Pure Mathematics 理论数学, 2026, 16(1), 173-179
Published Online January 2026 in Hans. https://www.hanspub.org/journal/pm
https://doi.org/10.12677/pm.2026.161020

时滞微分变分不等式的解的存在性

许界科

成都理工大学数学科学学院，四川 成都

收稿日期：2025年12月15日；录用日期：2026年1月14日；发布日期：2026年1月23日

摘 要

本文研究了一类具有时滞和变分不等式约束的耦合动力系统解的存在性问题。系统由时滞微分方程和变分不等式耦合构成，在控制理论与工程系统中具有重要应用。通过利用Schauder不动点定理，扩展解方法以及Gronwall不等式等方法，证明了在适当条件下系统解的存在性。

关键词

时滞系统，变分不等式，存在性，不动点定理

Existence of Solutions for Time-Delay Differential Variational Inequalities

Jieke Xu

School of Mathematical Sciences, Chengdu University of Technology, Chengdu Sichuan

Received: December 15, 2025; accepted: January 14, 2026; published: January 23, 2026

Abstract

This paper studies the existence of solutions for a class of coupled dynamical systems with time delays and variational inequality constraints. The system is composed of delayed differential equations coupled with variational inequalities and has important applications in control theory and engineering systems. By utilizing the Schauder fixed point theorem, extended solution methods, and the Gronwall inequality, the existence of solutions for the system under appropriate conditions is proven.

Keywords

Time-Delay Systems, Variational Inequalities, Existence, Fixed Point Theorem

文章引用: 许界科. 时滞微分变分不等式的解的存在性[J]. 理论数学, 2026, 16(1): 173-179.
DOI: 10.12677/pm.2026.161020

1. 引言

2008 年，Pang 和 Stewart 在文献[1]中提出了微分变分不等式，该模型将微分方程与变分不等式相结合。研究人员对微分变分不等式表现出浓厚兴趣。文献[2] [3]已对其理论结果、数值算法及应用展开了多方面探讨。傅等人利用时滞 Gronwall-Bellman 不等式得到了一些判定时滞微分方程稳定性的充分条件[4]。

在实际工程与控制系统中，常出现一类具有时滞和约束条件的耦合动力系统。这类系统通常由微分方程描述系统动力学，由变分不等式[5]描述系统约束或控制条件。本文考虑如下系统：

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-s) + Bu(t), & \forall t \in [0,T], \\ x(t) = \varphi(t), & \forall t \in [-s,0] \end{cases}, \tag{1}$$

$$\left\langle f\left(t, x(t)\right) + g\left(t, u(t)\right), v - u(t) \right\rangle \ge 0, \quad \forall v \in K 。 \tag{2}$$

其中 $s > 0$ 为时滞常数，$x(t) \in R^n$ 为状态变量，$u(t) \in R^m$ 为控制变量，$K \subset R^m$ 为闭凸集，$f:[0,T] \times R^n \to R^m$，$g:[0,T] \times R^m \to R^m$ 为一连续映射。

该系统在机器人控制、电力网络、交通系统等领域具有广泛应用。然而，由于时滞与变分不等式的耦合，其解的存在性分析具有挑战性。本文旨在在适当的函数空间与假设下，证明系统解的存在性。

2. 预备知识

2.1. 函数空间与范数

连续函数空间[6]：设 $C\left([a,b], R^n\right)$ 为从 $[a,b]$ 到 R^n 的连续函数全体，赋予一致范数

$$\|x\|_C = \max_{t \in [a,b]} \|x(t)\| 。$$

可积函数空间[6]：设 $L^p\left([0,T], R^m\right)$ 为 p 次可积函数空间，其中 $1 < p < \infty$，赋予范数

$$\|u\|_{L^p} = \left(\int_0^T \|u(t)\|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} 。$$

2.2. Gronwall 不等式[7]

设 $u(t) \ge 0$，且满足

$$u(t) \le a + b\int_0^t u(s) ds, \quad \forall t \in [0,T],$$

则

$$u(t) \le a e^{bt} 。$$

2.3. Schauder 不动点定理[8]

设 M 是赋范空间 B 中的一个非空凸子集。令 T 是 M 到其紧子集 $K \subset$ M 的一个连续映射，则 T 必有一个不动点。

3. 时滞微分变分不等式解的存在性

3.1. 提出假设

(H1)：A_0，A_1，B 为有界矩阵。

(H2)：φ 是关于 t 的连续函数。

(H3)：$f(t,\cdot)$ 是连续函数，对任意 $t\in[0,T]$。

(H4)：$g(t,\cdot)$ 是连续函数，对任意 $t\in[0,T]$，且是单调的对每一个固定的 t。

3.2. 引理 1

设满足假设(H1)和(H2)，且 $K\subset R^m$ 是紧集，则对一个可测函数 $u(t):[0,T]\to K$，存在一个连续函数 $x(t)$ 为时滞微分方程(1)的解。

证明 设对任意给定的 $u:[0,T_1]\to K$，定义

$$Hx(t)=\varphi(0)+\int_0^t\left[A_0x(\tau)+A_1x(\tau-s)+Bu(\tau)\right]d\tau,\quad \forall t\in[0,T_1],$$

其中 $0<T_1<T$，且

$$x(t)=\varphi(t),\quad \forall t\in[-s,0]。$$

第任意给定正常数 b，有

$$S=\left\{x(t)\,|\,x(t)\in C\left([0,T_1],R^n\right),\left\|x(t)-\varphi(0)\right\|\le b,\forall t\in[0,T_1]\right\},$$

由于 A_0，A_1，B 的范数是有界的，且 K 也有界，则存在常数 $M_1>0$，使得对任意的 $x(t)\in S$，

$$\left\|A_0x(\tau)+A_1x(\tau-s)+Bu(\tau)\right\|\le M_1。$$

设 $T_1=\min\left\{T,\dfrac{b}{M_1}\right\}$，则对任意的 $t\in[0,T_1]$，

$$\left\|Hx(t)-\varphi(0)\right\|\le M_1T\le b。$$

此外，

$$\begin{aligned}\left\|Hx(t_1)-Hx(t_2)\right\|&\le\left\|\int_{t_2}^{t_1}A_0x(\tau)+A_1x(\tau-s)+Bu(\tau)\,d\tau\right\|\\&\le M_1\left|t_1-t_2\right|\end{aligned}。$$

因此，映射 $H:S\to S$ 是一致有界且等度连续。并且，满足 Schauder 不动点定理，所以存在 $x(t)\in S$，使得 $Hx(t)=x(t)$。

接下来，设

$$x(t)=\varphi(0)+\int_0^t\left[A_0x(\tau)+A_1x(\tau-s)+Bu(\tau)\right]d\tau,\quad \forall t\in[0,T_1],$$

则有，

$$\begin{aligned}\left\|x(t)\right\|&=\left\|\varphi(0)+\int_0^t\left[A_0x(\tau)+A_1x(\tau-s)+Bu(\tau)\right]d\tau\right\|\\&\le\left\|\varphi(0)\right\|+\left\|\int_0^t\left[A_0x(\tau)+A_1x(\tau-s)+Bu(\tau)\right]d\tau\right\|\\&\le\left\|\varphi(0)\right\|+\int_0^t\left\|A_0\right\|\left\|x(\tau)\right\|+\left\|A_1\right\|\left\|x(\tau-s)\right\|+\left\|B\right\|\left\|u(\tau)\right\|d\tau\end{aligned}$$

$$\le \|\varphi(0)\| + \|B\| M_u T + \int_0^t \|A_0\| \|x(\tau)\| d\tau + \int_0^t \|A_1\| \|x(\tau - s)\| d\tau$$

$$\le \|\varphi(0)\| + \|B\| M_u T + \|A_1\| \|\varphi\| s + \int_0^t (\|A_0\| + \|A_1\|) \|x(\tau)\| d\tau$$

通过 Gronwall 不等式得

$$\|x(t)\| \le \alpha e^{\beta t} 。 \tag{3}$$

最后，通过扩展解方法[9]，得到存在一个连续函数 $x(t)$，使得对任意 $t \in [0, T]$，有

$$x(t) = \varphi(0) + \int_0^t [A_0 x(\tau) + A_1 x(\tau - s) + Bu(\tau)] d\tau$$

根据[10]，可以得到 $x(t)$ 是时滞微分方程(1)的解，对几乎处处 $t \in [0, T]$。

3.3. 引理 2

设满足假设(H3)和(H4)，且 $K \subset R^m$ 是紧凸集，则有对一个连续函数 $x(t)$，存在一个可测函数 $u(t):[0,T] \to K$，使得对任意可测函数 $v(t):[0,T] \to K$，有

$$\int_0^T \langle f(t, x(t)) + g(t, u(t)),\quad u(t) - v(t) \rangle dt \le 0$$

证明 由于 g 是连续函数和 $K \subset R^m$ 是紧凸集，根据文献[1]结论 2.2.5，对每个固定的时间 $t \in [0, T]$，存在一个解 $u \in K$，满足下面变分不等式

$$\langle f(t, x(t)) + g(t, u),\quad v - u \rangle \ge 0, \quad \forall v \in K 。 \tag{4}$$

而且，根据 g 的单调性，根据文献[11]中命题 1，变分不等式(4)可以等价为如下对偶变分不等式

$$\langle f(t, x(t)) + g(t, v),\quad u - v \rangle \le 0, \quad \forall v \in K 。 \tag{5}$$

因为 $x(t)$ 在 $[0, T]$ 上是连续的，则存在函数列 $\{x_k(t)\}$，当 $k \to \infty$ 时，使得 $x_k(t)$ 收敛到 $x(t)$ [12]。因此，由不等式(5)可得，对于一个阶跃函数 $x_k(t)$，存在一个阶跃函数 $u_k(t):[0,T] \to K$，使得

$$\langle f(t, x_k(t)) + g(t, v),\quad u_k(t) - v \rangle \le 0, \quad \forall v \in K 。$$

由于这个阶跃函数 $\{u_k(t)\}$ 是可测且有界的，存在一个 $\{u_k(t)\}$ 的子列，也将这个子列记作 $\{u_k(t)\}$，使得

$$u_k(t) \xrightarrow{w} u(t),$$

通过 Mazur 定理[13]，在 $L^2[0,T]$ 空间上，$\{u_k(t)\}$ 一列凸组合在 $\| \ \|_{L^2}$ 范数下弱收敛到 $u(t)$。在 $L^2[0,T]$ 空间下，收敛序列具有几乎处处逐点收敛的子列[14]，因此可得 $u(t)$ 在 $[0,T]$ 上可测，对几乎处处所有 $t \in [0,T]$，

$$u(t) \in K 。$$

因为对任意可测函数 $v(t):[0,T] \to K$，

$$\int_0^T \langle f(t, x_k(t)) + g(t, v(t)),\quad u_k(t) - v(t) \rangle dt \le 0 ,$$

且

$$\lim_{k\to\infty} \left\| \int_0^T \langle f(t, x_k(t)) + g(t, v(t)),\quad u_k(t) - v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle f(t, x(t)) + g(t, v(t)),\quad u(t) - v(t) \rangle dt \right\|$$

$$\le \lim_{k\to\infty} \left\| \int_0^T \langle f(t, x_k(t)) + g(t, v(t)),\quad u_k(t) - v(t) \rangle dt - \int_0^T \langle f(t, x(t)) + g(t, v(t)),\quad u_k(t) - v(t) \rangle dt \right\|$$

$$+\lim_{k\to\infty}\left\|\int_0^T\left\langle f\left(t,x(t)\right)+g\left(t,v(t)\right),\quad u_k\left(t\right)-v\left(t\right)\right\rangle dt-\int_0^T\left\langle f\left(t,x(t)\right)+g\left(t,v(t)\right),\quad u\left(t\right)-v\left(t\right)\right\rangle dt\right\|$$

我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^T\left\langle f\left(t,x(t)\right)+g\left(t,v(t)\right),\quad u\left(t\right)-v\left(t\right)\right\rangle dt\\&=\lim_{k\to\infty}\int_0^T\left\langle f\left(t,x_k\left(t\right)\right)+g\left(t,v(t)\right),\quad u_k\left(t\right)-v\left(t\right)\right\rangle dt\text{。}\\&\le 0\end{aligned}$$

3.4. 定理 1

设满足假设条件(H2)，(H3)和(H4)， $K\subset R^m$ 是紧凸集，则存在一对 $\left(u(t),x(t)\right)$，使得 $u(t)$ 是可测的并且满足变分不等式(2)，对几乎处处 $t\in[0,T]$，以及 $x(t)$ 是时滞微分方程(1)的解。

证明 对于一个可测函数 $u^0(t):[0,T]\to K$，由引理 3.1，存在一个连续函数 $x^1(t)$，满足以下微分方程，

$$\begin{cases}x^1(t)=\int_0^T A_0x^1(t)+A_1x^1(t-s)+Bu^0(t), & \forall t\in[0,T],\\ x^1(t)=\varphi(t), & \forall t\in[-s,0]\end{cases}\text{。}$$

由引理 3.2，存在一个可测函数 $u^1(t):[0,T]\to K$，使得对任意可测函数 $v(t):[0,T]\to K$，

$$\int_0^T\left\langle f\left(t,x^1(t)\right)+g\left(t,v(t)\right),\quad u^1\left(t\right)-v\left(t\right)\right\rangle dt\le 0\text{。}$$

重复上述方法步骤，当 $n=1$，$2\cdots$，我们得到一个序列 $\left\{x^n(t),u^n(t)\right\}$，使得

$$\begin{cases}x^{n+1}(t)=\int_0^T A_0x^{n+1}(t)+A_1x^{n+1}(t-s)+Bu^n(t), & \forall t\in[0,T],\\ x^{n+1}(t)=\varphi(t), & \forall t\in[-s,0]\end{cases},\tag{6}$$

和对任意可测函数 $v(t):[0,T]\to K$，有

$$\int_0^T\left\langle f\left(t,x^n(t)\right)+g\left(t,v(t)\right),\quad u^n\left(t\right)-v\left(t\right)\right\rangle dt\le 0\text{。}\tag{7}$$

随后，由于 K 的紧性，可以推到出 $\left\{u^n(t)\right\}$ 具有一个子列，该子列依然记作 $\left\{u^n(t)\right\}$，使得 $u^n(t)$ 在 L^2 范数下弱收敛到一个极限 $u(t)$。此外

$$\begin{aligned}\left\|x^{n+1}(t)-x^n(t)\right\|&=\left\|\int_0^t\left[A_0x^{n+1}(\tau)+A_1x^{n+1}(\tau-s)+Bu^n(\tau)\right]d\tau\right.\\&\quad\left.-\int_0^t\left[A_0x^n(\tau)+A_1x^n(\tau-s)+Bu^{n-1}(\tau)\right]d\tau\right\|\\&\le\int_0^t\left(\|A_0\|+\|A_1\|\right)\left\|x^{n+1}(\tau)-x^n(\tau)\right\|d\tau+\left\|\int_0^t B\left(u^n(\tau)-u^{n-1}(\tau)\right)d\tau\right\|\\&\le\left\|\int_0^t B\left(u^n(\tau)-u^{n-1}(\tau)\right)d\tau\right\|\bullet\exp\left(\int_0^T\left(\|A_0\|+\|A_1\|\right)d\tau\right)\end{aligned}\tag{8}$$

上面最后一个不等式是通过 Gronwall 不等式推导出来的，得到 $\left\{x^n(t)\right\}$ 的一致有界性。然后，我们定义

$$M_1=\max_{\tau\in[0,T]}\left[A_0x^n(\tau)+A_1x^n(\tau-s)+Bu^{n-1}(\tau)\right]$$

由(5)得

$$\left\|x^n(t_1)-x^n(t_2)\right\|$$

$$= \left\| \int_{t_2}^{t_1} A_0 x^n(\tau) + A_1 x^n(\tau - s) + B u^{n-1}(\tau) d\tau \right\|$$

$$\le M_1 |t_1 - t_2| 。$$

因此，$\{x^n(t)\}$ 在 $[0,T]$ 上是等度连续的，通过 Arzelà-Ascoli 定理，序列 $\{x^n(t)\}$ 存在一个子列，也记作 $\{x^n(t)\}$，使得 $\{x^n(t)\}$ 一致收敛到极限 $x(t)$。

当 $n \to \infty$，由(6)得

$$\begin{cases} x(t) = \int_0^T A_0 x(t) + A_1 x(t-s) + Bu(t), & \forall t \in [0,T], \\ x(t) = \varphi(t), & \forall t \in [-s,0] \end{cases}。$$

由文献[10]，可以推导出 $x(t)$ 是(1)的解，对于几乎处处的 $t \in [0,T]$。

同样为了得到和(5)相似的结论，由不等式(7)和(8)，对任意的可测函数 $v(t):[0,T] \to K$，

$$\int_0^T \left\langle f(t, x(t)) + g(t, v(t)),\quad u(t) - v(t) \right\rangle dt \le 0, \tag{9}$$

随后，我们证明，对几乎所有 $t \in [0,T]$，

$$\left\langle f(t, x(t)) + g(t, v(t)),\quad u(t) - v(t) \right\rangle \le 0,\quad \forall v \in K \tag{10}$$

我们采用反证法，去证明上述不等式成立，我们假设存在一个子集 $E \subset [0,T]$，其中 Lebesgue 测度 $m(E) > 0$，并且对于每一个 $t \in E$，$u(t)$ 都不满足对偶变分不等式(10)的解。然后，存在一个 $t_0 \in E$ 和一个 $v_0 \in K$，使得

$$\left\langle f(t_0, x(t_0)) + g(t_0, v_0),\quad u(t_0) - v_0 \right\rangle = \lambda > 0,$$

定义

$$h(t) = \left\langle f(t_0, x(t)) + g(t, v_0),\quad u(t) - v_0 \right\rangle。$$

由于 $u(t)$ 在 $[0,T]$ 上可测，根据 Lusin 定理[10]，对于任意 $\varepsilon > 0$，存在闭集 $E_1 \subset E$，使得 $m(E - E_1) < \varepsilon$，并且 $u(t)$ 在 E_1 上连续，因此 $h(t)$ 在 E_1 上连续，并且存在 t_0 的邻域 $U(t_0)$，使得 Lebesgue 测度 $m(U(t_0) \cap E_1) > 0$，并且对于所有 $t \in U(t_0) \cap E_1$，都有 $|h(t) - h(t_0)| \le \frac{\lambda}{2}$，令

$$v(t) = \begin{cases} v_0, & \forall t \in U(t_0) \cap E_1, \\ u(t), & \forall t \in [0,T] / (U(t_0) \cap E_1) \end{cases},$$

则

$$\int_0^T \left\langle f(t, x(t)) + g(t, v(t)),\quad u(t) - v(t) \right\rangle dt$$

$$= \int_{U(t_0) \cup E_1} \left\langle f(t, x(t)) + g(t, v_0),\quad u(t) - v_0 \right\rangle dt$$

$$+ \int_{[0,T]/(U(t_0) \cup E_1)} \left\langle f(t, x(t)) + g(t, u(t)),\quad u(t) - u(t) \right\rangle dt$$

$$> \frac{\lambda}{2} > 0 。$$

这与不等式(9)是矛盾的，因此对于几乎所有 $t \in [0,T]$ 都满足不等式(10)，由于变分不等式(3)和(4)等价。对几乎所有 $t \in [0,T]$，$u(t)$ 都满足不等式(2)。

参考文献

[1] Facchinei, F. and Pang, J.S. (2003) Finite Dimensional Variational Inequalities and Complementarity Problems. Springer.

[2] Chen, X. and Wang, Z. (2014) Differential Variational Inequality Approach to Dynamic Games with Shared Constraints. *Mathematical Programming*, **146**, 379-408. https://doi.org/10.1007/s10107-013-0689-1

[3] Chen, T., Huang, N. and Sofonea, M. (2022) A Differential Variational Inequality in the Study of Contact Problems with Wear. *Nonlinear Analysis*: *Real World Applications*, **67**, Article 103619. https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2022.103619

[4] 傅朝金, 廖晓昕. 时滞微分方程的稳定性[J]. 数学物理学报, 2003, 23(4): 494-498.

[5] 张石生. 变分不等式及其相关问题[M]. 重庆: 重庆科学技术出版社, 2008.

[6] 孙炯, 贺飞, 郝晓玲, 等. 泛函分析[M]. 第二版. 北京: 高等教育出版社, 2010.

[7] Chen, X. and Wang, Z. (2013) Convergence of Regularized Time-Stepping Methods for Differential Variational Inequalities. *SIAM Journal on Optimization*, **23**, 1647-1671. https://doi.org/10.1137/120875223

[8] Smart, D.R. (1973) Fixed Point Theorems. Cambridge University Press.

[9] Hirsch, M.W., Smale, S. and Devaney, R.L. (2004) Differential Equations, Dynamical Systems, and an Introduction to Chaos. Academic Press.

[10] Rudin, W. (1970) Real and Complex Analysis. The McGraw-Hill Companies, Inc.

[11] Crouzeix, J. (1997) Pseudomonotone Variational Inequality Problems: Existence of Solutions. *Mathematical Programming*, **78**, 305-314. https://doi.org/10.1007/bf02614358

[12] Dinculeanu, N. (2000) Vector Integration and Stochastic Integration in Banach Spaces. Wiley. https://doi.org/10.1002/9781118033012

[13] Yosida, K. (1980) Functional Analysis. Springer.

[14] Lang, S. (1993) Real and Functional Analysis. Springer.