceq d\left(x_n, x_{n+1}\right) \preceq \beta\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right) d\left(x_{n-1}, x_n\right) \prec d\left(x_{n-1}, x_n\right)。$$

因此，$\left\{d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right\}$ 为单调递减且有下界的数列。由引理 2。1。可得，存在 $0 \preceq L, L \in \mathbb{C}$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right) = L。$$

第一步，证明 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right) = L = 0$。

假设 $L \neq 0$。则 $\operatorname{Re} L > 0$ 或 $\operatorname{Im} L > 0$。分以下两种情形证明。

情形 1，当 $\operatorname{Re} L > 0$ 时。由(5)可得 $\operatorname{Re}\left(d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right) \leq \beta\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right) \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right)$，由于 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re}\left(d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right) = \operatorname{Re} L > 0$，当 $n$ 充分大时，有

$$\frac{\operatorname{Re}\left(d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right)}{\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right)} \leq \beta\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right) < 1,$$

由夹逼准则可得 $\lim_{n\to\infty} \beta\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right) = 1$。

情形 2，当 $\operatorname{Im} L > 0$ 时。由 (5) 可得 $\operatorname{Im}\left(d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right) \leq \beta\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right) \operatorname{Im}\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right)$，由于 $\lim_{n\to\infty} \operatorname{Im}\left(d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right) = \operatorname{Im} L > 0$，当 $n$ 充分大时，有

$$\frac{\operatorname{Im}\left(d\left(x_n, x_{n+1}\right)\right)}{\operatorname{Im}\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right)} \leq \beta\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right) < 1,$$

由夹逼准则可得 $\lim_{n\to\infty} \beta\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right) = 1$。

综上所述，$\lim_{n\to\infty} \beta\left(d\left(x_{n-1}, x_n\right)\right) = 1$，从而 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_{n-1}, x_n\right) = 0$，即 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right) = L = 0$。矛盾。因此 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right) = L = 0$。

第二步，证明 $\left\{x_n\right\}$ 为 Cauchy 列。首先利用数学归纳法证明 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+q}\right) = 0$， $q = 1,2,3,\cdots,r$。

先证明 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+2}\right) = 0$。由 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right) = 0$ 可得，

$$d\left(x_n, x_{n+2}\right) \preceq s\left(d\left(x_n, x_{n+1}\right) + d\left(x_{n+1}, x_{n+2}\right)\right) \to 0 \left(n \to \infty\right)。$$

假设 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+q-1}\right) = 0$ 成立，下证 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+q}\right) = 0$。由 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right) = 0$ 可得，

$$d\left(x_n, x_{n+q}\right) \preceq s\left(d\left(x_n, x_{n+q-1}\right) + d\left(x_{n+q-1}, x_{n+q}\right)\right) \to 0 \left(n \to \infty\right)。$$

然后假设 $\left\{x_n\right\}$ 不是 Cauchy 列。结合 $\lim_{n\to\infty} d\left(x_n, x_{n+1}\right) = 0$，由引理 2.3.可得，存在 $0 \prec \varepsilon_0$ 以及 $\left\{x_n\right\}$ 的两个子列 $\left\{x_{n_k}\right\}$ 和 $\left\{x_{m_k}\right\}$，使得以下结果之一成立：

(i) $\operatorname{Re}\left(\varepsilon_0\right) \leq \operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right)$ 且 $\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k-1}\right)\right) < \operatorname{Re}\left(\varepsilon_0\right)$；

(ii) $\operatorname{Im}\left(\varepsilon_0\right) \leq \operatorname{Im}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k}\right)\right)$ 且 $\operatorname{Im}\left(d\left(x_{n_k}, x_{m_k-1}\right)\right) < \operatorname{Im}\left(\varepsilon_0\right)$。

分以下两种情形证明。

情形 1，当(i)成立时，考虑集合

$$E = \left\{a \in \mathbb{C}^* \cup \{0\} \middle| \operatorname{Re}\left(\varepsilon_0\right) \leq \operatorname{Re}(a) \leq s \operatorname{Re}\left(\varepsilon_0\right) + 2s^2 \operatorname{Re}\left(\varepsilon_0\right)\right\}。$$

下证 $\sup\beta(E)<1$。

假设 $\sup\beta(E)=1$，则存在数列 $\{t_n\}\in E$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}\beta(t_n)=\sup\beta(E)=1$。由函数 $\beta$ 定义可得，

$$\lim_{n\to\infty}t_n=0,$$

与 $\{t_n\}\in E$ 矛盾。因此 $\sup\beta(E)<1$。故一定存在 $r\in\mathbb{N}$，使得

$$\left[\sup\beta(E)\right]^r\left(s\operatorname{Re}(\varepsilon_0)+2s^2\operatorname{Re}(\varepsilon_0)\right)<\operatorname{Re}(\varepsilon_0) \tag{6}$$

下证存在 $K\in\mathbb{N}$，当 $k>K$ 时，$\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-r},x_{m_k-r}\right)\right)<s\operatorname{Re}(\varepsilon_0)+2s^2\operatorname{Re}(\varepsilon_0)$。

由 $\lim\limits_{n\to\infty}d\left(x_n,x_{n+q}\right)=0$ 可知，存在 $K\in\mathbb{N}$，当 $k>K$，

$$\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-r},x_{n_k}\right)\right)<\operatorname{Re}(\varepsilon_0)\text{ 以及 }\operatorname{Re}\left(d\left(x_{m_k-1},x_{m_k-r}\right)\right)<\operatorname{Re}(\varepsilon_0)。$$

从而，

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-r},x_{m_k-r}\right)\right)&\le s\left[\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-r},x_{n_k}\right)\right)+\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k},x_{m_k-r}\right)\right)\right]\\&\le s\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-r},x_{n_k}\right)\right)+s^2\left[\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k},x_{m_k-1}\right)\right)+\operatorname{Re}\left(d\left(x_{m_k-1},x_{m_k-r}\right)\right)\right]\\&<s\operatorname{Re}(\varepsilon_0)+s^2\left(\operatorname{Re}(\varepsilon_0)+\operatorname{Re}(\varepsilon_0)\right)\\&=s\operatorname{Re}(\varepsilon_0)+2s^2\operatorname{Re}(\varepsilon_0),\end{aligned}$$

故

$$\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-r},x_{m_k-r}\right)\right)<s\operatorname{Re}(\varepsilon_0)+2s^2\operatorname{Re}(\varepsilon_0) \tag{7}$$

由(5)，(7)可得，对任意 $k>K$，

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}(\varepsilon_0)\le\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k},x_{m_k}\right)\right)&\le\beta\left(d\left(x_{n_k-1},x_{m_k-1}\right)\right)\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-1},x_{m_k-1}\right)\right)\\&\le\beta\left(d\left(x_{n_k-1},x_{m_k-1}\right)\right)\beta\left(d\left(x_{n_k-2},x_{m_k-2}\right)\right)\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-2},x_{m_k-2}\right)\right)\\&\le\cdots\\&\le\prod_{i=1}^{r}\beta\left(d\left(x_{n_k-i},x_{m_k-i}\right)\right)\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-r},x_{m_k-r}\right)\right)\\&<\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-r},x_{m_k-r}\right)\right)\\&<s\operatorname{Re}(\varepsilon_0)+2s^2\operatorname{Re}(\varepsilon_0).\end{aligned}$$

因此对任意 $k>K$，$d\left(x_{n_k},x_{m_k}\right)\in E$。由(5)，(6)可得，

$$\begin{aligned}\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k},x_{m_k}\right)\right)&\le\beta\left(d\left(x_{n_k-1},x_{m_k-1}\right)\right)\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-1},x_{m_k-1}\right)\right)\\&\le\beta\left(d\left(x_{n_k-1},x_{m_k-1}\right)\right)\beta\left(d\left(x_{n_k-2},x_{m_k-2}\right)\right)\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-2},x_{m_k-2}\right)\right)\\&\le\cdots\\&\le\prod_{i=1}^{r}\beta\left(d\left(x_{n_k-i},x_{m_k-i}\right)\right)\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-r},x_{m_k-r}\right)\right)\\&\le\left[\sup\beta(E)\right]^r\operatorname{Re}\left(d\left(x_{n_k-r},x_{m_k-r}\right)\right)\\&\le\left[\sup\beta(E)\right]^r\left(s\operatorname{Re}(\varepsilon_0)+2s^2\operatorname{Re}(\varepsilon_0)\right)\\&<\operatorname{Re}(\varepsilon_0),\end{aligned}$$

最终得到存在 $K\in\mathbb{N}$，当 $k>K$ 时，$\mathrm{Re}\left(d\left(x_{n_k},x_{m_k}\right)\right)<\mathrm{Re}\left(\varepsilon_0\right)$ 与 $\mathrm{Re}\left(\varepsilon_0\right)\le\mathrm{Re}\left(d\left(x_{n_k},x_{m_k}\right)\right)$ 矛盾。

情形 2，当(ii)成立时。类似于情形 1 做法可得 $\mathrm{Im}\left(d\left(x_{n_k},x_{m_k}\right)\right)<\mathrm{Im}\left(\varepsilon_0\right)$ 与 $\mathrm{Im}\left(\varepsilon_0\right)\le\mathrm{Im}\left(d\left(x_{n_k},x_{m_k}\right)\right)$ 矛盾。

综上所述，$\{x_n\}$ 为 Cauchy 列。

第三步，证明 $T$ 在 $V$ 中有唯一的不动点。

下证 $T$ 有不动点。由于 $(V,d,s)$ 完备可得，存在 $x^*\in V$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$。由(4)可得，

$$d\left(x_{n+1},Tx^*\right)=d\left(Tx_n,Tx^*\right)\preceq\beta\left(d\left(x_n,x^*\right)\right)d\left(x_n,x^*\right)。$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x^*$ 可得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=Tx^*$。因此 $x^*=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=Tx^*$，即 $x^*$ 为 $V$ 中不动点。

下证 $T$ 的不动点唯一。

假设存在 $y^*\in V$ 使得 $Ty^*=y^*$ 且 $x^*\ne y^*$，由于 $0\preceq d\left(x^*,y^*\right)$ 且 $d\left(x^*,y^*\right)\ne0$，故

$$d\left(x^*,y^*\right)=d\left(Tx^*,Ty^*\right)\preceq\beta\left(d\left(x^*,y^*\right)\right)d\left(x^*,y^*\right)\prec d\left(x^*,y^*\right),$$

矛盾。因此 $T$ 的不动点唯一。

综上所述，$T$ 在 $V$ 中有唯一的不动点。

推论 3.3. 设 $(V,d)$ 是一个完备复值距离空间，映射 $T{:}V\to V$ 为一个自映射，若存在 $\beta\in\Theta$ 使得对任意的 $x,y\in V$ 且 $x\ne y$，有

$$d(Tx,Ty)\preceq\beta\left(d(x,y)\right)d(x,y)$$

则 $T$ 在 $V$ 中存在唯一不动点 $x^*$。

证明：由于复值距离空间是复值 $b$-距离空间的特殊情形，故由定理 3.2.直接可得结论成立。

推论 3.4. 设 $(V,d,s)$ 是一个完备 $b$-距离空间，映射 $T{:}V\to V$ 为一个自映射，若存在 $\beta\in\Theta$ 使得对任意的 $x,\ y\in V$ 且 $x\ne y$，有

$$d(Tx,Ty)\le\beta\left(d(x,y)\right)d(x,y)$$

其中 $\Theta$ 为所有满足函数 $\beta:[0,\infty)\to[0,1)$ 且对于任意的数列 $\{t_n\}$，若 $\beta(t_n)\to1$，有 $t_n\to0$ 的集合，则 $T$ 在 $V$ 中存在唯一不动点 $x^*$。

证明：由于 $b$-距离空间是复值 $b$-距离空间的特殊情形，$\le$ 为 $\preceq$ 的特殊情形，实 $\beta$ 函数是复 $\beta$ 函数的特殊情形，故由定理 3.2.直接可得结论成立。

## 4. 结论

本文在复值 $b$-距离空间这一广义距离空间中，成功建立了 $\varphi$-压缩与 Geraghty 压缩这两类非线性压缩映射不动点定理(定理 3.1 和定理 3.2)。这些结果是 $b$-距离空间与复值距离空间相应结果的直接推广。这些结果丰富了复值 $b$-距离空间的不动点理论，并且拓宽了不动点定理的应用前景。在今后研究中，还可以考虑复值 $b$-距离空间更广泛的压缩形式，例如 $\alpha$-$\varphi$ 型压缩，$\alpha$-Geraghty 型压缩等。此外针对复值 $b$-距离空间的广泛性，可以考虑类似不动点定理在分数阶微分方程或非线性动力系统的应用。

## 基金项目

国家自然科学基金项目(12061050)。

## 参考文献

[1] Bakhtin, I.A. (1989) The Contraction Mapping Principle in Quasimetric Spaces. *Functional Analysis*, **30**, 26-37.

[2] Czerwik, S. (1993) Contraction Mappings in *b*-Metric Spaces. *Acta Mathematica et Informatica Universitatis Ostraviensis*, **1**, 5-11.

[3] Azam, A., Fisher, B. and Khan, M. (2011) Common Fixed Point Theorems in Complex Valued Metric Spaces. *Numerical Functional Analysis and Optimization*, **32**, 243-253. https://doi.org/10.1080/01630563.2011.533046

[4] Rao, K.P.R., Swamy, P.R. and Prasad, J.R. (2013) A Common Fixed Point Theorem in Complex Valued *b*-Metric Spaces. *Bulletin of Mathematics and Statistics Research*, **1**, 1-8.

[5] Aslam, M.S., Bota, M.F., Chowdhury, M.S.R., Guran, L. and Saleem, N. (2021) Common Fixed Points Technique for Existence of a Solution of Urysohn Type Integral Equations System in Complex Valued B-Metric Spaces. *Mathematics*, **9**, Article 400. https://doi.org/10.3390/math9040400

[6] Saadi, M. and Hamaizia, T. (2023) Multivalued Common Fixed Points Theorem in Complex B-Metric Spaces. *Mathematics*, **11**, Article 3177. https://doi.org/10.3390/math11143177

[7] Boyd, D.W. and Wong, J.S.W. (1969) On Nonlinear Contractions. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **20**, 458-464. https://doi.org/10.2307/2035677

[8] Matkowski, J. (1975) Integrable Solutions of Functional Equations. *Dissertationes Mathematicae*, **127**, 1-68.

[9] Shahi, P., Kaur, J. and Bhatia, S.S. (2018) Fixed Point Theorems for (α, φ)-Contractive Mappings of Rational Type in Complex Valued Metric Spaces with Applications. *Results in Fixed Point Theory and Applications*, **2018**, 20187-20202.

[10] Berinde, V. and Păcurar, M. (2021) Existence and Approximation of Fixed Points of Enriched Contractions and Enriched *φ*-Contractions. *Symmetry*, **13**, 498-512. https://doi.org/10.3390/sym13030498

[11] Rossafi, M., Kari, A., Park, C., *et al*. (2023) New Fixed-Point Theorems for *θ*-*φ*-Contraction on *b*-Metric Spaces. *Journal of Mathematics and Computer Science*, **29**, 12-27. https://doi.org/10.22436/jmcs.029.01.02

[12] Qawaqneh, H. (2025) Advanced Fixed-Point Results for New Type Contractions via Simulation Functions in *b*-Metric Spaces with an Application to Nonlinear Integral. *Nonlinear Dynamics & Systems Theory*, **25**, 217-228.

[13] Geraghty, M.A. (1973) On Contractive Mappings. *Proceedings of the American Mathematical Society*, **40**, 604-608. https://doi.org/10.1090/s0002-9939-1973-0334176-5

[14] Arshad, M., Hussain, A. and Azam, A. (2016) Fixed Point of α-Geraghty Contraction with Applications. *University Politehnica of Bucharest Scientific Bulletin*, *Series A*: *Applied Mathematics and Physics*, **78**, 67-78.

[15] Aydi, H., Felhi, A., Karapınar, E, *et al*. (2019) Fixed Points for α-β E-Geraghty Contractions on *b*-Metric Spaces and Applications to Matrix Equations. *Filomat*, **33**, 3737-3750. https://doi.org/10.2298/fil1912737a

[16] Afshari, H., Aydi, H. and Karapınar, E. (2020) On Generalized α-ψ-Geraghty Contractions on *b*-Metric Spaces. *Georgian Mathematical Journal*, **27**, 9-21. https://doi.org/10.1515/gmj-2017-0063

[17] Choudhury, B.S. and Chakraborty, P. (2023) Fixed Point Problem of a Multi-Valued Kannan-Geraghty Type Contraction via w-Distance. *The Journal of Analysis*, **31**, 439-458. https://doi.org/10.1007/s41478-022-00457-3