

一些环的Nil-Clean图的导出子图中的完备码

何 晴^{1*}, 苏华东², 韦扬江¹

¹南宁师范大学数学与统计学院, 广西 南宁

²北部湾大学理学院, 广西 钦州

收稿日期: 2025年12月13日; 录用日期: 2026年1月12日; 发布日期: 2026年1月21日

摘要

设 R 是一个环。如果一个元素 $r \in R$ 可以分解成 R 中的一个幂等元与一个幂零元的和, 那么就称 r 为 R 中的一个nil-clean元。 R 的nil-clean图记为 $G_{NC}(R)$, 其点集为 R , 两个不同的点 x 和 y 是邻接的当且仅当 $x + y$ 是 R 中的一个nil-clean元。设 G 是一个有限无向简单图, 其点集为 $V(G)$ 。设 C 是 $V(G)$ 的一个非空子集。如果当 c_i 取遍 C 中所有元素时, c_i 的半径为1的闭邻域 $S_1(c_i)$ 构成 $V(G)$ 的一个划分, 则称 C 为图 G 中的一个完备码。本文通过分析一些环的nil-clean图的导出子图的结构来确定这些图中完备码的大小, 其中导出子图的点集为环的单位集。

关键词

Nil-Clean图, 导出子图, 完备码

Perfect Codes in Induced Subgraphs of Nil-Clean Graphs for Some Rings

Qing He^{1*}, Huadong Su², Yangjiang Wei¹

¹School of Mathematics and Statistics, Nanning Normal University, Nanning Guangxi

²School of Science, Beibu Gulf University, Qinzhou Guangxi

Received: December 13, 2025; accepted: January 12, 2026; published: January 21, 2026

Abstract

Let R be a ring. If an element $r \in R$ can be decomposed into the sum of an idempotent element and a nilpotent element in R , then r is called a nil-clean element in R . The nil-clean graph of

*通讯作者。

R is denoted as $G_{NC}(R)$, whose point set is R , and two different points x and y are adjacent if and only if $x+y$ is a nil-clean element of R . Let G be a finite undirected simple graph with vertex set $V(G)$. Let C be a non-empty subset of $V(G)$. When c_i runs through C , if $S_i(c_i)$ form a partition of $V(G)$, where $S_i(c_i)$ is the closed neighbourhood of c_i with radius 1, then C is called a perfect code in G . In this paper, we determine the sizes of the perfect codes in the induced subgraphs of the nil-clean graphs of some rings by analyzing the structure of these graphs, where the vertex sets of the induced subgraphs are the unit sets of the rings.

Keywords

Nil-Clean Graphs, Induced Subgraph, Perfect Codes

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

完备码这一概念最初来源于编码理论，在信息传输中，为了纠正传输错误，需要设计纠错码，而完备码是“纠错能力最优”的码。在 1973 年，Biggs 首次将完备码从经典码论推广到图论的范畴，且给出了距离传递图中完备码存在的判别准则[1]。这也开始了后续对凯莱图、交换图、双凯莱图等各类特殊图的完备码的研究。近年来，对代数结构上图的完备码的研究变得越来越热门。例如，Mudaber 等人研究了一些环上不同图的完备码，2021 年，他们确定了以环 \mathbb{Z}_n 的幂等元集为点集的 \mathbb{Z}_n 的单位图的导出子图中的完备码[2]；2022 年，他们确定了阶为 $2^n (n \geq 1)$ 的 Boolean 环的单位图的生成子图的完备码，刻画了单位图存在 1 阶和 2 阶完备码的交换环以及一些单位图及其补图不存在完备码的交换环，还研究了以环的单位集为点集的一些交换环的导出子图的完备码[3]-[5]；2024 年，他们确定了一些交换环上单位积图的不同阶的完备码[6]。Ma 等学者解决了对称群和交错群上交换图的完备码问题[7]。Huo 等学者给出了一些有限非交换群上交换图的完备码[8]。

设 G 是一个有限无向简单图，其点集为 $V(G)$ ，称 $V(G)$ 的一个非空子集 C 为一个码。如果码 C 满足：当 c_i 取遍 C 中所有元素时， c_i 的半径为 1 的闭邻域 $S_i(c_i)$ 构成 $V(G)$ 的一个划分，那么就称 C 为图 G 的一个完备码[1]。换句话说，如果对所有 $c_i, c_j \in C$ ，满足 $S(c_i) \cap S(c_j) = \emptyset$ 且 $\bigcup S_i(c_i) = V(G)$ ，则码 C 就是 G 的一个完备码[9]。如果 C 中有 m 个元素，那么称 C 为 m 阶完备码，记为 $|C|=m$ 。设 R 是一个环，对于环 R 中的一个元素 r ，如果存在元素 $a \in Id(R)$ 和 $b \in Nil(R)$ ，使得 $r = a + b$ ，那么称元素 r 为环 R 中的一个 nil-clean 元，其中 $Id(R)$ 为环 R 的幂等元集， $Nil(R)$ 为环 R 的幂零元集，把环 R 中所有 nil-clean 元构成的集合记为 $NC(R)$ 。环 R 的 nil-clean 图是以 R 中所有元素为点集，两个不同点 x 和 y 是邻接的当且仅当 $x+y \in NC(R)$ 。

根据单位图、零因子图等代数图的导出子图的研究，也让我们自然而然地开始研究 nil-clean 图的导出子图。环的单位集是环的核心代数结构，它直接决定环的整体性质。研究以环的单位集为点集的 nil-clean 图的导出子图，一方面可以简化 nil-clean 图的复杂度，另一方面可以反映出 nil-clean 图的整体结构，此外，还可以由导出子图的某种性质推断出原图的局部性质。本文根据不同的 n 值将模 n 剩余类环 \mathbb{Z}_n 分类，确定这些环的 nil-clean 图的导出子图中完备码的大小。

2. 预备知识

注记 2.1 (1) 记 $\Gamma_{NC}(R)$ 为环 R 的 nil-clean 图的导出子图, 其点集为 R 的单位集 $U(R)$;

1) 记 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数;

2) 设 $V(G)$ 是图 G 的点集, x 是 $V(G)$ 中的一点, 则 $V(G) \setminus \{x\}$ 表示从 $V(G)$ 中去掉点 x 所得到的集合。

定义 2.2 [10] 设 R 是一个环。对于 R 中的一个元素 a , 如果存在一个幂等元 $e \in R$ 和一个幂零元 $b \in R$, 使得 $a = e + b$, 那么就称元素 a 是 R 中的一个 nil-clean 元。如果 R 中的每个元素都是 nil-clean 元, 那么称环 R 为 nil-clean 环。

定义 2.3 [11] 设 R 是一个环。 R 的 nil-clean 图记为 $G_{NC}(R)$, 其点集为 R , 两个不同点 x 和 y 是邻接的当且仅当 $x + y$ 是 R 中的一个 nil-clean 元。

定义 2.4 [12] 设 G 和 H 是两个图, 如果点集 $V(H) \subseteq V(G)$ 且边集 $E(H) \subseteq E(G)$, 那么称 H 是 G 的一个子图, 进一步地, 若 $E(H) = \{(x, y) \mid x, y \in V(H), (x, y) \in E(G)\}$, 则称 H 是 G 的一个导出子图。

引理 2.5 [11] 设 p 是一个素数, 则环 \mathbb{Z}_p 的 nil-clean 图是一个有 p 个点的路径图 P_p 。

证明: 当 p 是一个素数时, 因为 $Id(\mathbb{Z}_p) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ 且 $Nil(\mathbb{Z}_p) = \{\bar{0}\}$, 所以 $NC(\mathbb{Z}_p) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$ 。 \mathbb{Z}_p 的 nil-clean 图 $G_{NC}(\mathbb{Z}_p)$ 如图 1:

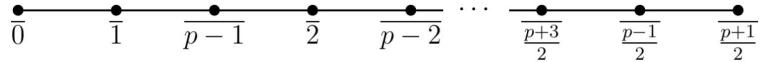


Figure 1. The nil-clean graph of \mathbb{Z}_p

图 1. \mathbb{Z}_p 的 nil-clean 图

事实上, 因为 $\bar{0} + \bar{0} = \bar{0} \in NC(\mathbb{Z}_p)$, $\bar{0} + \bar{1} = \bar{1} \in NC(\mathbb{Z}_p)$, $\frac{\bar{p+1}}{2} + \frac{\bar{p+1}}{2} = \bar{1} \in NC(\mathbb{Z}_p)$, $\frac{\bar{p+1}}{2} + \frac{\bar{p-1}}{2} = \bar{0} \in NC(\mathbb{Z}_p)$, 但本文只考虑简单图, 则图中不含自环边, 所以在图 $G_{NC}(\mathbb{Z}_p)$ 中, 点 $\bar{0}$ 只与 $\bar{1}$ 邻接, 点 $\frac{\bar{p+1}}{2}$ 只与 $\frac{\bar{p-1}}{2}$ 邻接, 所以 $\bar{0}$ 和 $\frac{\bar{p+1}}{2}$ 的度都是 1。而对任意一点 $\bar{v} \in V(G_{NC}(\mathbb{Z}_p)) \setminus \{\bar{0}, \frac{\bar{p+1}}{2}\}$, 因为 $\bar{v} + \bar{0} - \bar{v} = \bar{0} \in NC(\mathbb{Z}_p)$ 且 $\bar{v} + \bar{1} - \bar{v} = \bar{1} \in NC(\mathbb{Z}_p)$, 所以 \bar{v} 只与 $\bar{0} - \bar{v}$ 和 $\bar{1} - \bar{v}$ 邻接, 则 \bar{v} 的度为 2。

3. 主要结果与证明

定理 3.1 设 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_p)$ 是环 \mathbb{Z}_p 的 nil-clean 图的导出子图, 其中 p 是一个素数, 且 C 为该图的完备码, 则 $|C| = \left\lceil \frac{p-1}{3} \right\rceil$ 。

证明: 由引理 2.5 知, 当 p 是一个素数时, $G_{NC}(\mathbb{Z}_p)$ 是一个有 p 个点的路径图。而 \mathbb{Z}_p 中所有的非零元都是单位, 因此, $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_p)$ 是一个有 $p-1$ 个点的路径图。对 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_p)$ 中的点进行重新标号后得到图 2:



Figure 2. The relabeled induced subgraph of the nil-clean graph of \mathbb{Z}_p

图 2. 重新标号后的 \mathbb{Z}_p 的 nil-clean 图的导出子图

观察图 2 可知, $S_1(1) = \{1, 2\}$, $S_1(p-1) = \{p-1, p-2\}$, $S_1(x) = \{x, x-1, x+1\}$, 其中 $x = 2, 3, \dots, p-2$ 。

当 $3 \mid p-1$ 时, 从第一个点开始, 将三个点分成一组, 只需把每组中间的点取为 C 中元素, 即 $C = \{2, 5, 8, \dots, p-2\}$ 。因此, $|C| = \frac{p-1}{3} = \left\lceil \frac{p-1}{3} \right\rceil$ 。

当 $3 \nmid p-1$ 时, 如果 $3 \mid p$, 即 $p=3$, 则 $C = \{1\}$ 或 $C = \{2\}$, 此时, $|C| = 1 = \left\lceil \frac{p-1}{3} \right\rceil$; 如果 $3 \nmid p-2$, 观察图 2 可知, $C = \{1, 4, 7, \dots, p-1\}$, 此时 $|C| = \frac{p-2}{3} + 1 = \left\lceil \frac{p-1}{3} \right\rceil$ 。

例 3.2 设 $\Gamma_{NC}(R)$ 为环 R 的 nil-clean 图的导出子图, C 是它的完备码。

设 $R = \mathbb{Z}_7$, 则 $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_7)) = U(\mathbb{Z}_7) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}\}$, 易知 $NC(\mathbb{Z}_7) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, 所以 \mathbb{Z}_7 的 nil-clean 图的导出子图如图 3:



Figure 3. The induced subgraph of the nil-clean graph of \mathbb{Z}_7

图 3. \mathbb{Z}_7 的 nil-clean 图的导出子图

因为 $3 \mid (7-1)$, 所以由定理 3.1, $|C| = \left\lceil \frac{7-1}{3} \right\rceil = 2$, 观察图 3 可知, $C = \{\bar{3}, \bar{6}\}$ 是 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_7)$ 的一个完备码。

设 $R = \mathbb{Z}_{11}$, 因为 $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{11})) = U(\mathbb{Z}_{11}) = \{\bar{1}, \bar{2}, \bar{3}, \bar{4}, \bar{5}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{10}\}$ 且 $NC(\mathbb{Z}_{11}) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, 所以 \mathbb{Z}_{11} 的 nil-clean 图的导出子图如图 4:



Figure 4. The induced subgraph of the nil-clean graph of \mathbb{Z}_{11}

图 4. \mathbb{Z}_{11} 的 nil-clean 图的导出子图

因为 $3 \nmid (11-1)$, 所以由定理 3.1, $|C| = \left\lceil \frac{11-1}{3} \right\rceil = 4$, 观察图 4 可知, $C = \{\bar{1}, \bar{9}, \bar{4}, \bar{6}\}$ 是 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{11})$ 的一个完备码。

现在我们引入约化图的定义, 方便接下来定理的证明。

定义 3.3 [13] 设 G 是一个简单图, 定义点集 $V(G)$ 上的等价关系 \sim : 对任意两点 $u, v \in V(G)$, $u \sim v$ 当且仅当它们的开邻域相等。图 G 的约化图 G_{red} 有点集 $V(G_{red}) = \{[v] \mid v \in V(G)\}$, (其中 $[v]$ 是点 v 所在的等价类), 任意两个不同点 $[u]$ 和 $[v]$ 在 G_{red} 中是邻接的当且仅当 u 和 v 在 G 中是邻接的。

定理 3.4 设 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{p^k})$ 是环 \mathbb{Z}_{p^k} 的 nil-clean 图的导出子图, 其中 p 是一个素数, k 是正整数, 且 C 为该图的完备码。

1) 若 $p=2, 3$, 则 $|C|=1$ 。

2) 若 $p \neq 2, 3$, 则完备码不存在。

证明: 因为 \mathbb{Z}_{p^k} 是交换的局部环, 它有唯一的极大理想 $(\bar{p}) = Nil(\mathbb{Z}_{p^k})$, 且 $Id(\mathbb{Z}_{p^k}) = \{\bar{0}, \bar{1}\}$, 所以, $NC(\mathbb{Z}_{p^k}) = (\bar{p}) \cup \bar{1} + (\bar{p})$ 。

1) 当 $p=2$ 时, $NC(\mathbb{Z}_{2^k}) = (\bar{2}) \cup \bar{1} + (\bar{2}) = \mathbb{Z}_{2^k}$, 即环 \mathbb{Z}_{2^k} 中每个元素都是 nil-clean 元, 从而 \mathbb{Z}_{2^k} 是一个 nil-clean 环, 所以 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2^k})$ 是一个完全图, 这说明导出子图 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2^k})$ 也是一个完全图。因此, \mathbb{Z}_{2^k} 中任意一点都是图 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2^k})$ 的一个完备码, 此时, $|C|=1$ 。

当 $p=3$ 时, $NC(\mathbb{Z}_{3^k}) = (\bar{3}) \cup \bar{1} + (\bar{3})$, $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{3^k})) = U(\mathbb{Z}_{3^k}) = \bar{1} + (\bar{3}) \cup \bar{2} + (\bar{3})$, 图 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{3^k})$ 的约化图如图 5:



Figure 5. The reduced graph of the induced subgraph of the nil-clean graph of \mathbb{Z}_{3^k}

图 5. \mathbb{Z}_{3^k} 的 nil-clean 图的导出子图的约化图

因为对任意两点 $x_1, x_2 \in \bar{1} + (\bar{3})$ ， $x_1 + x_2 = \bar{2} + (\bar{3}) \notin NC(\mathbb{Z}_{3^k})$ ，对任意两点 $y_1, y_2 \in \bar{2} + (\bar{3})$ ， $y_1 + y_2 = \bar{1} + (\bar{3}) \in NC(\mathbb{Z}_{3^k})$ ，所以图 5 中空心点表示该等价类中所有代表元在原图中是互不相连的，实心点表示该等价类中所有代表元在原图中是两两相连的。这表明，对 $\bar{2} + (\bar{3})$ 中任意一个代表元 x ，点 x 在 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{3^k})$ 中的半径为 1 的闭邻域 $S_1(x) = \{\bar{1} + (\bar{3}), \bar{2} + (\bar{3})\} = V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{3^k}))$ ，因此， $|C|=1$ 。

若 $p \neq 2, 3$ ，则 $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{p^k})) = U(\mathbb{Z}_{p^k}) = \bar{1} + (\bar{p}) \cup \bar{2} + (\bar{p}) \cup \dots \cup \bar{p-1} + (\bar{p})$ 且 $NC(\mathbb{Z}_{p^k}) = (\bar{p}) \cup \bar{1} + (\bar{p})$ ，所以 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{p^k})$ 的约化图如图 6：



Figure 6. The reduced graph of the induced subgraph of the nil-clean graph of \mathbb{Z}_{p^k}

图 6. \mathbb{Z}_{p^k} 的 nil-clean 图的导出子图的约化图

与图 5 类似，每个空心点表示该等价类中所有代表元在原图中互不相连，实心点代表该等价类中所有代表元在原图中两两相连。假设存在完备码 $C \subseteq V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{p^k}))$ ，则 $\bar{1} + (\bar{p}) \cup \bar{p-1} + (\bar{p})$ 中至少有一点属于 C ，否则对任意一点 $x \in \bar{1} + (\bar{p})$ ， $x \notin \cup S_1(c_i)$ ，即 $\cup S_1(c_i) \neq V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{p^k}))$ ，其中 c_i 取遍 C 中所有元素。

假设只存在一点 $x_1 \in \bar{1} + (\bar{p}) \cup \bar{p-1} + (\bar{p})$ ，使得 $x_1 \in C$ 。若 $x_1 \in \bar{1} + (\bar{p})$ ，则对任意 $x_2 \in \bar{1} + (\bar{p}) \setminus \{x_1\}$ ， $x_2 \notin \cup S_1(c_i)$ ，即 $\cup S_1(c_i) \neq V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{p^k}))$ ，与完备码定义矛盾，所以 $x_1 \notin \bar{1} + (\bar{p})$ ；若 $x_1 \in \bar{p-1} + (\bar{p})$ ，则此时至少存在一点 $x_2 \in \bar{2} + (\bar{p})$ ，使得 $x_2 \in C$ ，否则对任意一点 $x_3 \in \bar{p-1} + (\bar{p}) \setminus \{x_1\}$ ， $x_3 \notin \cup S_1(c_i)$ 。但如果存在 $x_2 \in \bar{2} + (\bar{p})$ ，则 $S_1(x_1) \cap S_1(x_2) = \{x_1, x_2\} \neq \emptyset$ 与完备码定义矛盾，所以 $x_1 \notin \bar{p-1} + (\bar{p})$ 。

假设至少存在两点 $x, y \in \bar{1} + (\bar{p}) \cup \bar{p-1} + (\bar{p})$ ，使得 $x, y \in C$ ，则 $S_1(x) \cap S_1(y) \neq \emptyset$ ，这与完备码的定义矛盾，因此，图 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{p^k})$ 中不存在完备码。

例 3.5 设 $\Gamma_{NC}(R)$ 为环 R 的 nil-clean 图的导出子图，且 C 是它的完备码。

设 $R = \mathbb{Z}_{32}$ ，则 $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{32})) = U(\mathbb{Z}_{32}) = \bar{1} + (\bar{2}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \dots, \bar{29}, \bar{31}\}$ 且 $NC(\mathbb{Z}_{32}) = \mathbb{Z}_{32}$ ，所以 \mathbb{Z}_{32} 的 nil-clean 图的导出子图是一个完全图，见图 7：

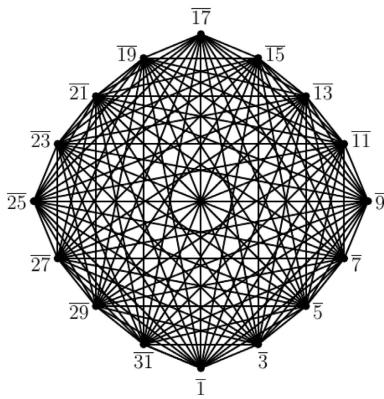


Figure 7. The induced subgraph of the nil-clean graph of \mathbb{Z}_{32}

图 7. \mathbb{Z}_{32} 的 nil-clean 图的导出子图

由定理 3.4, $|C|=1$, 观察图 7 可知, 对任意一点 $x \in V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{32}))$, $S_1(x) = V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{32}))$, 那么 $C = \{x\}$ 。设 $R = \mathbb{Z}_{27}$, 则 $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{27})) = U(\mathbb{Z}_{27}) = \bar{1} + (\bar{3}) \cup \bar{2} + (\bar{3})$ 且 $NC(\mathbb{Z}_{27}) = (\bar{3}) \cup \bar{1} + (\bar{3})$, 图 8 为 \mathbb{Z}_{27} 的 nil-clean 图的导出子图:

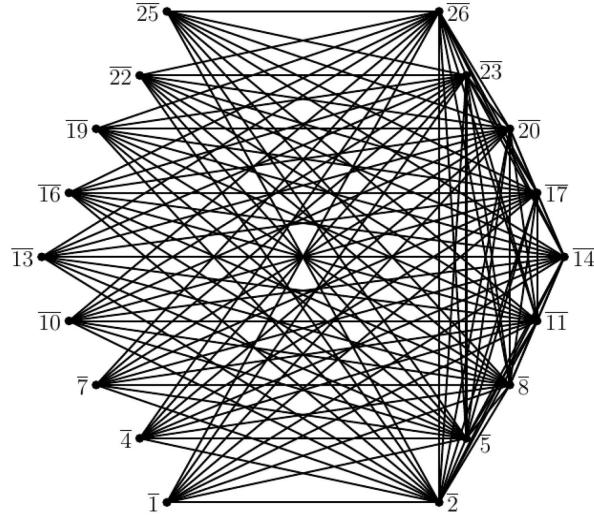


Figure 8. The induced subgraph of the nil-clean graph of \mathbb{Z}_{27}
图 8. \mathbb{Z}_{27} 的 nil-clean 图的导出子图

由定理 3.4, $|C|=1$, 由图 8 知, 对任意一点 $x \in \{\bar{2}, \bar{5}, \bar{8}, \bar{11}, \bar{14}, \bar{17}, \bar{20}, \bar{23}, \bar{26}\}$, $S_1(x) = V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{27}))$, 所以 $C = \{x\}$ 。

设 $R = \mathbb{Z}_{25}$, 则 $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{25})) = U(\mathbb{Z}_{25}) = \bar{1} + (\bar{5}) \cup \bar{2} + (\bar{5}) \cup \bar{3} + (\bar{5}) \cup \bar{4} + (\bar{5})$ 且 $NC(\mathbb{Z}_{25}) = (\bar{5}) \cup \bar{1} + (\bar{5})$, \mathbb{Z}_{25} 的 nil-clean 图的导出子图如图 9:

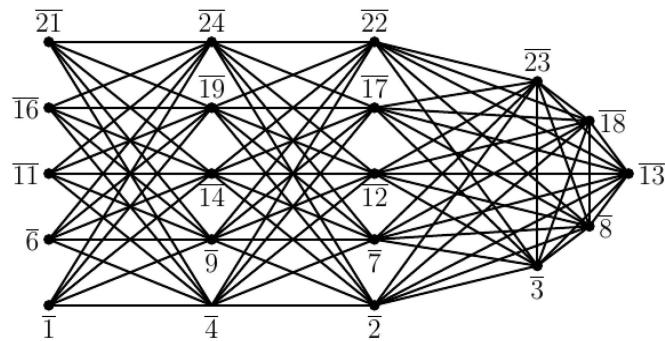


Figure 9. The induced subgraph of the nil-clean graph of \mathbb{Z}_{25}
图 9. \mathbb{Z}_{25} 的 nil-clean 图的导出子图

由定理 3.4, 该图不存在完备码。下面给出半径为 1 的每个点的闭邻域:

对任意一点 $x_1 \in \bar{1} + (\bar{5}) = \{\bar{1}, \bar{6}, \bar{11}, \bar{16}, \bar{21}\}$,

$$S_1(x_1) = \{x_1\} \cup \bar{4} + (\bar{5}) = \{x_1, \bar{4}, \bar{9}, \bar{14}, \bar{19}, \bar{24}\},$$

对任意一点 $x_2 \in \bar{2} + (\bar{5}) = \{\bar{2}, \bar{7}, \bar{12}, \bar{17}, \bar{22}\}$,

$$S_1(x_2) = \{x_2\} \cup \bar{3} + (\bar{5}) \cup \bar{4} + (\bar{5}) = \{\bar{3}, \bar{4}, \bar{8}, \bar{9}, \bar{13}, \bar{14}, \bar{18}, \bar{19}, \bar{23}, \bar{24}\},$$

$$\text{对任意一点 } x_3 \in \bar{3} + (\bar{5}) = \{\bar{3}, \bar{8}, \bar{13}, \bar{18}, \bar{23}\},$$

$$S_1(x_3) = \bar{2} + (\bar{5}) \cup \bar{3} + (\bar{5}) = \{\bar{2}, \bar{3}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{12}, \bar{13}, \bar{17}, \bar{18}, \bar{22}, \bar{23}\},$$

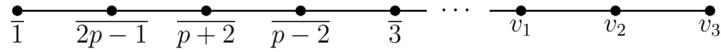
$$\text{对任意一点 } x_4 \in \bar{4} + (\bar{5}) = \{\bar{4}, \bar{9}, \bar{14}, \bar{19}, \bar{24}\},$$

$$S_1(x_4) = \{x_4\} \cup \bar{1} + (\bar{5}) \cup \bar{2} + (\bar{5}) = \{x_4, \bar{1}, \bar{2}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{11}, \bar{12}, \bar{16}, \bar{17}, \bar{21}, \bar{22}\}.$$

我们发现不存在码 $C \subseteq V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{25}))$, 使得 C 为 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{25})$ 中的完备码。

定理 3.6 设 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2p})$ 是环 \mathbb{Z}_{2p} 的 nil-clean 图的导出子图, 其中 p 是一个奇素数, 且 C 为该图的完备码, 则 $|C| = \left\lceil \frac{p-1}{3} \right\rceil$ 。

证明: 当 p 是一个奇素数时, $Nil(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\bar{0}\}$, $Id(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{p}, \bar{p+1}\}$, 所以 $NC(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{p}, \bar{p+1}\}$ 。
 $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2p})) = U(\mathbb{Z}_{2p}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \dots, \bar{p-2}, \bar{p+2}, \dots, \bar{2p-3}, \bar{2p-1}\}$, 因为 $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2p}))$ 中都是奇数点, 则 $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2p}))$ 中任意两点之和都是偶数, 所以 $E(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2p})) = \{(x, y) | x, y \in V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2p})), x + y = \bar{0} \text{ 或 } \bar{p+1}\}$ 。
 \mathbb{Z}_{2p} 的 nil-clean 图的导出子图如图 10:



其中 $v_1 \in \{\frac{p+3}{2}, \frac{3p+3}{2}\}$, $v_2 \in \{\frac{p-1}{2}, \frac{3p-1}{2}\}$, $v_3 \in \{\frac{p+1}{2}, \frac{3p+1}{2}\}$, 且 v_1, v_2, v_3 都是奇数

Figure 10. The induced subgraph of the nil-clean graph of \mathbb{Z}_{2p}

图 10. \mathbb{Z}_{2p} 的 nil-clean 图的导出子图

因为 $\bar{1} + \bar{p} = \bar{p+1}$, $\bar{1} + \bar{2p-1} = \bar{0}$, $v_3 + v_3 = \bar{p+1}$, $v_2 + v_3 = \bar{0}$, 但是 $\bar{p} \notin V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2p}))$ 且本文只考虑简图, 因此点 $\bar{1}$ 只与 $\bar{2p-1}$ 邻接, 点 v_3 只与 v_2 邻接。而对任意一点 $\bar{v} \in V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2p})) \setminus \{\bar{1}, v_3\}$, $\bar{v} + \bar{0} - v = \bar{0}$, $\bar{v} + \bar{p+1} - v = \bar{p+1}$, 所以点 \bar{v} 只与 \bar{v} 和 $\bar{p+1} - v$ 邻接。由图 10 知, $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2p})$ 是一个有 $p-1$ 个点的路径, 同定理 3.1 的证明, 可以得到图 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{2p})$ 中完备码的大小, 结论得证。

例 3.7 设 $\Gamma_{NC}(R)$ 是环 R 的 nil-clean 图的导出子图, 且 C 是它的完备码。当 $R = \mathbb{Z}_{34}$ 时, $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{34})) = U(\mathbb{Z}_{34}) = \{\bar{1}, \bar{3}, \bar{5}, \bar{7}, \bar{9}, \bar{11}, \bar{13}, \bar{15}, \bar{19}, \bar{21}, \bar{23}, \bar{25}, \bar{27}, \bar{29}, \bar{31}, \bar{33}\}$ 且 $NC(\mathbb{Z}_{34}) = \{\bar{0}, \bar{1}, \bar{17}, \bar{18}\}$, 则 \mathbb{Z}_{34} 的 nil-clean 图的导出子图如图 11:

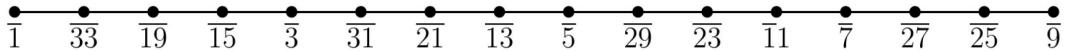


Figure 11. The induced subgraph of the nil-clean graph of \mathbb{Z}_{34}

图 11. \mathbb{Z}_{34} 的 nil-clean 图的导出子图

由定理 3.6 知, $|C| = \left\lceil \frac{17-1}{3} \right\rceil + 1 = 6$ 。观察图 11 可知, $C = \{\bar{1}, \bar{15}, \bar{21}, \bar{29}, \bar{7}, \bar{9}\}$ 是 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{34})$ 的完备码。

定理 3.8 设 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{pq})$ 是环 \mathbb{Z}_{pq} 的 nil-clean 图的导出子图, 其中 p 和 q 是两个互异的奇素数, 则图 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{pq})$ 中不存在完备码。

证明: 因为 p 和 q 是两个互异的奇素数, 所以 $\mathbb{Z}_{pq} \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$, 从而 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_{pq}) \cong \Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ 。
 $V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)) = U(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) = \{(u, v) | u \neq 0 \text{ 且 } v \neq 0, u \in \mathbb{Z}_p, v \in \mathbb{Z}_q\}$,

$NC(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q) = \{(\bar{0}, \bar{0}), (\bar{0}, \bar{1}), (\bar{1}, \bar{0}), (\bar{1}, \bar{1})\}$, 则 $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ 的 nil-clean 图的导出子图如图 12:

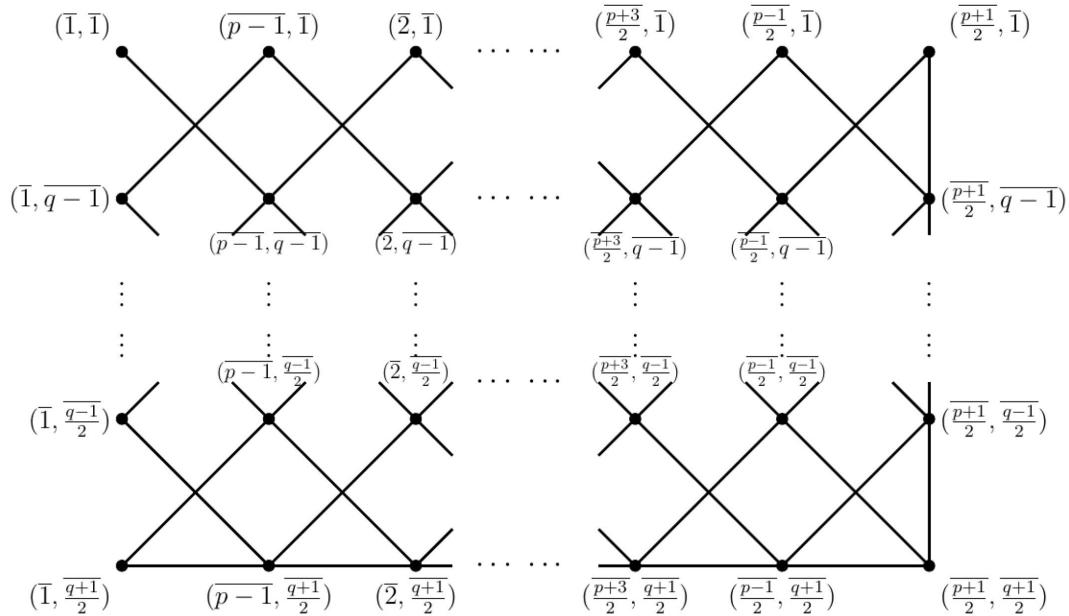


Figure 12. The induced subgraph of the nil-clean graph of $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$

图 12. $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ 的 nil-clean 图的导出子图

我们首先讨论 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q)$ ($q > 3$) 的完备码, 我们给图 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q)$ 重新标号得到图 13:

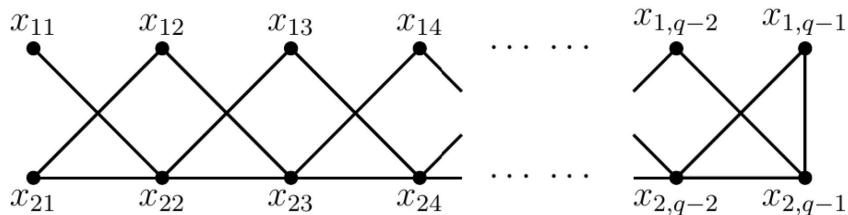


Figure 13. The relabeled induced subgraph of the nil-clean graph of $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$

图 13. 重新标号后的 $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q$ 的 nil-clean 图的导出子图

假设 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q)$ 中存在完备码 C , 则 $x_{11} \in C$ 或 $x_{22} \in C$, 否则 $x_{11} \notin \bigcup S_i(c_i)$, 即 $\bigcup S_i(c_i) \neq V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q))$, 其中 c_i 取遍 C 中所有元素。

如果 $x_{22} \in C$, 易知 $S_1(x_{22}) = \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}\}$, 那么 $x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23} \notin C$, 否则存在点 $v \in \{x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{23}\}$, 使得 $S_1(x_{22}) \cap S_1(v) \neq \emptyset$, 但此时 $x_{12} \notin \bigcup S_i(c_i)$, 则 $\bigcup S_i(c_i) \neq V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q))$, 与完备码定义矛盾, 所以 $x_{22} \notin C$ 。

如果 $x_{11} \in C$, 易知 $S_1(x_{11}) = \{x_{11}, x_{22}\}$, 那么 $x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23} \notin C$, 否则存在 $v \in \{x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}\}$, 使得 $S_1(x_{11}) \cap S_1(v) \neq \emptyset$, 而为了保证 $x_{12}, x_{13} \in \bigcup S_i(c_i)$, 只能 $x_{12}, x_{24} \in C$, 但是 $x_{23} \in S_1(x_{12}) \cap S_1(x_{24})$, 与完备码定义矛盾, 所以 $x_{11} \notin C$ 。综上, $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_q)$ 中不存在完备码。

接下来讨论 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ ($p > 3, q > 5$) 的完备码, 将图 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ 重新标号后截取一部分得到图 14:

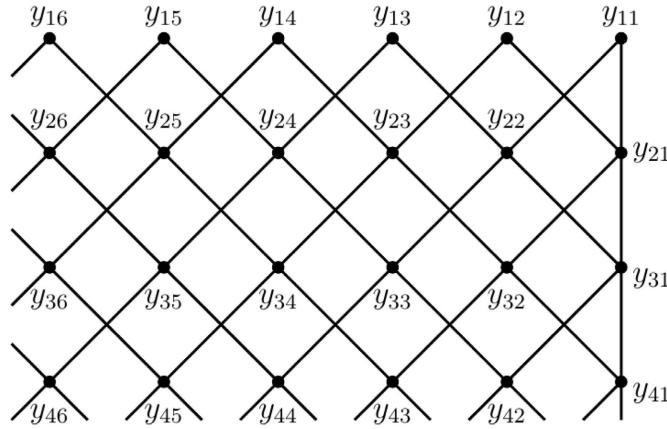


Figure 14. A part obtained by extracting the relabeled induced subgraph of the nil-clean graph of $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$

图 14. 截取重新标号后的 $\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q$ 的 nil-clean 图的导出子图所得的一部分

假设 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ ($p > 3, q > 5$) 中存在完备码 C ，则 y_{11}, y_{21}, y_{22} 中必有一点属于 C ，否则 $y_{11} \notin \bigcup S_i(c_i)$ ，即 $\bigcup S_i(c_i) \neq V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))$ ，其中 c_i 取遍 C 中所有元素。

(1) 若 $y_{11} \in C$ ，则 $y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32} \notin C$ ，否则存在 $v \in \{y_{12}, y_{13}, y_{21}, y_{22}, y_{31}, y_{32}\}$ ，使得 $S_i(v) \cap S_i(y_{11}) \neq \emptyset$ 。因为要使得 $y_{12} \in \bigcup S_i(c_i)$ ，所以只能 $y_{23} \in C$ ，则 $y_{41} \notin C$ ，否则 $S_i(y_{41}) \cap S_i(y_{23}) = \{y_{32}\} \neq \emptyset$ 。又因为要使得 $y_{31} \in \bigcup S_i(c_i)$ ，所以只能 $y_{42} \in C$ ，则 $y_{24} \notin C$ ，否则 $S_i(y_{24}) \cap S_i(y_{42}) = \{y_{33}\} \neq \emptyset$ ，此时我们发现 $y_{13}, y_{22}, y_{24} \notin C$ ，这说明 $y_{13} \notin \bigcup S_i(c_i)$ ，与完备码定义矛盾，所以 $y_{11} \notin C$ 。

(2) 若 $y_{21} \in C$ ，则 $y_{11}, y_{22}, y_{31}, y_{42} \notin C$ ，否则存在 $v_i \in \{y_{11}, y_{22}, y_{31}, y_{42}\}$ ，使得 $S_i(v_i) \cap S_i(y_{21}) \neq \emptyset$ 。因为要满足 $y_{13} \in \bigcup S_i(c_i)$ ，所以只能 $y_{13} \in C$ 或 $y_{24} \in C$ 。

如果 $y_{24} \in C$ ，那么 $y_{13}, y_{33} \notin C$ ，否则存在 $v_2 \in \{y_{13}, y_{33}\}$ ，使得 $S_i(v_2) \cap S_i(y_{24}) \neq \emptyset$ ，这时我们发现 $y_{11}, y_{13}, y_{22}, y_{31}, y_{33} \notin C$ ，那么 $y_{22} \notin \bigcup S_i(c_i)$ ，与完备码定义矛盾，所以 $y_{24} \notin C$ 。

如果 $y_{13} \in C$ ，则 $y_{15}, y_{24}, y_{33} \notin C$ ，否则存在 $v_3 \in \{y_{15}, y_{24}, y_{33}\}$ ，使得 $S_i(v_3) \cap S_i(y_{13}) \neq \emptyset$ ，因为要保证 $y_{33} \in \bigcup S_i(c_i)$ ，则只能 $y_{44} \in C$ ，则 $y_{26} \notin C$ ，否则 $S_i(y_{26}) \cap S_i(y_{44}) = \{y_{35}\} \neq \emptyset$ ，此时 $y_{15}, y_{24}, y_{26} \notin C$ ，那么 $y_{15} \notin \bigcup S_i(c_i)$ ，与完备码定义矛盾，所以 $y_{13} \notin C$ 。根据以上得出 $y_{21} \notin C$ 。

(3) 若 $y_{22} \in C$ ，则 $y_{11}, y_{21}, y_{31}, y_{41} \notin C$ ，否则存在 $v_1 \in \{y_{11}, y_{21}, y_{31}, y_{41}\}$ ，使得 $S_i(v_1) \cap S_i(y_{22}) \neq \emptyset$ 。因为要保证 $y_{21} \in \bigcup S_i(c_i)$ ，只能 $y_{12} \in C$ 或 $y_{32} \in C$ 。

如果 $y_{32} \in C$ ，则 $y_{12}, y_{23} \notin C$ ，否则存在 $v_2 \in \{y_{12}, y_{23}\}$ ，使得 $S_i(v_2) \cap S_i(y_{32}) \neq \emptyset$ ，而此时 $y_{12}, y_{21}, y_{23} \notin C$ ，那么 $y_{12} \notin \bigcup S_i(c_i)$ ，这与完备码定义矛盾，所以 $y_{32} \notin C$ 。

如果 $y_{12} \in C$ ，则 $y_{14}, y_{23}, y_{32} \notin C$ ，否则存在 $v_3 \in \{y_{14}, y_{23}, y_{32}\}$ ，使得 $S_i(v_3) \cap S_i(y_{12}) \neq \emptyset$ ，因为要使得 $y_{32} \in \bigcup S_i(c_i)$ ，则只能 $y_{43} \in C$ ，从而 $y_{25} \notin C$ ，否则 $S_i(y_{25}) \cap S_i(y_{43}) \neq \emptyset$ ，此时 $y_{14}, y_{23}, y_{25} \notin C$ ，这说明 $y_{14} \notin \bigcup S_i(c_i)$ ，与完备码定义矛盾，所以 $y_{12} \notin C$ 。根据以上得 $y_{22} \notin C$ 。

综上， $y_{11}, y_{21}, y_{22} \notin C$ ，则 $y_{11} \notin \bigcup S_i(c_i)$ ，从而 $\bigcup S_i(c_i) \neq V(\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q))$ ，因此，图 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_q)$ 中不存在完备码。

4. 小结和展望

本文基于 nil-clean 图的概念，构造了以单位集为点集的一些环的 nil-clean 图的导出子图并给出其完备码的大小。我们得到以下结论：当 $n = p$ 和 $2p$ (其中 p 是一个奇素数) 时，图 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_n)$ 是一条路径，其完

备码大小为 $\left\lceil \frac{p-1}{3} \right\rceil$; 当 $n=2^k$ 和 3^k (其中 k 为正整数) 时, $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_n)$ 中完备码的大小为 1; 当 $n=p^k$ (其中 $p>3$ 为素数) 和 pq (其中 p, q 是两个互异奇素数) 时, $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_n)$ 中不存在完备码。当然, 对于一般的 n 值, 我们还没有给出图 $\Gamma_{NC}(\mathbb{Z}_n)$ 中完备码的相关结论, 这也是需要我们进一步研究的问题。

基金项目

本论文由国家自然科学基金(项目编号: 12261001, 12461001)资助。

参考文献

- [1] Biggs, N. (1973) Perfect Codes in Graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, **15**, 289-296. [https://doi.org/10.1016/0095-8956\(73\)90042-7](https://doi.org/10.1016/0095-8956(73)90042-7)
- [2] Mudaber, M.H., Sarmin, N.H. and Gambo, I. (2021) Perfect Codes over Induced Subgraphs of Unit Graphs of Ring of Integers Modulo N. *Wseas Transactions on Mathematics*, **20**, 399-403. <https://doi.org/10.37394/23206.2021.20.41>
- [3] Mudaber, M.H., Sarmin, N.H. and Gambo, I. (2022) Perfect Codes in Spanning Subgraphs of Unit Graphs Associated with Some Boolean Rings. *Proceedings of Science and Mathematics*, **6**, 86-89.
- [4] Mudaber, M.H., Sarmin, N.H. and Gambo, I. (2022) Perfect Codes in Unit Graph of Some Commutative Rings. *Advances and Applications in Mathematical Sciences*, **21**, 1895-1905.
- [5] Mudaber, M.H., Sarmin, N.H. and Gambo, I. (2022) Perfect Codes in Induced Subgraph of Unit Graph Associated with Some Commutative Rings. *Jurnal Teknologi*, **84**, 131-136. <https://doi.org/10.11113/jurnalteknologi.v84.17982>
- [6] Mudaber, M.H., Sarmin, N.H. and Gambo, I. (2024) Perfect Codes in Unity Product Graph of Some Commutative Rings. *Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **48**, 401-409.
- [7] Ma, X., Zhong, G. and Wang, K. (2023) Perfect Codes in Commuting Graphs of Symmetric Groups. *Acta Mathe-Matica Sinica Chinese Series*, **66**, 475-484.
- [8] Huo, L., Yi, G. and Li, M. (2025) Perfect Codes in Commuting Graphs on Several Finite Non-Abelian Groups. *Journal of Mathematics*, **45**, 429-434.
- [9] Lint, J.H.V. (1975) A Survey of Perfect Codes. *Rocky Mountain Journal of Mathematics*, **5**, 199-224. <https://doi.org/10.1216/rmj-1975-5-2-199> <http://www.jstor.org/stable/44236426>
- [10] Diesl, A.J. (2013) Nil Clean Rings. *Journal of Algebra*, **383**, 197-211. <https://doi.org/10.1016/j.jalgebra.2013.02.020>
- [11] Basnet, D.K. and Bhattacharyya, J. (2017) Nil Clean Graphs of Rings. *Algebra Colloquium*, **24**, 481-492. <https://doi.org/10.1142/s1005386717000311>
- [12] Chartrand, G. and Zhang, P. (2013) A First Course in Graph Theory. Dover Publications.
- [13] Evans, A.B., Fricke, G.H., Maneri, C.C., McKee, T.A. and Perkel, M. (1994) Representations of Graphs Modulo n . *Journal of Graph Theory*, **18**, 801-815. <https://doi.org/10.1002/jgt.3190180805>