Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(1), 105-111
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.161013

多项式环上的二阶矩阵环$M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]\right)$中的幂等元

张　蓉，蒋博俊

南宁师范大学数学与统计学院，广西　南宁

收稿日期：2025年12月10日；录用日期：2026年1月12日；发布日期：2026年1月21日

摘　要

在环论中，幂等元是很重要的一类元素，幂等元是指满足$a^2=a$的元素a。任何含单位元的环通常都有两个幂等元，即0和1，这两个特殊的幂等元通常被称为平凡幂等元。然而，在环$\mathbb{Z}_n$和$\mathbb{Z}_n[x]$中，可能存在非平凡幂等元。本文将研究多项式环$\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$中的幂等元，并进一步探究多项式环$\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$上的2阶矩阵环$M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]\right)$中非平凡幂等元的形式与性质，其中$p$、$q$为不同素数。研究结果表明，$\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$中有4个幂等元，$M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]\right)$中有7个非平凡幂等矩阵。记环$R$的幂等元集合为$Id(R)$。

关键词

幂等元，矩阵环，多项式环

Idempotents in Matrix Rings of Order 2 Over Polynomial Ring $\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$

Rong Zhang, Bojun Jiang

School of Mathematics and Statistics, Nanning Normal University, Nanning Guangxi

Received: December 10, 2025; accepted: January 12, 2026; published: January 21, 2026

Abstract

Idempotents are a type of important elements in a ring. An element a is idempotent, if and only if

文章引用: 张蓉, 蒋博俊. 多项式环上的二阶矩阵环$M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]\right)$中的幂等元[J]. 理论数学, 2026, 16(1): 105-111.
DOI: 10.12677/pm.2026.161013

$a^2 = a$. Any ring containing a unity typically has two idempotent elements, namely 0 and 1, which are called the trivial idempotents. However, in rings such as $\mathbb{Z}_n$ and $\mathbb{Z}_n[x]$, there may exist non-trivial idempotents. This paper studies the idempotents in the polynomial ring $\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$, where p, q are distinct primes, and further investigates the forms and properties of non-trivial idempotents in the 2×2 matrix ring $M_2(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x])$. The study shows that there are four idempotent elements in $\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$ and seven non-trivial idempotent matrices in $M_2(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x])$. The set of idempotents of a ring R is denoted by $Id(R)$.

Keywords

Idempotent, Matrix Ring, Polynomial Ring

1. 引言

元素 e 被称为幂等元，如果满足 $e^2 = e$ [1]。在代数研究中，幂等元具有重要意义。通过这些幂等元，我们可以定义新的元素类，如 clean 元和强 clean 元[2]-[4]等。在任何包含单位元的环中，至少存在两个幂等元，即 0 和 1，这两个特定的幂等元通常被称为平凡幂等元[5]。然而，在一些特定的环中，如 $\mathbb{Z}_n$ 和 $\mathbb{Z}_n[x]$，除了平凡幂等元外，可能还存在非平凡的幂等元[6]。

近年来，幂等元相关研究备受关注。在多项式环中，Kanwar 等人证明了任意交换环 R 的幂等元与环 $R[x]$ 的幂等元完全相同[7]。Kanwar 等人还给出了 $M_2(\mathbb{Z}_{2p}[x])$ (其中 p 为奇素数)与 $M_2(\mathbb{Z}_{3p}[x])$ (其中 p 为大于 3 的素数)中幂等元的形式[8]。此外，Balmaceda 等人[9]、Arifin 等人[10]将相关讨论分别扩展到 $M_2(\mathbb{Z}_{pq}[x])$、$M_2(\mathbb{Z}_{p^2q}[x])$ 的情形，其中 p、q 为不同素数。

本文将研究更复杂的情况，即研究环 $\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$ 中的幂等元的情况，其中 p、q 为不同素数。并通过这一情况，我们将探究 $M_2(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x])$ 中非平凡幂等元的形式与性质。研究结果表明，$\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$ 中有 4 个幂等元，$M_2(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x])$ 中有 7 个非平凡幂等矩阵。该结论完善了不同基环类型下矩阵幂等元的研究体系，为分析基环与矩阵环的关联提供了理论支持，未来可将研究拓展至更高阶矩阵环 $M_n(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x])$ ($n \ge 3$)或含更多素因子的基环，进一步推动相关理论与应用的发展。

2. 理论基础

本节将探究多项式环 $\mathbb{Z}_{p^2q^2}$ 上的 2 阶矩阵环中非平凡幂等元的形式与性质，其中 p、q 为不同素数。首先，我们给出以下关于环 $\mathbb{Z}_{p^2q^2}$ 中幂等元的刻画。

定理 1 设 p、q 为不同素数，则环 $\mathbb{Z}_{p^2q^2}$ 的幂等元为 0、1、$q^{p(p-1)}$、$p^{q(q-1)} \pmod{p^2q^2}$。

证 设 x 是环 $\mathbb{Z}_{p^2q^2}$ 中的幂等元，则有 $x^2 \equiv x \pmod{p^2q^2}$。由此可得 $x^2 \equiv x \pmod{p^2}$ 且 $x^2 \equiv x \pmod{q^2}$。由于 p 是素数，因此 $x \equiv 0 \pmod{p^2}$ 或 $x \equiv 1 \pmod{p^2}$。同理，我们有 $x \equiv 0 \pmod{q^2}$ 或 $x \equiv 1$

$\left(\bmod q^2\right)$。因此，我们有以下四种情形：

情形 1 $x \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$，$x \equiv 0 \left(\bmod q^2\right)$，则 $x \equiv 0 \left(\bmod p^2 q^2\right)$。

情形 2 $x \equiv 1 \left(\bmod p^2\right)$，$x \equiv 1 \left(\bmod q^2\right)$，则 $x \equiv 1 \left(\bmod p^2 q^2\right)$。

情形 3 $x \equiv 1 \left(\bmod p^2\right)$，$x \equiv 0 \left(\bmod q^2\right)$。根据中国剩余定理[11]可知，$x \equiv M_{p^2} x_{p^2} \left(\bmod p^2 q^2\right)$，其中 $M_{p^2} = q^2$，$M_{p^2} x_{p^2} \equiv 1 \left(\bmod p^2\right)$。又因为 $\left(p^2, q^2\right) = 1$，由欧拉定理[12]可知，$q^{\varphi(p^2)} = q^{p(p-1)} \equiv 1 \quad \left(\bmod p^2\right)$。此外，幂指数 $p(p-1) \geq 2$，于是 $q^{p(p-1)} \equiv 0 \left(\bmod q^2\right)$。记此幂等元为 e_p，此时 e_p 满足 $e_p \equiv 1 \left(\bmod p^2\right)$，$e_p \equiv 0 \left(\bmod q^2\right)$。因此 $e_p = q^{p(p-1)} \left(\bmod p^2 q^2\right)$。

情形 4 $x \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$，$x \equiv 1 \left(\bmod q^2\right)$。记此幂等元为 e_q，此时 e_q 满足 $e_q \equiv 0 \left(\bmod p^2\right)$，$e_q \equiv 1 \left(\bmod q^2\right)$。和情形 3 的方法类似，可得 $e_q = p^{q(q-1)} \left(\bmod p^2 q^2\right)$。证毕。

例 2 给定环 $\mathbb{Z}_{2^2 3^2}$，该环的幂等元为 0、1、9、28。

与其他环类似，多项式环也存在幂等元。若环 R 是交换环，根据([8]，推论 2.3)可知，$Id\left(\mathbb{Z}_{p^2 q^2}\right) = Id\left(\mathbb{Z}_{p^2 q^2}[x]\right)$。多项式环上的矩阵环也涉及矩阵的行列式与迹，定理 3 表明，幂等矩阵的行列式与迹均属于该基环 R。

定理 3 ([10]，定理 2)设 $(R, +, \times)$ 是任意交换环，且仅含平凡幂零元，则 $M_2(R[x])$ 中任意幂等矩阵的行列式和迹均在 R 中。

定理 3 的前提条件在本研究的上下文是满足的，其为后续的证明提供理论支撑，是关键结论推导的重要依据。

$M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2 q^2}[x]\right)$(其中 p、q 为不同素数)中的平凡幂等元为零矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 和单位矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。接下来，我们将探究 $M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2 q^2}[x]\right)$ 中非平凡幂等矩阵的形式。首先给出下述定理，该定理阐明了 $M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2 q^2}[x]\right)$ 中非平凡幂等矩阵需满足的条件。

定理 4 设 p、q 为不同素数，矩阵 A 是 $M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2 q^2}[x]\right)$ 中的非平凡幂等矩阵，则下列条件之一成立：

(1) $\det(A) = 0$，$tr(A) = 1$ 或 $tr(A) = q^{p(p-1)}$ 或 $tr(A) = p^{q(q-1)}$；

(2) $\det(A) = q^{p(p-1)}$，$tr(A) = 1 + q^{p(p-1)}$ 或 $tr(A) = 2q^{p(p-1)}$；

(3) $\det(A) = p^{q(q-1)}$，$tr(A) = 1 + p^{q(q-1)}$ 或 $tr(A) = 2p^{q(q-1)}$。

证明 根据定理 1 和([8]，推论 2.3)可知，$\mathbb{Z}_{p^2 q^2}[x]$ 中的幂等元为 0、1、$q^{p(p-1)}$、$p^{q(q-1)}$ $\left(\bmod p^2 q^2\right)$。设 $A = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$ 是 $M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2 q^2}[x]\right)$ 中的非平凡幂等矩阵。根据定理 3 可知，$\det(A)$ 和 $tr(A)$ 的值为 0、1、$q^{p(p-1)}$、$p^{q(q-1)}$；若 $\det(A) = 1$，则 A 是单位矩阵，这与 A 是非平凡幂等矩阵矛盾。因此，$\det(A)$ 的值为 0、$q^{p(p-1)}$、$p^{q(q-1)}$，$tr(A)$ 的值为 0、1、$q^{p(p-1)}$、$p^{q(q-1)}$。

情形 1 $\det(A) = 0$。若 $tr(A) = 0$，则

$$A^2 = \begin{pmatrix} a(x)\left(a(x)+d(x)\right) & b(x)\left(a(x)+d(x)\right) \\ c(x)\left(a(x)+d(x)\right) & d(x)\left(a(x)+d(x)\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x)\cdot 0 & b(x)\cdot 0 \\ c(x)\cdot 0 & d(x)\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

即 A 是零矩阵，这与 A 是非平凡幂等矩阵矛盾。因此，$tr(A) \neq 0$。但，$M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2 q^2}[x]\right)$ 中的矩阵：$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} q^{p(p-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} p^{q(q-1)} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，分别是行列式为 0 的非平凡幂等矩阵，且它们的迹依次为 1、$q^{p(p-1)}$、

$p^{q(q-1)}$。因此，若 A 是非平凡幂等矩阵且 $\det(A)=0$，则 $tr(A)$ 的值为 1、$q^{p(p-1)}$ 或 $p^{q(q-1)}$。

情形 2 $\det(A)=q^{p(p-1)}$。由于 A 是幂等矩阵，则有 $a(x)=a^2(x)+b(x)c(x)$ 和 $d(x)=d^2(x)+b(x)c(x)$。因此，

$$(a(x)+d(x))^2=a^2(x)+2a(x)d(x)+d^2(x)=a(x)+d(x)+2q^{p(p-1)}\left(\bmod p^2q^2\right)$$

设 $a(x)+d(x)=y$，则可得方程 $y^2-y-2q^{p(p-1)}\equiv 0\left(\bmod p^2q^2\right)$。该方程等价于

$$y^2-y-2q^{p(p-1)}\equiv 0\left(\bmod p^2\right) \tag{1}$$

$$y^2-y-2q^{p(p-1)}\equiv 0\left(\bmod q^2\right) \tag{2}$$

等式(1)等价于 $y^2-y-2\equiv 0\left(\bmod p^2\right)$，解得 $y\equiv 2\left(\bmod p^2\right)$ 或 $y\equiv -1\left(\bmod p^2\right)$。
等式(2)等价于 $y^2-y\equiv 0\left(\bmod q^2\right)$，解得 $y\equiv 0\left(\bmod q^2\right)$ 或 $y\equiv 1\left(\bmod q^2\right)$。
因此，存在以下四种情况：

(i) $y\equiv 2\left(\bmod p^2\right)$，$y\equiv 0\left(\bmod q^2\right)$；(ii) $y\equiv 2\left(\bmod p^2\right)$，$y\equiv 1\left(\bmod q^2\right)$；

(iii) $y\equiv -1\left(\bmod p^2\right)$，$y\equiv 0\left(\bmod q^2\right)$；(iv) $y\equiv -1\left(\bmod p^2\right)$，$y\equiv 1\left(\bmod q^2\right)$；

利用 $e_p=q^{p(p-1)}\left(\bmod p^2q^2\right)$、$e_q=p^{q(q-1)}\left(\bmod p^2q^2\right)$ 的性质，根据中国剩余定理[11]可知，可把这些解写成 $\mathbb{Z}_{p^2q^2}$ 中的元素：对任意元素 $r\in\mathbb{Z}_{p^2q^2}$ 可唯一写成 $r=r_pe_p+r_qe_q$，其中 $r_p\equiv r\left(\bmod p^2\right)$，$r_q\equiv r\left(\bmod q^2\right)$。于是四个解分别为：

(i) $y=2e_p=2q^{p(p-1)}$；(ii) $y=2e_p+e_q=1+e_p=1+q^{p(p-1)}$；

(iii) $y=-e_p=-q^{p(p-1)}$；(iv) $y=-e_p+e_q=1-2e_p=1-2q^{p(p-1)}$；

当 $y=-q^{p(p-1)}$，设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & -q^{p(p-1)}-a(x)\end{pmatrix}$，则有 $A^2=\begin{pmatrix} -q^{p(p-1)}a(x)-q^{p(p-1)} & -q^{p(p-1)}b(x) \\ -q^{p(p-1)}c(x) & q^{p(p-1)}a(x)\end{pmatrix}$。

由于 A 是幂等矩阵，$a(x)$ 和 $-q^{p(p-1)}-a(x)$ 也必须是幂等元。而 $a(x)$ 的可能值为 0、1、$q^{p(p-1)}$ 或 $p^{q(q-1)}$，此时 $-q^{p(p-1)}-a(x)$ 均不是幂等元，矛盾。因此，$y\neq -q^{p(p-1)}$。

当 $y=1-2q^{p(p-1)}$，由矩阵 A 是幂等矩阵，则有 $2q^{p(p-1)}b(x)=2q^{p(p-1)}c(x)=0$。再由 $\left(1-2q^{p(p-1)}\right)^2=1$，则 $1-2q^{p(p-1)}$ 可逆，因此 $b(x)=c(x)=0$。此时，$A=\begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & 1-2q^{p(p-1)}-a(x)\end{pmatrix}$。由于 A 是幂等矩阵，$a(x)$ 和 $1-2q^{p(p-1)}-a(x)$ 也必须是幂等元。而 $a(x)$ 的可能值为 0、1、$q^{p(p-1)}$ 或 $p^{q(q-1)}$，此时 $1-2q^{p(p-1)}-a(x)$ 均不是幂等元，矛盾。因此，$y\neq 1-2q^{p(p-1)}$。

但是，$M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]\right)$ 中分别存在行列式为 $q^{p(p-1)}$、迹为 $2q^{p(p-1)}$ 和 $1+q^{p(p-1)}$ 的非平凡幂等矩阵，即 $\begin{pmatrix} q^{p(p-1)} & 0 \\ 0 & q^{p(p-1)}\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} q^{p(p-1)} & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$。因此，若 A 是非平凡幂等矩阵且行列式的值为 $q^{p(p-1)}$，则迹的值为 $2q^{p(p-1)}$ 或 $1+q^{p(p-1)}$。

情形 3 $\det(A)=p^{q(q-1)}$。与情形 2 类似，可得方程 $y^2-y-2p^{q(q-1)}\equiv 0\left(\bmod p^2q^2\right)$。该方程等价于

$$y^2-y-2p^{q(q-1)}\equiv 0\left(\bmod p^2\right) \tag{3}$$

$$y^2-y-2p^{q(q-1)}\equiv 0\left(\bmod q^2\right) \tag{4}$$

同理，存在四个解，分别是：(i) $y=2p^{q(q-1)}$；(ii) $y=1+p^{q(q-1)}$；(iii) $y=-p^{q(q-1)}$；(iv) $y=1-2p^{q(q-1)}$。并且，$y=1-2p^{q(q-1)}$ 或 $y=-p^{q(q-1)}$ 时，与矩阵 A 是幂等矩阵矛盾。但是，$M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]\right)$ 中分别存在行列式为

$p^{q(q-1)}$、迹为 $2p^{q(q-1)}$ 和 $1+p^{q(q-1)}$ 的非平凡幂等矩阵，即 $\begin{pmatrix} p^{q(q-1)} & 0 \\ 0 & p^{q(q-1)} \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} p^{q(q-1)} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$。因此，若 A 是非平凡幂等矩阵且行列式的值为 $p^{q(q-1)}$，则迹的值为 $2p^{q(q-1)}$ 或 $1+p^{q(q-1)}$。

证毕。

3. $M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]\right)$ 中的非平凡幂等矩阵

接下来，我们以列表形式给出 $M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]\right)$ 中非平凡幂等矩阵的一般表达式。

定理 5 设 p、q 为不同素数，则 $M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]\right)$ 中的非平凡幂等矩阵为以下形式之一：

1) $\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & 1-a(x) \end{pmatrix}$，其中 $a(x)(1-a(x))-b(x)c(x)=0$；

2) $\begin{pmatrix} q^{p(p-1)}a(x) & q^{p(p-1)}b(x) \\ q^{p(p-1)}c(x) & q^{p(p-1)}(1-a(x)) \end{pmatrix}$，其中 $a(x)(1-a(x))-b(x)c(x)=p^2f(x)$；

3) $\begin{pmatrix} p^{q(q-1)}a(x) & p^{q(q-1)}b(x) \\ p^{q(q-1)}c(x) & p^{q(q-1)}(1-a(x)) \end{pmatrix}$，其中 $a(x)(1-a(x))-b(x)c(x)=q^2g(x)$；

4) $\begin{pmatrix} 1+p^2a(x) & p^2b(x) \\ p^2c(x) & q^{p(p-1)}-p^2a(x) \end{pmatrix}$，其中 $a(x)(1+p^2a(x))+p^2b(x)c(x)=q^2\varphi(x)$；

5) $\begin{pmatrix} q^{p(p-1)} & 0 \\ 0 & q^{p(p-1)} \end{pmatrix}$；

6) $\begin{pmatrix} 1+q^2a(x) & q^2b(x) \\ q^2c(x) & p^{q(q-1)}-q^2a(x) \end{pmatrix}$，其中 $a(x)(1+q^2a(x))+q^2b(x)c(x)=p^2h(x)$；

7) $\begin{pmatrix} p^{q(q-1)} & 0 \\ 0 & p^{q(q-1)} \end{pmatrix}$。

证明 设矩阵 $A=\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}$ 是 $M_2\left(\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]\right)$ 中的非平凡幂等矩阵，则有 $A^2=A$，此时等价于，$\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a^2(x)+b(x)c(x) & b(x)(a(x)+d(x)) \\ c(x)(a(x)+d(x)) & b(x)c(x)+d^2(x) \end{pmatrix}$。根据定理 4，我们将分以下三种情况进行讨论：

情形 1 $\det(A)=0$。

1.1 $tr(A)=1$，由于 $a(x)+d(x)=1$ 和 $a(x)d(x)-b(x)c(x)=0$，则我们有 $a(x)=a^2(x)+b(x)c(x)$，$b(x)=b(x)(a(x)+d(x))$，$c(x)=c(x)(a(x)+d(x))$，$d^2(x)+b(x)c(x)=d^2(x)+a(x)d(x)=d(x)=1-a(x)$，因此，

$$A^2=\begin{pmatrix} a^2(x)+b(x)c(x) & b(x)(a(x)+d(x)) \\ c(x)(a(x)+d(x)) & d^2(x)+b(x)c(x) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & 1-a(x) \end{pmatrix},$$

由于 A 是幂等矩阵，则有 $A=\begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & 1-a(x) \end{pmatrix}$，其中 $a(x),b(x),c(x)\in\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$ 且 $a(x)(1-a(x))-b(x)c(x)=0$。

1.2 $tr(A)=q^{p(p-1)}$，由于 A 是幂等矩阵，此时 $b(x)(a(x)+d(x))=b(x)q^{p(p-1)}=b(x)$，

$c(x)(a(x)+d(x)) = c(x)q^{p(p-1)} = c(x)$，

$a^2(x)+b(x)c(x) = a^2(x)+a(x)d(x) = a(x)(a(x)+d(x)) = a(x)q^{p(p-1)} = a(x)$。由于 $d(x) = q^{p(p-1)} - a(x) = q^{p(p-1)} - a(x)q^{p(p-1)} = q^{p(p-1)}(1-a(x))$ 和 $q^{p(p-1)}(1-a(x))$ 是幂等元可知，$d^2(x)+b(x)c(x) = q^{p(p-1)}(1-a(x))$。因此，$A^2 = \begin{pmatrix} q^{p(p-1)}a(x) & q^{p(p-1)}b(x) \\ q^{p(p-1)}c(x) & q^{p(p-1)}(1-a(x)) \end{pmatrix}$，进一步可得 $A = \begin{pmatrix} q^{p(p-1)}a(x) & q^{p(p-1)}b(x) \\ q^{p(p-1)}c(x) & q^{p(p-1)}(1-a(x)) \end{pmatrix}$。又因为 $\det(A)=0$，代入得 $q^{p(p-1)}(a(x)(1-a(x))-b(x)c(x)) = 0 \pmod{p^2q^2}$，而 $q^{p(p-1)} \ge q^2$，$(q^{p(p-1)}, p^2) = 1$，等式等价于 $a(x)(1-a(x))-b(x)c(x) = 0 \pmod{p^2}$，则存在 $f(x) \in \mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$ 使得 $a(x)(1-a(x))-b(x)c(x) = p^2 f(x)$，其中 $a(x),b(x),c(x) \in \mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$。

1.3 $tr(A) = p^{q(q-1)}$，与 1.2 类似，由于 A 是幂等矩阵，通过计算可知 $A^2 = \begin{pmatrix} p^{q(q-1)}a(x) & p^{q(q-1)}b(x) \\ p^{q(q-1)}c(x) & p^{q(q-1)}(1-a(x)) \end{pmatrix}$，进一步可得矩阵 $A = \begin{pmatrix} p^{q(q-1)}a(x) & p^{q(q-1)}b(x) \\ p^{q(q-1)}c(x) & p^{q(q-1)}(1-a(x)) \end{pmatrix}$。又因为 $\det(A)=0$，可知存在 $g(x) \in \mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$ 使得 $a(x)(1-a(x))-b(x)c(x) = q^2 g(x)$，其中 $a(x),b(x),c(x) \in \mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$。

情形 2 $\det(A) = q^{p(p-1)}$。

2.1 $tr(A) = 1+q^{p(p-1)}$，由于 A 是幂等矩阵可知，$a^2(x)+b(x)c(x) = a(x)$，又 $\det(A) = a(x)d(x)-b(x)c(x) = q^{p(p-1)}$，有 $a(x) = a(x)(a(x)+d(x)) - q^{p(p-1)} = q^{p(p-1)}a(x)+a(x)-q^{p(p-1)}$，$b(x)(a(x)+d(x)) = b(x)(1+q^{p(p-1)})$，$c(x)(a(x)+d(x)) = c(x)(1+q^{p(p-1)})$，$d(x) = d(x)(a(x)+d(x)) - q^{p(p-1)} = q^{p(p-1)}d(x)+d(x)-q^{p(p-1)} = 2q^{p(p-1)} - q^{p(p-1)}a(x)+1-a(x)$，因此，$A^2 = \begin{pmatrix} (1+q^{p(p-1)})a(x)-q^{p(p-1)} & (1+q^{p(p-1)})b(x) \\ (1+q^{p(p-1)})c(x) & 1+2q^{p(p-1)}-(1+q^{p(p-1)})a(x) \end{pmatrix}$，再根据 A 是幂等矩阵可知，$q^{p(p-1)}(a(x)-1) = q^{p(p-1)}b(x) = q^{p(p-1)}c(x) = 0$。又因为 $(q^{p(p-1)}, p^2) = 1$，则 $a(x)-1$、$b(x)$、$c(x)$ 必须是 p^2 的倍数，因此，有 $a(x) = 1+p^2a(x)$，$b(x) = p^2b(x)$，$c(x) = p^2c(x)$，由 $tr(A) = 1+q^{p(p-1)}$，可知 $d(x) = q^{p(p-1)} - p^2a(x)$。再根据 $\det(A) = q^{p(p-1)}$，代入得

$q^{p(p-1)} - p^2a(x) + p^2a(x)q^{p(p-1)} - p^4a^2(x) - p^4b(x)c(x) = q^{p(p-1)}$，即

$p^2\left[a(x)(q^{p(p-1)}-1) - p^2(a^2(x)+b(x)c(x))\right] = 0 \pmod{p^2q^2}$，则存在 $\varphi^*(x) \in \mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$ 使得 $a(x)-a(x)q^{p(p-1)} + p^2(a^2(x)+b(x)c(x)) = q\varphi^*(x)$，而 $q^{p(p-1)} = q \cdot m$，其中 $m \in \mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$，因此，我们有 $a(x)(1+p^2a(x)) + p^2b(x)c(x) = q^2\varphi(x)$，其中 $\varphi(x) \in \mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$。则可知 $A = \begin{pmatrix} 1+p^2a(x) & p^2b(x) \\ p^2c(x) & q^{p(p-1)}-p^2a(x) \end{pmatrix}$，其中 $a(x),b(x),c(x) \in \mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$。

2.2 $tr(A) = 2q^{p(p-1)}$。与 2.1 类似，通过计算可得 $A^2 = \begin{pmatrix} 2q^{p(p-1)}a(x)-q^{p(p-1)} & 2q^{p(p-1)}b(x) \\ 2q^{p(p-1)}c(x) & 3q^{p(p-1)}-2q^{p(p-1)}a(x) \end{pmatrix}$，根据 A 是幂等矩阵可知，$(2q^{p(p-1)}-1)b(x) = (2q^{p(p-1)}-1)c(x) = 0$，由 $q^{p(p-1)}$ 是幂等元可知，$2q^{p(p-1)}-1$ 是可逆元，因此 $b(x) = c(x) = 0$。此时，$A = \begin{pmatrix} a(x) & 0 \\ 0 & 2q^{p(p-1)}-a(x) \end{pmatrix}$。由于 A 是幂等矩阵，$a(x)$ 和

$2p^{q(q-1)}-a(x)$ 也必须是幂等元，其中 $a(x)$ 的可能值为 0、1、$q^{p(p-1)}$ 或 $p^{q(q-1)}$。因此，只能是 $a(x)=q^{p(p-1)}$。此时，矩阵 $A=\begin{pmatrix} q^{p(p-1)} & 0 \\ 0 & q^{p(p-1)} \end{pmatrix}$。

情形 3 $\det(A)=p^{q(q-1)}$。

3.1 $tr(A)=1+p^{q(q-1)}$，此时的计算过程与情形 2 的 2.1 类似，则有 $A=\begin{pmatrix} 1+q^2a(x) & q^2b(x) \\ q^2c(x) & p^{q(q-1)}-q^2a(x) \end{pmatrix}$，其中 $a(x),b(x),c(x)\in\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$，且存在 $h(x)\in\mathbb{Z}_{p^2q^2}[x]$ 使得 $a(x)\left(1+q^2a(x)\right)+q^2b(x)c(x)=p^2h(x)$。

3.2 $tr(A)=2p^{q(q-1)}$，此时的计算过程与情形 2 的 2.2 类似，矩阵 $A=\begin{pmatrix} p^{q(q-1)} & 0 \\ 0 & p^{q(q-1)} \end{pmatrix}$。证毕。

基金项目

本研究得到国家自然科学基金(项目编号：12261001，12461001)的资助。

参考文献

[1] Malik, D.S., Mordeson, J.N. and Sen, M.K. (1997) Fundamentals of Abstract Algebra. McGraw-Hill.

[2] Nicholson, W.K. (1977) Lifting Idempotents and Exchange Rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, **229**, 269-278. https://doi.org/10.1090/s0002-9947-1977-0439876-2

[3] Nicholson, W.K. (1999) Strongly Clean Rings and Fitting's Lemma. *Communications in Algebra*, **27**, 3583-3592. https://doi.org/10.1080/00927879908826649

[4] Kanwar, P., Leroy, A. and Matczuk, J. (2015) Clean Elements in Polynomial Rings. *Contemporary Mathematics*, **634**, 197-204.

[5] Malman, B. (2014) Zero-Divisors and Idempotents in Group Rings. Master's Theses in Mathematical Sciences, Lund University.

[6] Sibley, T.Q. (2012) Idempotents à la mod. *The College Mathematics Journal*, **43**, 401-404. https://doi.org/10.4169/college.math.j.43.5.401

[7] Kanwar, P., Leroy, A. and Matczuk, J. (2013) Idempotents in Ring Extensions. *Journal of Algebra*, **389**, 128-136. https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.05.010

[8] Kanwar, P., Khatkar, M. and Sharma, R.K. (2017) Idempotents and Units of Matrix Rings over Polynomial Rings. *International Electronic Journal of Algebra*, **22**, 147-169. https://doi.org/10.24330/ieja.325941

[9] Balmaceda, J.M.P. and Datu, J.P.P. (2020) Idempotents in Certain Matrix Rings over Polynomial Rings. *International Electronic Journal of Algebra*, **27**, 1-12. https://doi.org/10.24330/ieja.662942

[10] Arifin, M.C. and Ernanto, I. (2023) Idempotent Elements in Matrix Ring of Order 2 over Polynomial Ring $Z_{p^2q}[x]$. *Journal of Fundamental Mathematics and Applications*, **6**, 136-147. https://doi.org/10.14710/jfma.v6i2.19307

[11] Ding, C., Pei, D. and Salomaa, A. (1996). Chinese Remainder Theorem: Applications in Computing, Coding, Cryptography. World Scientific Publishing. https://doi.org/10.1142/9789812779380

[12] Burton, D.M. (2006) Elementary Number Theory. 6th Edition, Tata McGraw-Hill Education Pvt. Ltd.