

调和Bergman空间上以 $|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ 为符号的Toeplitz算子的正规性

郝 蕾, 孙 涛

辽宁师范大学数学学院, 辽宁 大连

收稿日期: 2025年12月13日; 录用日期: 2026年1月12日; 发布日期: 2026年1月21日

摘 要

本文刻画了在调和Bergman空间上以 $|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ 为符号的Toeplitz算子的正规性问题。本文先对调和Bergman空间及Toeplitz算子的相关知识进行了介绍, 梳理了调和Bergman空间、Toeplitz算子研究的具有代表性的相关成果。本文还给出了参数相关的以 $|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ 为符号的Toeplitz算子在调和Bergman空间上的正规性的充分必要条件, 在该充要条件的基础上提出了两个推论, 建立及推广了该符号下Toeplitz算子的自伴性与正规性的等价关系, 补充了这类算子结构性质的相关结论。

关键词

调和Bergman空间, Toeplitz算子, 算子正规性

Normality of Toeplitz Operator with $|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ Symbol on Harmonic Bergman Space

Lei Hao, Tao Sun

School of Mathematics, Liaoning Normal University, Dalian Liaoning

Received: December 13, 2025; accepted: January 12, 2026; published: January 21, 2026

Abstract

This paper investigates the normality of Toeplitz operators with the symbol $|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ on the

文章引用: 郝蕾, 孙涛. 调和 Bergman 空间上以 $|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ 为符号的 Toeplitz 算子的正规性[J]. 理论数学, 2026, 16(1): 122-126. DOI: 10.12677/pm.2026.161015

harmonic Bergman space. First, it introduces the relevant knowledge of the harmonic Bergman space and Toeplitz operators, and summarizes the representative research achievements in the study of the harmonic Bergman space and Toeplitz operators. In addition, the paper presents the necessary and sufficient conditions for the normality of parameter-dependent Toeplitz operators with the symbol $|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ on the harmonic Bergman space. Based on these necessary and sufficient conditions, two corollaries are proposed, the equivalence relationship between the self-adjointness and normality of Toeplitz operators under this symbol is established and generalized, and the relevant conclusions on the structural properties of such operators are supplemented.

Keywords

Harmonic Bergman Space, Toeplitz Operator, Operator Normality

Copyright © 2026 by author(s) and Hans Publishers Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access

1. 引言

作为现代算子理论中一个重要的特殊算子类别, Toeplitz 算子是算子理论和算子代数领域不可或缺的组成部分。调和 Bergman 空间是算子理论研究的重要载体, 该空间上 Toeplitz 算子的正规性问题具有一定的研究意义。与以单一类型 $|z|^2, z^m, \bar{z}^n$ 为符号的 Toeplitz 算子相比, 以 $|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ 为符号的 Toeplitz 算子建立了从简单解析符号到混合符号的联系。另外, 调和 Bergman 空间上以 $|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ 为符号的 Toeplitz 算子可看作复值物理量建模中相关算子的简化形式, 故本文刻画的在调和 Bergman 空间上以 $|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ 为符号的 Toeplitz 算子的正规性问题, 可为后续相关物理问题的研究提供一定的理论支撑。

2. 问题背景

Toeplitz 算子的概念最早是由数学家 Toeplitz 提出的, 目前其性质仍在被广泛关注和研究[1]。复分析和泛函分析的发展推动了 Toeplitz 算子拓展, Toeplitz 算子的研究被延伸到了连续函数空间中, 其中一个具有代表性的就是 Toeplitz 算子在 Hardy 空间中的研究。S. Axler [2]等人借助 Douglas 代数工具, 构造了在单变量 Hardy 空间上 Toeplitz 算子紧扰动的充分必要条件。L. A. Coburn [3]将奇异积分算子与 Toeplitz 算子建立了联系, 进一步给出了当符号连续时在 Hardy 空间上 Toeplitz 算子乘积是某 Toeplitz 算子紧扰动的充分条件, 为研究算子紧性打开了思路。Axler 与 Shields [4]提出了逼近定理, 该定理以调和 Bergman 空间为代表的有界符号下 Toeplitz 算子的交换性的约束分析提供了理论基础。Guo 与 Zheng [5]对调和 Bergman 空间上有界符号 Toeplitz 算子的紧性进行了完整刻画, 得到了在调和 Bergman 下有界符号下 Toeplitz 算子是紧的充要条件, 并且该条件区别于 Bergman 空间下有界符号下算子紧的判定条件。王晓峰, 谢启敏[6]研究了圆盘上加权调和 Bergman 空间 Toeplitz 算子的本性范数逼近公式。Jingyu Yang 等[7]针对复杂的调和 Bergman 空间上的以拟其次函数为符号的多个调和 Toeplitz 算子的有限秩问题的展开讨论。Y. Peng and X. Zhao [8]刻画了对偶 Toeplitz 算子在调和 Bergman 空间的正交补空间上的有界、紧、谱的结构等相关问题。

3. 基本知识

命题 3.1 设 m, n 是任意的正整数, P 是从 Lebesgue 空间 L^2 到 Bergman 空间上的正交投影, 有

$$P(\bar{z}^m z^n) = \begin{cases} \frac{n-m+1}{n+1} z^{n-m}, & n \geq m \\ 0, & n < m. \end{cases}$$

设 Q 是从 Lebesgue 空间 L^2 到调和 Bergman 空间上的正交投影, 那么对 $\forall f \in L^2$, 有

$$Q(f) = P(f) + \overline{P(\bar{f})} - P(f)(0).$$

命题 3.2 设 m, n 是任意的正整数, Q 是从 Lebesgue 空间 L^2 到调和 Bergman 空间上的正交投影, 那么有

$$Q(\bar{z}^m z^n) = \begin{cases} \frac{n-m+1}{n+1} z^{n-m}, & n \geq m \\ \frac{m-n+1}{m+1} \bar{z}^{m-n}, & n < m. \end{cases}$$

定义 3.3 在调和 Bergman 空间 b^2 上, 以 $u \in L^2$ 为符号的 Toeplitz 算子定义为: 对 $\forall f \in b^2$, $T_u f = Q(uf)$, 其中 Q 是从 Lebesgue 空间 L^2 到调和 Bergman 空间 b^2 的 Hilbert 正交投影。

定理 3.4 [9] 设 $u, v \in b^2$ 为非常数函数, 并且其中一个为多项式, 那么在调和 Bergman 空间上的 Toeplitz 算子 T_u 与 T_v 可交换当且仅当 $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 使得 $u(z) = \alpha v(z) + \beta$ 。

4. 以 $|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ 为符号的 Toeplitz 算子的正规性

由于 $u(z) = |z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$ 中 $z^m, \bar{z}^n$ 的位置在形式上具有对称性, 因此在下文的讨论中不妨假设 $m \geq n$, 对于 $m < n$ 的情况可以由对称性得到。

定理 4.1 若 $u(z) = |z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$, 其中 $m \geq n$, $a, b \in \mathbb{C}$, 则在调和 Bergman 空间中 $T_u T_u^* = T_u^* T_u$ 当且仅当至少下面的一种情况成立:

- (1) 当 $m = n$ 时, $a = \bar{b}$;
- (2) 当 $m > n > 0$ 时, $a = b = 0$;
- (3) 当 $m > n = 0$ 时, $a = 0, b \in \mathbb{C}$ 。

证明: 首先证明必要性。

在调和 Bergman 空间中的 Toeplitz 算子 T_u 满足 $T_u^* = T_u$, 那么 $T_u T_u^* = T_u^* T_u$ 等价于

$T_{|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n} T_{|z|^2 + a\bar{z}^m + \bar{b}z^n} = T_{|z|^2 + a\bar{z}^m + \bar{b}z^n} T_{|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n}$ 。设 p 是正整数, 且 $p \geq m + n$, 将等式两边同时作用在 z^p 上。

根据 Toeplitz 算子的线性性质,

$$\begin{aligned} T_{|z|^2 + az^m + b\bar{z}^n} T_{|z|^2 + a\bar{z}^m + \bar{b}z^n} (z^p) &= T_{|z|^2} T_{|z|^2} (z^p) + \bar{a} T_{|z|^2} T_{\bar{z}^m} (z^p) + \bar{b} T_{|z|^2} T_{z^n} (z^p) \\ &\quad + a T_{\bar{z}^m} T_{|z|^2} (z^p) + |a|^2 T_{\bar{z}^m} T_{\bar{z}^m} (z^p) + a\bar{b} T_{\bar{z}^m} T_{z^n} (z^p) \\ &\quad + b T_{z^n} T_{|z|^2} (z^p) + \bar{a} b T_{z^n} T_{\bar{z}^m} (z^p) + |b|^2 T_{z^n} T_{z^n} (z^p). \end{aligned}$$

根据命题 3.2 及定义 3.3, $T_{|z|^2} (z^p) = Q(\bar{z} z^{p+1}) = \frac{p+1}{p+2} z^p$, 那么

$$T_{|z|^2} T_{|z|^2} (z^p) = \frac{(p+1)^2}{(p+2)^2} z^p.$$

因为 $p \geq m + n$, 故根据命题 3.2 及定义 3.3, $T_{\bar{z}^m} (z^p) = Q(\bar{z}^m z^p) = \frac{p-m+1}{p+1} z^{p-m}$,

$$T_{|z|^2}(z^{p-m}) = Q(\bar{z}z^{p-m+1}) = \frac{p-m+1}{p-m+2}z^{p-m}.$$

进行相似的计算并合并同类项可得

$$\begin{aligned} & T_{|z|^2}T_{|z|^2}(z^p) + \bar{a}T_{|z|^2}T_{\bar{z}^m}(z^p) + \bar{b}T_{|z|^2}T_{\bar{z}^n}(z^p) + aT_{\bar{z}^m}T_{|z|^2}(z^p) + |a|^2T_{\bar{z}^m}T_{\bar{z}^m}(z^p) \\ & + a\bar{b}T_{\bar{z}^m}T_{\bar{z}^n}(z^p) + bT_{\bar{z}^n}T_{|z|^2}(z^p) + \bar{a}\bar{b}T_{\bar{z}^n}T_{\bar{z}^m}(z^p) + |b|^2T_{\bar{z}^n}T_{\bar{z}^n}(z^p) \\ & = \left[\frac{(p+1)^2}{(p+2)^2} + |a|^2 \frac{p-m+1}{p+1} + |a|^2 \frac{p+1}{p+n+1} \right] z^p + \bar{b} \frac{p+n+1}{p+n+2} z^{p+n} + a \frac{p+1}{p+2} z^{p+m} + \bar{a}\bar{b}z^{p+m+n} \\ & + b \frac{p-n+1}{p+2} z^{p-n} + \bar{a} \frac{p-m+1}{p+1} \frac{p-m+1}{p-m+2} z^{p-m} + \bar{a}\bar{b} \frac{p-m-n+1}{p+1} z^{p-m-n}. \end{aligned}$$

同理可得

$$\begin{aligned} T_{|z|^2 + \bar{a}\bar{z}^m + \bar{b}\bar{z}^n} T_{|z|^2 + a\bar{z}^m + b\bar{z}^n}(z^p) &= \left[\frac{(p+1)^2}{(p+2)^2} + |b|^2 \frac{p-n+1}{p+1} + |a|^2 \frac{p+1}{p+m+1} \right] z^p + a \frac{p+m+1}{p+m+2} z^{p+m} \\ &+ \bar{b} \frac{p+1}{p+2} z^{p+n} + \bar{a}\bar{b}z^{p+m+n} + \bar{a} \frac{p-m+1}{p+2} z^{p-m} \\ &+ b \frac{p-n+1}{p+1} \frac{p-n+1}{p-n+2} z^{p-n} + \bar{a}\bar{b} \frac{p-m-n+1}{p+1} z^{p-m-n}. \end{aligned}$$

当 $m=n$ 时, 观察等式两边 z^{p+n} 的系数得到下面的等式

$$\bar{b} \frac{p+m+1}{p+m+2} + a \frac{p+1}{p+2} = a \frac{p+m+1}{p+m+2} + \bar{b} \frac{p+1}{p+2}.$$

比较系数可得 $a = \bar{b}$;

当 $m > n > 0$ 时, 观察等式两边 z^{p+n} 的系数得到下面的等式

$$\bar{b} \frac{p+n+1}{p+n+2} = \bar{b} \frac{p+1}{p+2}.$$

那么有 $b=0$, 同理比较 z^{p+m} 的系数, 可得 $a=0$;

当 $m > n=0$ 时, 观察等式两边 z^{p+m} 的系数得到等式

$$a \frac{p+1}{p+2} = a \frac{p+m+1}{p+m+2}.$$

于是得 $a=0, b \in \mathbb{C}$.

下面证明充分性.

当 $m=n$ 时, $a = \bar{b}$, 此时 $u(z) = \overline{u(z)} = |z|^2 + az^m + \bar{a}\bar{z}^m$, 显然满足 $T_u T_u^* = T_u^* T_u$; 当 $m > n > 0$ 时, $a = b = 0$, 此时 $u(z) = \overline{u(z)} = |z|^2$; 当 $m > n = 0$ 时, $a = 0, b \in \mathbb{C}$, 此时 $u(z) = |z|^2 + b$, $\overline{u(z)} = |z|^2 + \bar{b}$, 那么 $T_u T_u^* = T_{|z|^2+b} T_{|z|^2+\bar{b}} = T_{|z|^2} T_{|z|^2} + b T_{|z|^2} + \bar{b} T_{|z|^2} + |b|^2 I$, $T_u^* T_u = T_{|z|^2+\bar{b}} T_{|z|^2+b} = T_{|z|^2} T_{|z|^2} + b T_{|z|^2} + \bar{b} T_{|z|^2} + |b|^2 I$, 其中 I 是恒等算子, 此时满足 $T_u T_u^* = T_u^* T_u$.

推论 4.2 若 $u(z) = |z|^2 + az^m + b\bar{z}^n$, 其中 $m \geq n > 0, a, b \in \mathbb{C}$, 则在调和 Bergman 空间中 $T_u T_u^* = T_u^* T_u$ 当且仅当 T_u 是自伴算子.

证明: 先证明充分性. 因为 T_u 是自伴算子, 那么由自伴算子的定义有 $T_u^* = T_u$, 于是有 $T_u T_u^* = T_u^* T_u$.

下证必要性。当 $m=n$ 时, 由定理 4.1 可知, 此时 $a=\bar{b}$, 那么 $u(z)=\overline{u(z)}=|z|^2+az^m+\bar{a}\bar{z}^m$, 此时显然有 $T_u^*=T_{\bar{u}}=T_u$ 。

当 $m>n>0$ 时, 根据定理 4.1 可得, $a=b=0$, 那么此时 $u(z)=|z|^2$, 于是 $T_u^*=T_{\bar{u}}=T_u$ 成立。

推论 4.3 $u(z)=c|z|^2+az^m+b\bar{z}^n$, $m\geq n\geq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$, 则在调和 Bergman 空间中, Toeplitz 算子 T_u 正规当且 T_u 是自伴算子。

证明: 充分性的证明同推论 4.2 的充分性, 下证必要性。

当 $c\neq 0$ 时, $\frac{u(z)}{c}=|z|^2+\frac{a}{c}z^m+\frac{b}{c}\bar{z}^n$, 由定理 4.1 可知 $T_u^*=T_{\bar{u}}=T_u$, 即 T_u 是自伴算子。

当 $c=0$, a,b 至少有一个不为零时, $u(z)=az^m+b\bar{z}^n$, $\overline{u(z)}=\bar{a}\bar{z}^m+\bar{b}z^n$ 。又因为 T_u 正规等价于 $T_uT_{\bar{u}}=T_{\bar{u}}T_u$ 。由定理 3.4 知, $\exists\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ 使得 $u(z)=\alpha\overline{u(z)}+\beta$, 即 $az^m+b\bar{z}^n=\alpha(\bar{a}\bar{z}^m+\bar{b}z^n)+\beta$, 其中 $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$ 。于是 $\beta=0$, $m=n$, $\alpha a=a$, $\alpha b=b$ 。此时 $\alpha=1$, $u(z)=\overline{u(z)}$, $T_u^*=T_{\bar{u}}=T_u$, 即 T_u 是自伴的。当 $a=b=0$, 显然 T_u 是自伴的。

参考文献

- [1] Toeplitz, O. (1911) Zur Theorie der quadratischen und bilinearen formen von unendlichvielen veränderlichen. *Mathematische Annalen*, **70**, 351-376. <https://doi.org/10.1007/bf01564502>
- [2] Axler, S., Chang, S.A. and Sarason, D. (1978) Products of Toeplitz Operators. *Integral Equations and Operator Theory*, **1**, 285-309. <https://doi.org/10.1007/bf01682841>
- [3] Coburn, L.A. (1967) The C^* -Algebra Generated by an Isometry. *Bulletin of the American Mathematical Society*, **73**, 722-726. <https://doi.org/10.1090/s0002-9904-1967-11845-7>
- [4] Axler, S. and Shields, A. (1987) Algebras Generated by Analytic and Harmonic Functions. *Indiana University Mathematics Journal*, **36**, 631-638. <https://doi.org/10.1512/iumj.1987.36.36034>
- [5] Guo, K. and Zheng, D. (2002) Toeplitz Algebra and Hankel Algebra on the Harmonic Bergman Space. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **276**, 213-230. [https://doi.org/10.1016/s0022-247x\(02\)00429-8](https://doi.org/10.1016/s0022-247x(02)00429-8)
- [6] 王晓峰, 谢启敏. 加权调和 Bergman 空间上 Toeplitz 与 Hankel 算子的本性范数[J]. 广州大学学报: 自然科学版, 2015, 14(2): 1-5.
- [7] Yang, J., Lu, Y. and Wang, X. (2016) Algebraic Properties of Toeplitz Operators on the Harmonic Bergman Space. *Journal of Mathematics Research*, **36**, 495-503.
- [8] Peng, Y. and Zhao, X.F. (2021) Dual Toeplitz Operators on the Orthogonal Complement of the Harmonic Bergman Space. *Acta Mathematica Sinica, English Series*, **37**, 1143-1155. <https://doi.org/10.1007/s10114-021-0315-8>
- [9] Choe, B.R. and Lee, Y.J. (1999) Commuting Toeplitz Operators on the Harmonic Bergman Space. *Michigan Mathematical Journal*, **46**, 163-174. <https://doi.org/10.1307/mmj/1030132367>